PROBLÈMES

PLAISANTS & DÉLECTABLES


ECCE LABORA ET NOLI DESPERARE
GV

PROBLÈMES
PLAISANTS & DÉLECTABLES
QUI SE FONT PAR LES NOMBRES

PAR CLAUDE-GASPAR BACHET

SIEUR DE MÉZIRIAC

CINQUIÈME ÉDITION

REVUE, SIMPLIFIÉE ET AUGMENTÉE

PAR A. LABOSNE

Professeur de Mathematiques

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1884

A Monsieur le Comte de Tournon,

Monsieur,

Je vous offre des jeux, mais qui sont, à mon avis, dignes de votre bel esprit, et capables de lui fournir quelquefois un agréable divertissement. J'ai juste sujet de juger ainsi, puisque j'ai eu le bonheur de connaître, par expérience, les belles qualités que vous possédez, et le plaisir que vous prenez aux Mathématiques, et particulièrement en cette sorte de jeux, qui se font par les nombres, dont je vous en ai vu pratiquer plusieurs fort heureusement; et même vous m'avez fait l'honneur d'en vouloir apprendre de moi quelques-uns. Ces considérations ont été les motifs qui m'ont porte *à vous dédier ce livre, lequel vous verrez, s'il vous plaît, de bon œil, ayant égard non tant à sa valeur qu'à l'inviolable affection que vous a vouée*

Votre très-humble
et très-affectionné serviteur,

CLAUDE-GASPAR BACHET

A Monsieur de Méziriac

Sur son livre des Jeux.

SONNET

Tout ce que le puissant architecte du monde
Par sa seule parole a fait voir à nos yeux
De plus beau, de plus rare et plus industrieux,
Dans le ciel, dans la terre ou dans la mer profonde,

Par des nombres égaux d'une mesure ronde
Se lie et s'entretient d'un ordre gracieux,
Et le chaos confus règnerait en tous lieux,
Si chaque chose était sans nombre vagabonde

Imitant cet ouvrier, Bachet, tu nous fais voir
Que sur tous les humains tu t'es plu de savoir
Des nombres plus cachés l'admirable nature.

Voire au même patron réglant tes actions,
Jusqu'à tes passe-temps et récréations,
Tout est fait et dressé par nombre et par mesure

Charles le Grand,
Avocat au siége présidial de Bresse.

A Monsieur de Méziriac

Sur ses Jeux arithmétiques.

L'un préfère au profit les douces voluptés,
L'autre n'approuve rien qui ne soit profitable.
Mais quand on a mêlé l'utile au délectable,
Alors également tous s'en sont contentés.

Tes jeux, mon cher Bachet, doctement inventés,
Savent bien accoupler d'un art inimitable
Le plaisir au profit, et font qu'en même table
Chacun peut assouvir ses curiosités.

O que de beaux secrets ! Mais quoi ! gentil ouvrier,
D'un labeur si parfait seras-tu sans loyer ?
Non, tu ne peux manquer d'une immortelle gloire,

Car aux siècles suivants les plus braves esprits,
Qui se paîtront souvent de tes fameux écrits,
Consacreront ton nom au temple de mémoire.

Phil Coll

PRÉFACE

Au Lecteur.

Il y a onze ans que ce livre fut premièrement imprimé, et que je volus qu'il sortît en lumière, tant pour faire un essai de mes forces que pour sonder quel jugement on ferait de mes œuvres, et afin qu'il servît comme d'avant-coureur à mon Diophante. Maintenant que j'ai vu que ce petit ouvrage a été favorablement accueilli des plus beaux esprits de la France, et qu'avec l'aide du Ciel, Diophante voit le jour, et me rend aussi la récompense attendue de mon travail, il me semble qu'avec plus d'assurance je puis publier ce livre de nouveau, et me promettre qu'il sera bien reçu, puisqu'il est beaucoup plus accompli qu'il n'était auparavant. Il est vrai que peut-être quelqu'un s'étonnera de ce qu'après avoir fait une œuvre si sérieuse et remplie de si profondes spéculations, comme est le Diophante, je me suis amusé à des choses de si petite conséquence et de si peu d'utilité, comme sont celles que ce livre contient : mais je réponds premièrement à celui qui fera cette considération, que les livres sont les enfants de nos esprits, et qu'outre l'inclination naturelle qu'ont tous les pères d'aimer leurs enfants généralement, ils portent encore une affection particulière à leurs premiers-nés. C'est pourquoi ce livre étant le premier qui soit parti de ma main, et comme l'enfant premier-né de mon esprit, c'est avec juste raison que je le chéris particulièrement, et que je ne me contente pas de l'avoir mis au monde, mais je veux encore prendre le soin de sa conservation et de son accroissance. En outre, je ne crois pas que ceux qui auront pénétré dans ce livre plus avant que l'écorce le jugent de si peu de valeur que feront ceux-là qui n'en auront lu que le titre : car encore que ce ne soient que des jeux, dont le but principal est de donner une honnête récréation, et d'entretenir avec leur gentillesse une compagnie, si est-ce qu'il faut bien de la subtilité d'esprit pour les pratiquer parfaitement, et faut être plus que médiocrement expert en la science des nombres pour bien entendre les démonstrations et pour se savoir aider de plusieurs belles inventions que j'ai ajoutées. Finalement pour preuver encore que ce livre n'est point du tout inutile, et que la connaissance de ces problèmes peut servir grandement en quelque occasion, je ne veux employer que le témoignage d'Hégésippus au troisième livre de la prise de Jérusalem. Là il rapporte la mémorable histoire de Josèphe, ce fameux auteur qui nous a laissé par écrit la même guerre des Juifs, lequel était gouverneur dans la ville de Iotapata, lorsqu'elle fut assiégée et peu après emportée d'assaut par Vespasian. Il fut contraint de se retirer dans une citerne, suivi d'une troupe de soldats, pour éviter la première fureur des armes victorieuses des Romains ; mais il courut plus de fortune de perdre la vie parmi les siens que parmi les ennemis : car comme il eut arrêté de s'aller rendre à la merci du vainqueur, ne pouvant imaginer aucun autre moyen de se garantir de la mort, il treuva ses soldats saisis d'une telle frénésie qu'ils voulaient tous mourir et s'entre-tuer les uns les autres plutôt que de prendre ce parti. Josèphe s'efforça bien de les détourner d'une si malheureuse entreprise, mais ce fut en vain; car rejetant tout ce qu'il put leur alléguer au contraire, et persistant en leur opinion, ils en vinrent jusque-là que de le menacer, s'il ne s'y portait volontairement, de l'y contraindre par force, et de commencer par lui-même l'exécution de leur tragique dessein. Alors sans doute c'était fait de sa vie s'il n'eût eu l'esprit de se défaire de ces hommes furieux par l'artifice de mon XXIIIième problème. Car feignant d'adhérer à leur volonté, il se conserva l'autorité qu'il avait sur eux, et par ce moyen leur persuada facilement que pour éviter le désordre et la confusion qui pourraient survenir en tel acte, s'ils s'entre-tuaient à la foule, il valait mieux se ranger par ordre en quelque façon, et, commençant à compter par un bout, massacrer toujours le .tantième (l'auteur n'exprime pas le quantième), jusqu'à ce qu'il n'en demeurât qu'un seul, lequel serait obligé de se tuer soi-même. Tous étant de cet accord, Josèphe les disposa de sorte, et choisit pour lui une si bonne place, que la tuerie étant continuée jusqu'à la fin, il se trouva seul en vie, ou peut-être encore qu'il sauva quelques-uns de ses plus affidés, et de ceux desquels il se pouvait promettre une entière et parfaite obéissance (*a*). Voilà une histoire bien remarquable, et qui nous apprend assez qu'on ne doit point mépriser ces petites subtilités, qui aiguisent l'esprit, habilitent l'homme à de plus grandes choses, et apportent quelquefois une utilité non prévue.

Reste que j'avertisse le lecteur que cette seconde édition est beaucoup plus accomplie que la première : car outre qu'elle est

(*a*) Josèphe, qui raconte fort longuement l'histoire de la caverne, termine en disant: Or il advint, plus par providence de Dieu que par fortune, que Josèphe demeura le dernier avec un autre. (A. L.)

plus correcte, elle est augmentée de plusieurs problèmes, et de la démonstration parfaite du problème qui était le cinquième en la première édition et qui est le sixième en cette-ci. A cet effet, j'ai tiré une dizaine de propositions de mes Éléments arithmétiques pour les rapporter ici, considérant que je ne pouvais pas si promptement mettre en lumière ce livre-là des Eléments, et que néanmoins je ne devais pas souffrir que ce petit ouvrage demeurât si longtemps imparfait.

Quant à ce qui est requis pour la parfaite intelligence et pour la pratique de ces problèmes, je puis assurer que tout homme de bon esprit en pourra comprendre et pratiquer la plus grande part. Il est vrai qu'il y en a quelques-uns qui ne pourront parfaitement être mis en pratique que par ceux qui savent les premières règles de l'arithmétique. Pour les démonstrations, elles sont pour les plus doctes, car elles supposent la connaissance du septième, huitième et neuvième livre d'Euclide, et encore quelques propositions du second appliquées aux nombres, et quelques définitions et propositions du cinquième.

Enfin j'admoneste ceux qui voudront mettre ces jeux en usage et en avoir du contentement, qu'ils prennent le soin de les faire avec une telle dextérité qu'on n'en puisse pas aisément découvrir l'artifice; car ce qui ravit les esprits des hommes, c'est un effet admirable dont la cause leur est inconnue. C'est pourquoi, si l'on fait plusieurs fois de suite le même jeu, il faut toujours y apporter quelque diversité, le faisant en différentes façons, ainsi que j'enseigne aux avertissements que je donne après les démonstrations, qui pour cette cause doivent être lus diligemment et bien considérés.

PRÉFACE

DE LA TROISIÈME ÉDITION.

Les *Problèmes plaisants et délectables* parurent pour la première fois en 1612, et furent réimprimés en 1624 avec de nombreuses augmentations. Sous un titre léger, Bachet de Méziriac avait fait un ouvrage sérieux, trop élevé sans doute pour les ignorants qui s'accommodaient mieux de la *Récréation mathématique, imprimée au Pont-à-Mousson*, mais fort intéressant pour ceux dont la curiosité n'est satisfaite que quand ils ont vu clairement la liaison qui existe entre l'effet et la cause qui le produit.

Le livre de Bachet est toujours fort estimé et recherché des connaisseurs; mais il est devenu si rare qu'il nous a fallu dix ans pour en trouver un exemplaire de la seconde édition; aussi avons-nous pensé que les bibliophiles feraient bon accueil à une nouvelle édition de ce curieux volume.

Toutefois, dans cette réimpression, nous avons fait quelques modifications au travail de l'auteur; elles portent principalement sur les démonstrations qui sont prolixes ou conçues dans un ordre d'idées auquel l'esprit du lecteur, même instruit, se plierait difficilement.

En outre, Bachet a donné quelques démonstrations qui se sentent trop de la simplicité du cas qu'il examine, et il lui est arrivé quelquefois de ne rien démontrer, soit que la démonstration lui parût trop difficile ou trop longue, ou bien qu'il n'en eût aucune à donner ; nous avons suppléé à l'insuffisance des unes et à l'absence des autres.

Les mêmes raisons nous ont fait modifier les 26 propositions qui servaient d'introduction aux problèmes. Nous avons en outre supprimé toutes les propositions d'arithmétique élémentaire que le lecteur est supposé connaître, et nous en avons ajouté d'autres sans lesquelles on ne pourrait pas se rendre compte de certaines solutions.

Ces propositions préliminaires occupant 52 pages dans l'ouvrage de Bachet, formaient une introduction qui était loin d'être *plaisante et délectable ;* nous avons pensé qu'il était mieux de les placer à la fin du livre sous forme de notes : les deux premières comprennent, avec de nouvelles démonstrations, les propositions de Bachet que nous avons cru devoir conserver ; les deux autres renferment les additions que nous y avons faites.

Nous avons conservé du texte de l'auteur tout ce qu'il a été possible : nous avons reproduit la dédicace, la préface, les énoncés, la plupart des explications, et presque tous les avertissements, à quelques mots près ; toutefois nous n'avons pas cru devoir conserver l'orthographe de l'auteur ; mais son style suffira pour faire reconnaître ce qui est resté de la rédaction primitive dans cette nouvelle édition.

Rien d'essentiel n'a été supprimé, et de nombreuses additions ont été faites aux problèmes, les unes dans les solutions, les autres dans des articles séparés mis à la suite des problèmes auxquels elles se rapportent. On remarquera en particulier l'addition au problème des carrés magiques ; malgré le développement que nous lui avons donné, nous n'avons pu examiner que quelques cas particuliers de la question ; mais on reconnaîtra que nous avons développé les solutions les plus intéressantes. Bachet affirmait qu'il fallait deux règles différentes pour construire les carrés pairs, suivant qu'ils sont pairement pairs ou pairement impairs ; c'est une erreur (qui a été souvent reproduite) : nous le prouvons en donnant une règle générale pour la construction de tous les carrés pairs.

Nous avons réuni dans un supplément les additions qui ne pouvaient pas être réparties dans le corps de l'ouvrage.

Nous recevrons avec reconnaissance les observations critiques qui pourraient contribuer au perfectionnement de ce petit ouvrage, ainsi que les communications relatives à de nouveaux problèmes *plaisants et délectables.*

NOTATION

Pour exprimer un multiple d'un nombre nous mettrons un point au-dessus de ce nombre : ainsi, $\dot{9}$ signifie un multiple de 9, $\dot{\overline{327}}$ un multiple de 327, $\dot{\overline{ac}}$ un multiple de ac. Il en sera de même pour exprimer un multiple de plusieurs nombres, ces nombres étant alors séparés les uns des autres par des virgules, comme $\dot{\overline{a,c,}}$ qui signifie un multiple commun aux deux nombres a et c.

PROBLÈMES

PLAISANTS ET DÉLECTABLES.

PROBLÈME I

Deviner le nombre que quelqu'un aura pensé.

Premièrement fais tripler le nombre pensé, et par après prendre la moitié du produit, s'il se peut faire sans fraction; et s'il ne se peut faire autrement, fais-y ajouter 1, puis prendre la moitié de tout, laquelle moitié fais derechef tripler, et demande combien de fois il y a 9 en ce dernier triple. Lors pour chaque 9 prends 2, et tu devineras le nombre pensé. Prends garde seulement que s'il a fallu ajouter 1 pour prendre la moitié, il te faut aussi ajouter 1 au nombre que tu trouveras prenant 2 pour chaque 9.

Par exemple quelqu'un ait songé 6; qu'il le triple, viendra 18, qu'il en prenne la moitié, il aura 9; qu'il le triple viendra 27, où

9 est contenu 3 fois ; partant, tu prendras 3 fois 2, à savoir 6, pour le nombre pensé.

Or qu'on ait pensé 5 ; en le triplant viendra 15 à qui il faut ajouter 1 pour en prendre la moitié, et au lieu de 15 on aura 16 dont la moitié est 8, qui triplé derechef fait 24, où 9 est contenu 2 fois : partant prenant 2 fois 2, tu auras 4, auquel si tu ajoutes 1, à cause de l'*un* qu'il a fallu ajouter pour prendre la moitié, tu trouveras 5, le nombre pensé.

DÉMONSTRATION.

Si l'on a pensé un nombre pair $2n$, on a fait les opérations suivantes :

$$2n \times 3 = 6n, \quad 6n : 2 = 3n, \quad 3n \times 3 = 9n, \quad 9n : 9 = n,$$
$$2 \times n = 2n.$$

Si l'on a pensé un nombre impair $2n + 1$, on a opéré ainsi :

$$(2n+1) \times 3 = 6n+3, \; 6n+3+1 = 6n+4, \; (6n+4) : 2 = 3n+2,$$
$$(3n+2) \times 3 = 9n+6, \; (9n+6) : 9 = n, \; 2 \times n + 1 = 2n+1,$$

Donc en suivant la règle on retrouve le nombre pensé.

PROBLÈME II

Faire le même d'une autre sorte.

Fais tripler le nombre pensé, puis prendre la moitié du produit, ou si le nombre est impair, ajouter 1, puis prendre la moitié. Fais tripler derechef cette moitié, puis prendre la moitié de ce triple, ou ajouter 1, comme auparavant, si le nombre est impair, afin de le pouvoir partir en deux. Lors demande combien de fois il y a 9 en la dernière moitié, et pour chaque 9 prends 4, remarquant que si la division ne se peut faire la première fois sans ajouter 1, il te convient aussi retenir 1, et si la division ne se peut faire la seconde fois, il te convient retenir 2 ; par conséquent si toutes les deux fois la division ne se peut faire, il te faut retenir 3.

Par exemple, si l'on avait pensé 7, le faisant tripler viendra 21, auquel il faut ajouter 1 pour prendre la moitié qui est 11, dont le triple est 33, auquel aussi ajoutant 1 et prenant la moitié, vient 17, auquel 9 est contenu une fois seulement ; partant tu prendras une fois 4 auquel tu ajouteras 3, à cause que la division ne s'est pu faire ni la première ni la seconde fois, et tu auras 7, le nombre pensé.

DÉMONSTRATION

Tout nombre est de l'une des formes

$$4n,\ 4n+1,\ 4n+2,\ 3n+3.$$

Voici les opérations qu'on a faites dans ces différents cas.

Pour le nombre $4n$.

$$4n\times 3=12n,\ 12n:2=6n,\ 6n\times 3=18n,$$
$$18n:2=9n,\ 9n:9=n,\ 4\times n=4n.$$

Pour le nombre $4n+1$.

$$(4n+1)\times 3=12n+3,\quad 12n+3+1=12n+4,$$
$$(12n+4):2=6n+2,\quad (6n+2)\times 3=18n+6,$$
$$(18n+6):2=9n+3,\quad (9n+3):9=n,$$
$$4\times n+1=4n+1.$$

Pour le nombre $4n+2$.

$$(4n+2)\times 3=12n+6,\ (12n+6):2=6n+3,$$
$$(6n+3)\times 3=18n+9,\ 18n+9+1=18n+10,$$
$$(18n+10):2=9n+5,\quad (9n+5):9=n,$$
$$4\times n+2=4n+2.$$

Pour le nombre $4n+3$.

$$(4n+3)\times 3=12n+9,\quad 12n+9+1=12n+10,$$
$$(12n+10):2=6n+5,\quad (6n+5)\times 3=18n+15,$$
$$18n+15+1=18n+16,\ (18n+16):2=9n+8,$$
$$(9n+8):9=n,\qquad 4\times n+3=4n+3.$$

Donc en suivant la règle on retrouve le nombre pensé.

On peut aussi faire ainsi ce problème. Fais ajouter au nombre pensé la moitié du même nombre, et à cette somme fais ajouter derechef la moitié de la même somme; puis demande combien de fois il y a 9, et prends 4 pour chaque 9, comme devant; mais aussi prends garde que si le nombre pensé n'a point d'entière moitié, il faut faire ajouter 1 et prendre la moitié de ce nombre, et l'ajouter au nombre pensé; que si le même advient la seconde fois, il faut aussi faire le même, et pour la première fois retenir 1, pour la seconde 2, pour toutes deux ensemble 3, comme auparavant.

Par exemple si l'on avait pensé 10, lui ajoutant sa moitié vient 15 auquel faut ajouter 1 pour avoir la moitié 8, qui ajoutée à 15 fait 23, auquel 9 est contenu 2 fois; partant prenant 2 fois 4 tu auras 8, auquel ajoutant 2, à cause que la seconde fois il a fallu ajouter 1 pour prendre la moitié, tu auras 10, le nombre pense

Quelques-uns encore pratiquent autrement ce problème. Ils font ajouter au nombre sa moitié ou bien (s'il est impair) sa plus grande moitié (car d'autant que tout nombre impair se peut diviser en deux nombres dont l'un surpasse l'autre de l'unité, ils appellent le plus grand la plus grande moitié du nombre impair); et semblablement à cette somme ils font ajouter sa moitié ou sa plus grande moitié; puis demandent combien de fois il y a 9, et pour chaque 9 prennent 4; mais ils demandent encore si après avoir ôté tous les 9 de la dernière somme, on en peut ôter encore 8, et si cela est ils retiennent 3; que si 8 ne se peut ôter, ils demandent si l'on en peut ôter 5, et pour cela retiennent 2; que si 5 ne s'en peut ôter, ils en font ôter 3 et pour cela retiennent 1.

Il est aisé de montrer que ces deux autres façons de faire ce jeu reviennent à la première, et ont les mêmes fondements. Car quant à la seconde, comme tripler un nombre et prendre la moitié du produit, c'est autant que multiplier ledit nombre par $1\frac{1}{2}$, c'est donc aussi autant que lui ajouter sa moitié ; partant, si à cette somme nous ajoutons derechef sa moitié, c'est autant que si nous la multiplions encore par $1\frac{1}{2}$..... On voit facilement par la démonstration qui a été faite de la première manière que les deux autres ne font que reproduire les mêmes calculs; et que suivant qu'un nombre est de la forme $4n+3$ ou $4n+2$ ou $4n+1$, il reste 8, 5 ou 3, quand on a retranché les 9 de la dernière somme.

AVERTISSEMENT.

Quiconque comprendra parfaitement la démonstration de ces deux problèmes, il lui sera facile de forger des règles nouvelles pour deviner le nombre pensé à l'imitation des précédentes. Car, par exemple, fais tripler le nombre pensé, puis prendre la moitié du produit, puis multiplier ladite moitié par 5 et prendre encore la moitié du produit : tu devineras le nombre pensé si tu demandes combien de fois il y a 15 en la dernière moitié, et si pour chaque 15 tu prends 4, observant comme ci-dessus qu'il faut retenir 1 ou 2 ou 3, selon que la division ne se peut parfaire la première ou la seconde fois ou toutes les deux ensemble.

Je te laisse à en faire la démonstration, ce qui est chose aisée ; et tu trouveras que si le nombre pensé surpasse de 1 quelque nombre pairement pair (*a*), outre les 15 contenus en la dernière

(*a*) Un nombre est dit *pairement pair* quand il est divisible par 4, et il est dit *pairement impair* quand il est divisible par 2 sans l'être par 4.

moitié il y aura encore 5 ; et si le nombre pensé surpasse de 2 quelque pairement pair, à la fin il restera 8; et si le nombre pensé surpasse de 3 quelque pairement pair, il restera 13 à la fin. Partant, si tu veux imiter la seconde ou troisième façon de parfaire ce problème, tu feras ajouter au nombre pensé sa moitié ou sa plus grande moitié; puis à cette somme tu feras ajouter un nombre égal à elle-même, et encore de plus la moitié ou plus grande moitié de la même somme (cela est autant que la multiplier par 5 et diviser le produit par 2); puis tu demanderas combien de fois il y a 15, et pour chaque 15 tu prendras 4, retenant 1 ou 2 ou 3, selon que la division ne se pourra parfaire la première ou la seconde fois ou toutes deux ensemble. Ou bien après avoir fait ôter les 15 de la dernière somme, tu demanderas s'il reste encore 13 ou 8 ou 5, et retiendras pour cela ou 3 ou 2 ou 1.

Cette même règle se peut changer en faisant multiplier d'abord le nombre pensé par 5, puis partir par deux, puis multiplier par 3, puis partir par 2. Mais si le nombre pensé passe de 1 quelque pairement pair, la partition ne se pourra faire sans fraction ni la première ni la seconde fois; et si le nombre pensé passe de 3 quelque pairement pair, la partition ne se pourra faire la première fois seulement. Partant, en tel cas il faut changer la règle; et si la partition ne se peut faire la première fois seulement, retenir 3; si elle ne se peut faire la seconde fois seulement, retenir 2: si elle ne se peut faire toutes les deux fois, retenir 1. Tous les 15 étant ôtés du dernier nombre, il reste 12 dans le premier cas, 8 dans le second et 5 dans le troisième.

On pourrait aussi faire multiplier par 5, puis partir par 2, et derechef multiplier par 5 et partir par 2, et demander combien de fois il y a 25, et pour chaque 25 retenir 4 ; et ainsi de plusieurs autres manières. Prends garde seulement qu'en cette dernière façon il advient ce que je viens de dire, à savoir que si la partition ne se fait juste toutes les deux fois, il faut retenir 1 ; si elle ne se peut faire juste la seconde fois, il faut retenir 2 ; si elle ne se peut faire la première fois, il faut retenir 3.

La cause de tout ceci n'est pas malaisée à trouver. J'en laisse la recherche au curieux lecteur, qui suivant le chemin que je lui ai tracé, et se fondant sur les mêmes principes et propositions, en pourra venir facilement à bout.

PROBLÈME III

Deviner le nombre pensé d'une autre façon.

Fais tripler le nombre pensé, puis prendre la moitié du produit, et tripler derechef cette moitié, puis prendre la moitié de ce triple, tout de même qu'au problème précédent, faisant aussi ajouter 1, lorsque la partition ne se peut pas faire. Mais au lieu de demander combien de fois il y a 9 en la dernière moitié, demande qu'on te déclare toutes les figures avec lesquelles ladite moitié s'exprime, excepté une, pourvu que celle qu'on te cache ne soit point un zéro, et qu'on te die l'ordre desdites figures, tant de celles qu'on te manifeste que de celle qu'on cache. Lors tu devineras le nombre pensé, ajoutant ensemble toutes les figures qu'on te manifeste, et rejetant 9 tant de fois qu'il sera possible, puis soustraisant cette somme, ou ce qui reste ayant rejeté tous les 9, du même nombre 9; car le reste sera la figure cachée, ou s'il ne reste rien, ladite figure cachée sera 9, au cas néanmoins que les deux partitions se soient faites justement sans l'addition de l'unité. Que si la partition n'a pas été faite juste la première fois, alors à la somme des figures manifestées tu ajouteras 6, et parfairas le demeurant ainsi qu'il a été dit. Si la partition n'a pas été juste la seconde fois, tu ajouteras 4 à ladite somme. Si la partition n'a pas été juste toutes les deux fois, tu ajouteras 1 à la même somme. Ainsi donc ayant treuvé la figure cachée tu auras entièrement connaissance de la dernière moitié; et partant considérant combien de fois il y a 9, et prenant 4 pour chaque 9, et ajoutant 1 ou 2 ou 3, selon qu'il sera de besoin, en la même façon qu'au problème précédent, tu devineras infailliblement le nombre pensé.

Par exemple, qu'on ait pensé 24 : après avoir triplé et partagé par deux fois, la dernière moitié sera 54. Partant si on te manifeste la première figure 5, tu ne feras que soustraire 5 de 9, et le reste 4 sera la seconde figure cachée; et si on te manifeste 4, ôtant 4 de 9 tu trouveras 5 la première figure. Ainsi tu connaîtras que la dernière moitié était 54, où 9 est contenu 6 fois, et partant prenant 6 fois 4 tu devineras que le nombre pensé était 24.

Que si l'on pense 25, après avoir triplé et partagé par deux fois, la dernière moitié sera 57; mais la partition n'a pas été juste la première fois. Partant si l'on te manifeste la première figure 5, tu lui ajouteras 6, et de la somme 11 tu ôteras 9, restera 2 que tu ôteras de 9, et le reste 7 sera la seconde figure cachée. Ainsi tu sauras que la dernière moitié est 57, où 9 est contenu 6 fois, et prenant 4 pour chaque 9 et ajoutant 1, à cause de la première partition imparfaite, tu trouveras le nombre pensé.

Que si l'on te dit qu'en la dernière moitié il y a trois figures et que les deux dernières sont 13, et que la partition n'a pas été juste la seconde fois, tu ajouteras ensemble 1 et 3, et à la somme 4 tu ajouteras 4, ce qui fait 8, tu ôteras 8 de 9, reste 1 pour la première figure cachée. Donc la dernière moitié était 113, où 9 est contenu 12 fois, et multipliant 12 par 4 vient 48 auquel ajoutant 2, à cause de la seconde partition imparfaite, tu auras 50, le nombre pensé.

Finalement si en la dernière moitié il y a trois figures dont la première soit 1, la dernière 7, et que toutes deux les partitions n'aient pas été justes, tu ajouteras les deux figures connues ensemble, qui font 8, et à 8 tu ajouteras 1 selon la règle, ce qui fait 9, qui ôté de 9 ne laisse rien. Partant la seconde figure cachée est 9, et la dernière moitié entière est 197, où 9 est contenu 21 fois; donc multipliant 21 par 4, et au produit 84 ajoutant 3, à cause des deux partitions imparfaites, tu trouveras le nombre pensé 87.

DÉMONSTRATION.

En se reportant à la démonstration du problème 11, on voit que pour un nombre $4n$ le résultat du calcul actuel est $9n$, c'est-à-dire un multiple de 9; la somme des chiffres doit donc être un multiple de 9; par conséquent le chiffre caché est ce qui manque à la somme des autres pour faire un multiple de 9; et si cette dernière est elle-même un multiple de 9, c'est que le chiffre caché est 9, puisqu'on sait que ce n'est pas zéro.

Pour un nombre $4n+1$ le résultat du calcul actuel est $9n+3$; en y ajoutant 6, on a un multiple de 9; il doit en être de même de la somme de ses chiffres.

Pour un nombre $4n+2$, le résultat du calcul actuel est $9n+5$; en y ajoutant 4, on a un multiple de 9; il doit en être de même de la somme de ses chiffres.

Enfin, pour un nombre $4n + 3$, le résultat du calcul actuel est $9n + 8$; en y ajoutant 1, on a un multiple de 9 ; il doit en être de même de la somme de ses chiffres.

La règle est donc justifiée dans tous les cas.

PROBLÈME IV

Faire le même encore diversement.

Fais doubler le nombre pensé et à ce double fais ajouter 5, puis multiplier le tout par 5, puis ajouter 10 et multiplier le tout par 10. Lors t'enquérant quel est ce dernier produit, et en ôtant d'icelui 350, le nombre des centaines du reste sera le nombre pensé.

Par exemple, qu'on ait pensé 3, son double est 6, auquel ajoutant 5 vient 11, qui multiplié par 5 fait 55, auquel ajoutant 10 provient 65, qui multiplié par 10 produit 650, duquel si tu ôtes 350 restera 300, où tu vois clairement que le nombre des centaines, à savoir 3, est le nombre pensé.

DÉMONSTRATION.

En exécutant sur un nombre quelconque n les opérations prescrites par la règle, on a :

$$n \times 2 + 5 = 2n + 5,\ (2n + 5) \times 5 = 10n + 25,$$
$$10n + 25 + 10 = 10n + 35,\ (10n + 35) \times 10 = 100n + 350,$$
$$100n + 350 - 350 = 100n,\ 100n : 100 = n,$$

ce qui prouve l'exactitude de la règle.

AVERTISSEMENT.

Si tu considères bien les fondements de cette démonstration, tu comprendras aisément le moyen de diversifier la pratique de ce problème en cent mille façons : car premièrement si tu veux toujours que le nombre des centaines exprime le nombre pensé, et que les multiplications se fassent par 2, par 5 et par 10, comme auparavant, mais seulement que le nombre qui se soustrait de la dernière somme, à savoir 350, soit changé; prends garde que 350 est provenu du 5 qu'on a ajouté du commencement, lequel multiplié par 5 a fait 25 auquel ajoutant 10 est provenu 35 qui finalement multiplié par 10 a produit 350. Donc si tu veux changer 350, change les nombres que tu fais ajouter, par exemple au lieu de 5 fais ajouter 4, et 12 au lieu de 10, ou bien tels autres nombres qu'il te plaira, et lors pour savoir quel autre nombre il faut soustraire, multiplie le premier, 4, par 5, viendra 20, auquel ajoute 12, viendra 32, qui multiplié par 10 fera 320, le nombre qu'il conviendra soustraire de la dernière somme; et ainsi si tu changes encore les 4 et 12, tu changeras aussi le 320. Partant déjà par ce moyen le problème se peut parfaire en infinies sortes différentes.

Secondement voulant encore que le nombre des centaines montre le nombre pensé, tu peux toutefois changer les multiplicateurs, car le nombre pensé est multiplié par 100 pource que les trois multiplicateurs 2, 5 et 10, dont nous nous sommes servis, multipliés ensemble font 100. Donc pourvu que tu prennes pour multiplicateurs des nombres qui multipliés ensemble fassent 100, il n'importe quels ils soient. Partant premièrement tu te peux servir des mêmes 2, 5 et 10 en changeant l'ordre seulement, comme faisant en premier lieu multiplier par 5, puis par 10, puis par 2, ou bien premièrement par 10, puis par 2, et enfin par 5, ou autrement.

En après tu peux prendre d'autres nombres qui fassent le même effet, comme 5, 4, 5, ou bien 2, 25, 2; seulement prends garde qu'en tous ces changements le nombre qu'il faut soustraire à la fin change aussi, selon la diversité des multiplicateurs et des nombres qu'on fait ajouter. Par exemple, prends 5, 4, 5 pour multiplicateurs, et pour nombres à ajouter 6 et 9, et soit le nombre pensé 8. Qu'on le multiplie par 5 vient 40, auquel ajoutant 6 viendra $40+6$, qui multiplié par 4 fait $160+24$, auquel ajoutant 9 viendra $160+33$, qui multiplié par 5 donnera $800+165$, par où l'on voit qu'ôtant 165, il reste 800, où le nombre des centaines est le nombre pensé.

Troisièmement tu peux prendre tout autre nombre que 100, et faire qu'il soit contenu au restant de la soustraction autant de fois qu'il y aura d'unités au nombre pensé; et pour ce faire il ne faut que choisir pour multiplicateurs des nombres qui multipliés ensemble fassent le nombre que tu veux. Comme si tu veux prendre 24, choisis pour multiplicateurs 2, 3, 4, ou bien 2, 6, 2. Par exemple, prenons pour multiplicateurs 2, 3, 4, et pour nombres à ajouter 7 et 8; et soit le nombre pensé 5 qui doublé fera 10, à qui ajoutant 7 vient $10+7$, qui multiplié par 3 fait $30+21$, à qui ajoutant 8 provient $30+29$, qui multiplié par 4 fait $120+116$; ainsi ôtant 116 restera 120 où tu vois que 24 est contenu 5 fois, et par là tu juges que le nombre pensé était 5.

Tu peux aussi ne prendre que deux multiplicateurs et n'ajouter qu'un nombre; comme si tu voulais que le nombre des dizaines exprimât le nombre pensé, prends 2 et 5 pour multiplicateurs et

6 pour nombre à ajouter, et soit par exemple le nombre pensé 7, qui doublé fera 14 auquel ajoutant 6 viendra 14+6, qui multiplié par 5 produira 70+30, dont il faut ôter 30 pour que le reste 70 contienne autant de dizaines qu'il y a d'unités au nombre pensé. Semblablement on pourrait prendre quatre, cinq, ou six, ou plusieurs multiplicateurs, et ajouter davantage de nombres, comme je laisse considérer au prudent lecteur.

Finalement on peut diversifier la pratique de ce problème usant de soustraction au lieu d'addition, et par conséquent à la fin usant d'addition au lieu de soustraction. Comme si tu te veux servir des nombres donnés au premier exemple, soit 12 le nombre pensé; fais-le doubler, viendra 24, d'où fais ôter 5 viendra 24 — 5, qui multiplié par 5 fera 120—25, d'où fais ôter 10 restera 120—35, qui multiplié par 10 produira 1200—350; mais maintenant il faut ajouter 350 au lieu de le soustraire, et la somme sera 1200 où le nombre des centaines exprime le nombre pensé 12.

PROBLÈME V

Deviner encore le nombre pensé d'une autre sorte.

Cette façon semble plus ingénieuse que les autres, bien que la démonstration en soit plus aisée.

Fais multiplier le nombre pensé par quel nombre que tu voudras, puis diviser le produit par quel autre que tu voudras, puis multiplier le quotient par quelque autre, et derechef multiplier ou diviser par un autre, et ainsi tant que tu voudras. Voire même, s'il te plaît, remets cela à la volonté de celui qui aura songé le nombre, pourvu qu'il te die toujours par quels nombres il multiplie et par quels il divise. Mais pour deviner le nombre pensé, prends en même temps quelque nombre à plaisir et fais sur lui secrètement toutes les mêmes multiplications et divisions, et lorsqu'il te plaira d'arrêter, dis à celui qui a songé le nombre qu'il divise le dernier nombre qui lui reste par le nombre pensé; toi semblablement divise ton dernier nombre par le premier que tu auras pris, et sois assuré que le quotient de ta division sera le même que le quotient de la sienne. Partant, fais ajouter à ce quotient le nombre pensé et demande qu'il te déclare cette somme; alors ôtant d'icelle le quotient connu, tu sauras infailliblement que le reste c'est le nombre pensé.

Par exemple, soit le nombre pensé 5 : fais-le multiplier par 4, viendra 20; fais-le diviser par 2 viendra 10; fais-le multiplier par 6, viendra 60; fais-le diviser par 4, viendra 15; et ainsi fais multiplier et diviser tant qu'il te plaira, mais en même temps choisis quelque nombre, et fais sur lui toutes les mêmes opérations. Par exemple, prends 4 (il vaudrait mieux prendre 1) qui multiplié par 4 fait 16, qui divisé par 2 fait 8, qui multiplié par 6 fait 48, qui divisé par 4 donne 12. Lors, si tu te veux arrêter là, dis à celui qui a songé le nombre qu'il divise son dernier nombre, à savoir 15, par le nombre pensé 5; le quotient sera 3, et tu vois bien aussi que tu auras le même quotient si tu divises ton dernier nombre 12 par le premier que tu avais pris qui est 4. Partant dès maintenant tu peux faire un assez plaisant jeu devinant le quotient de cette dernière division, chose qui semblera bien admirable à ceux qui en ignoreront la cause. Que si tu veux avoir le nombre pensé, sans faire semblant de savoir ce dernier quotient, fais ajouter ledit nombre pensé audit dernier quotient, et demande la somme de cette addition, qui est 8 en l'exemple donné, d'où si tu soustrais le quotient connu, à savoir 3, te restera infailliblement le nombre pensé 5.

DÉMONSTRATION.

Lorsqu'on fait sur un nombre n une suite de multiplications et de divisions, on obtient un résultat de la forme $n\frac{abc..}{gh..}$; en exécutant les mêmes opérations sur un nombre p, on a $p\frac{abc..}{gh..}$; donc ces deux résultats divisés l'un par n, l'autre par p donnent le même nombre $\frac{abc..}{gh..}$; par conséquent, connaissant le nombre $\frac{abc..}{gh..}$, si l'on se fait donner le nombre $\frac{abc..}{gh..} + n$, il suffira d'en retrancher $\frac{abc..}{gh..}$ pour connaître n.

AVERTISSEMENT.

On peut changer infiniment la pratique de ce problème, d'autant qu'on peut faire multiplier et diviser par divers nombres tels que l'on veut, et n'importe que l'on fasse multiplier, puis diviser alternativement, ou que l'on fasse multiplier deux ou trois fois de suite, puis diviser semblablement. L'on peut aussi, ayant connu le dernier quotient, user de soustraction au lieu d'addition, si le nombre pensé se trouve moindre qu'icelui quotient. Comme en l'exemple donné, si l'on se fût arrêté après avoir multiplié par 6, le dernier nombre d'un côté eût été 60, de l'autre 48. Partant faisant diviser 60 par le nombre pensé 5, le quotient est 12 qui te viendra pareillement divisant 48 par 4 pris du commencement. Partant si du quotient 12 tu fais soustraire le nombre pensé, demandant combien il reste, on te répondra qu'il reste 7. Donc il est certain que si tu soustrais 7 du quotient connu 12, le reste 5 est le nombre pensé. L'on peut aussi à ce dernier quotient connu faire ajouter, ou soustraire d'icelui, non tout le nombre pensé, mais quelque partie d'icelui, comme la moitié, le tiers, le quart, ou quelque autre; car, connaissant la partie d'un nombre, il n'est pas malaisé de connaître tout le nombre.

PROBLÈME VI

Faire encore le même d'une autre façon

Cette façon est la plus difficile à pratiquer de toutes, et la démonstration en est assez cachée.

Prends deux ou trois, ou plusieurs nombres premiers entre eux, de telle sorte que chacun d'iceux soit premier à chacun des autres, comme sont ces trois 3, 4, 5, et cherche le moindre nombre qui est mesuré par iceux, qui en l'exemple donné est 60 (c'est toujours leur produit). Lors dis à celui qui doit penser le nombre qu'il en pense quelqu'un qui ne passe point 60; et mets peine de treuver un nombre qui étant mesuré par 3 et 4 surpasse de l'unité quelque multiple de 5 (note 11) lequel est 36; semblablement treuve un nombre qui étant mesuré par 3 et 5 surpasse de l'unité quelque multiple de 4, lequel est 45; finalement cherche un nombre qui étant mesuré par 4 et 5 surpasse de l'unité quelque multiple de 3, lequel est 40. Ayant ces trois nombres, fais ôter 3 tant de fois qu'on pourra du nombre pensé, et qu'on te dise ce qui reste, et pour autant d'unités qu'il restera prends autant de fois 40. Semblablement fais ôter 4 tant qu'on pourra du nombre pensé, et demandant le reste, pour chaque unité restante retiens 45 ; finalement fais aussi ôter tous les 5 du nombre pensé, et pour chaque unité qui restera retiens 36. Puis ajoute ensemble tous les nombres que tu as retenus, et si la somme est moindre que 60 elle sera égale au nombre pensé ; mais si elle passe 60, ôtant d'icelle 60 tant de fois que tu pourras, le reste sera le nombre pensé.

Par exemple, qu'on ait songé 19 : en ôtant tous les 3 d'icelui reste 1, pour lequel tu retiendras une fois 40 ; en ôtant tous les 4 reste 3, partant tu retiendras 3 fois 45, à savoir 135 ; en ôtant tous les 5 reste 4, partant tu retiendras 4 fois 36, à savoir 144. Or ajoute ensemble 40, 135 et 144, la somme sera 319, d'où si tu ôtes 60 tant de fois qu'on le peut ôter, il restera 19, le nombre pensé. Que si ôtant tous les 3, tous les 4 et tous les 5, il ne restait jamais rien, le nombre pensé serait infailliblement 60.

Le problème se peut parfaire également avec quatre, cinq, six, ou plusieurs nombres premiers entre eux en la manière exposée. Soient les quatre nombres choisis 2, 3, 5, 7. Alors le nombre duquel il ne faudra pas en penser un plus grand sera 210, qui est celui qui se fait multipliant ensemble tous les 4 nombres choisis; et pour chaque unité qui restera ôtant tous les 2, il faudra retenir 105 (multiple de 3, 5, 7, qui surpasse d'une unité un multiple de 2); pour chaque unité restante ôtant tous les 3, il faudra retenir 70 (multiple de 2, 5, 7, qui surpasse d'une unité un multiple de 3) ; pour chaque unité restante ôtant tous les 5, il faudra retenir 126 (multiple de 2, 3, 7, qui surpasse d'une unité un multiple de 5); et pour chaque unité restante tous les 7 ôtés, il faudra retenir 120 (multiple de 2, 3, 5, qui surpasse d'une unité un multiple de 7). Puis ajoutant ensemble les nombres retenus, leur somme sera égale au nombre pensé, sinon qu'elle surpasse 210, car alors il faudra ôter 210 d'icelle somme tant de fois qu'on pourra, et le reste sera le nombre pensé.

DÉMONSTRATION.

On a pris des nombres premiers entre eux deux à deux, a, b, c,..., et quelqu'un a pensé un nombre n qui ne surpasse pas leur produit $abc..$ lequel est leur plus petit commun multiple M ; puis on a divisé n alternativement par a, par b, par c,... ce qui a donné les restes α, β, γ.... Or on sait qu'il n'y a pas deux nombres moindres que M qui divisés par les nombres a, b, c,... donnent le même système de restes (note 1) ; donc le nombre n est déterminé par les restes α, β, γ.....; mais il y en a d'autres plus grands que M qui donnent les mêmes restes, ce sont les nombres

$$M+n,\quad 2M+n,\quad 3M+n,\dots \text{ (note 1)},$$

et ce sont les seuls. Or on a calculé les nombres

$$\dot{\overline{bc..}} = \dot{a}+1,$$

$$\dot{\overline{ac..}} = \dot{b}+1,$$

$$\dot{\overline{ab..}} = \dot{c}+1;$$

il en résulte

$$\alpha\,\dot{\overline{bc..}} = \dot{a}+\alpha,$$

$$\beta\,\dot{\overline{ac..}} = \dot{b}+\beta,$$

$$\gamma\,\dot{\overline{ab..}} = \dot{c}+\gamma;$$

et par suite la somme

$$\alpha\,\dot{\overline{bc..}} + \beta\,\dot{\overline{ac..}} + \gamma\,\dot{\overline{ab..}} + \dots$$

jouit de la propriété qu'étant divisée alternativement par a, par b, par c,... elle donne les restes α, β, γ,... ; cette somme est donc l'un des nombres n, $M+n$, $2M+n$,... ; c'est le nombre n si elle est moindre que M, et l'on voit que, dans le cas contraire, il suffit d'en retrancher M autant de fois que possible pour avoir n ; ce qui démontre la règle.

Remarque. Le calcul des quantités $\overline{\dot{b}c..}$, $\overline{\dot{a}c..}$,... est enseigné dans la note 11 ; mais comme dans les jeux arithmétiques les nombre a, b, c,.. sont de petits nombres, on peut résoudre la question rapidement de la manière suivante. Soit par exemple à trouver un multiple de 7 et 9 qui surpasse d'une unité un multiple de 11. Le premier multiple de 7 et 9 est 63 ; il est égal à un multiple de 11 plus 8 ; donc les multiples suivants sont des multiples de 11 augmentés successivement des multiples de 8 qu'on diminue d'ailleurs de 11 chaque fois qu'ils surpassent 11 ; on trouve ainsi les excès $8+8$ ou 5, $5+8$ ou 2, $2+8$ ou 10, $10+8$ ou 7, $7+8$ ou 4, $4+8$ ou 1.

Ainsi c'est le septième multiple de 63 ou 441 qui le premier est égal à un multiple de 11 plus 1.

Si l'on veut de même un multiple de 7 et 11 qui surpasse de l'unité un multiple de 9, comme le premier qui est 77 surpasse de 5 un multiple de 9, on conclut que le suivant 154 aura un excès de 10 ou 1 sur un multiple de 9.

Enfin, on trouve que le premier multiple de 9 et 11, qui est 99, surpasse de l'unité un multiple de 7.

PROBLÈME VII

Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensés.

Quelqu'un ait songé plusieurs nombres, et premièrement que la multitude d'iceux soit un nombre impair, c'est à savoir qu'il en ait songé trois ou cinq ou sept et cœtera. Dis-lui qu'il te déclare la somme du premier et du second joints ensemble, puis la somme du second et du troisième, puis celle du troisième et quatrième, puis celle du quatrième et cinquième, et ainsi toujours la somme des deux prochains, et finalement la somme du dernier et du premier. Alors prenant toutes ces sommes en même ordre qu'elles t'auront été données, ajoute ensemble toutes celles qui se treuveront ès lieux impairs, à savoir la première, troisième, cinquième, etc.; semblablement ajoute ensemble toutes celles qui se treuveront ès lieux pairs, à savoir la seconde, quatrième, sixième, etc., et soustrais la somme de celles-ci de la somme de celles-là : le reste sera le double du premier nombre pensé, lequel tu connaîtras en prenant la moitié de ce reste. Or un des nombres pensés étant treuvé tu auras aisément tous les autres, d'autant que tu connais les sommes qu'ils ont étant pris deux à deux.

DÉMONSTRATION.

Soient les nombres pensés a, b, c, d, e. On donne les sommes

$$\begin{array}{lcl} a+b & , & b+c \\ c+d & , & d+e. \\ e+a & & \end{array}$$

Les sommes de rang impair étant ajoutées donnent $a+b+c+d+e+a$;

et celles de rang pair,

$$b+c+d+e;$$

la différence entre les deux résultats est $2\,a$, dont la moitié fait connaître le premier nombre a; en le retranchant de la première somme on connaîtra b; en retranchant b de la seconde somme on connaîtra c; et ainsi de suite.

Que si la multitude des nombres pensés est un nombre pair, fais-toi comme auparavant déclarer la somme d'iceux pris deux à deux, mais à la fin ne demande pas la somme du dernier et du premier, ains celle du dernier et du second; en après ajoute ensemble toutes les sommes des lieux impairs, excepté la première, et d'autre côté ajoute ensemble toutes les sommes des lieux pairs, et de la somme de celles-ci soustrais la somme de celles-là, le reste sera le double du second nombre pensé.

DÉMONSTRATION.

Soient les nombres pensés a, b, c, d, e, f. On donne les sommes

$$\begin{array}{lcl} a+b & , & b+c \\ c+d & , & d+e \\ e+f & , & f+b \end{array}$$

Les sommes de rang impair étant ajoutées, excepté la première, donnent

$$c+d+e+f,$$

et les sommes de rang pair,

$$b+c+d+e+f+b;$$

la différence des deux résultats est $2b$, dont la moitié fait connaître le second nombre b. On trouve ensuite facilement chacun des autres nombres.

Il appert que cette facon de faire revient à la première, s'imaginant que le premier des nombres pensés soit ôté et ôtant semblablement la première somme.

AVERTISSEMENT.

On peut faire le même problème en plusieurs autres façons. Premièrement par la règle de deux fausses positions, ou par l'algèbre, comme je laisse juger à ceux qui sont capables d'en faire expérience.

Secondement en une autre sorte très-facile, qui est telle. Joins ensemble toutes les sommes données, et prends la moitié de cela, ce sera la somme de tous les nombres pensés, si la multitude d'iceux est nombre impair. Que si la multitude des nombres pensés est nombre pair, laisse la première somme et joins ensemble toutes les autres, et prends la moitié de cela : ce sera aussi la somme de tous les nombres pensés, excepté le premier. Or sachant la somme de tous les nombres pensés il est aisé de les deviner tous. Car soient les nombres pensés 2, 3, 4, 5, 6; les sommes seront 5, 7, 9, 11, 8, lesquelles jointes ensemble font 40, dont la moitié 20 est la somme juste de tous les nombres pensés, ce qui est évident, car ès sommes 5, 7, 9, 11, 8, il appert que chacun des nombres pensés est contenu deux fois. Partant si tu veux deviner le premier nombre, puisque tu sais que le second et le troisième font 7, et que le quatrième et cinquième font 11, ôtant 7 et 11 de la somme de tous (à savoir 20) il faut nécessairement que le reste 2 soit le premier nombre; et de la même façon tu trouveras tous les autres; ou bien te servant de celui que tu auras treuvé, tu trouveras les autres par son moyen comme auparavant. Que si la multitude des nombres est nombre pair, tu useras de semblable artifice, laissant la première somme, et la cause en est évidente par la démonstration donnée.

Troisièmement on peut procéder à la solution de ce problème d'une façon bien différente, qui est telle. Si quelqu'un a pensé trois nombres, fais-lui déclarer la somme d'iceux pris deux à deux, comme il a été dit. Mais s'il en a pensé quatre, fais-toi manifester la somme d'iceux pris trois à trois, en tant de façons qu'on les y peut prendre; et s'il en a pensé cinq, fais-les joindre quatre à quatre; et ainsi des autres. Alors pour deviner les nombres pensés tiens cette règle générale: Ajoute ensemble toutes les sommes qui te seront manifestées, et divise la somme d'icelles par un nombre moindre d'une unité que celui qui exprime la multitude des nombres pensés; le quotient sera la somme juste des nombres pensés, laquelle étant connue, c'est chose trop aisée de trouver tous lesdits nombres l'un après l'autre. Par exemple, qu'on ait songé ces quatre nombres 3, 5, 6, 8; la somme du premier, second et troisième fait 14; la somme du second, troisième et quatrième fait 19; la somme du troisième, quatrième et premier fait 17; la somme du quatrième, premier et second fait 16. Joins ensemble toutes ces sommes, tu auras 66, lequel si tu divises par 3 (qui est 1 moins que 4, exprimant la multitude des nombres pensés) tu auras 22 qui est la somme juste des nombres pensés. Partant si tu ôtes de 22 les sommes 14, 19, 17, 16 l'une après l'autre, tu trouveras tous les nombres pensés l'un après l'autre. La démonstration en est bien facile, car trois nombres se peuvent joindre 2 à 2 en trois façons, mais chacun d'iceux ne sera pris que 2 fois, d'autant qu'on en laisse toujours; un et quatre nombres se peuvent prendre 3 à 3 en quatre façons, mais chacun d'iceux ne sera pris que 3 fois pour la même raison; et ainsi des autres. Dont on peut facilement comprendre la cause de cette règle.

Remarque. Bachet traite ensuite longuement du cas où pour un nombre pair de nombres pensés on donnerait les sommes $a+b$, $b+c$, $c+d$,... $k+l$, $l+a$, la dernière étant $l+a$ au lieu de $l+b$, comme le prescrit la règle; et il montre par des exemples (3, 5, 6, 8), (1, 7, 4, 10), (2, 6, 5, 9), (4, 4, 7, 7), que le problème est indéterminé; mais il ne fait pas voir que la dernière équation est alors une conséquence des autres.

Or les équations étant

$$
\begin{aligned}
a+b&=p,\\
b+c&=q,\\
c+d&=r,\\
&\ldots\ldots\\
h+k&=t\\
k+l&=u,\\
l+a&=v,
\end{aligned}
$$

si on les ajoute, excepté la dernière, après les avoir multipliées alternativement par 1 et -1, on a

$$\begin{aligned} & a+b-b-c+c+d-\ldots-h-k+k+ \\ & =p-q+r-\ldots-t+u, \end{aligned}$$

équation dont le premier membre se réduit à $a+l$; donc on a moins d'équations que d'inconnues, et le problème est indéterminé.

PROBLÈME VIII

Deviner un nombre que quelqu'un aura en l'imagination sans lui rien demander.

Fais penser un nombre à quelqu'un, et dis-lui qu'il le multiplie par quel nombre que tu voudras, et au produit fais ajouter un certain nombre, tel qu'il te plaira, et fais aussi diviser cette somme par quel nombre qui te viendra en fantaisie. Alors divise aussi à part toi le nombre par qui tu as fait multiplier par celui par qui tu as fait diviser, et autant d'unités ou parties d'unités qu'il y aura en ce quotient, autant de fois fais ôter le nombre pensé du quotient qui est provenu à celui qui a songé le nombre; puis tu devineras aisément ce qui lui reste, sans lui rien demander; car ce reste sera toujours le quotient qui provient divisant le nombre que tu as fait ajouter après la multiplication par celui qui a servi de diviseur.

Par exemple, quelqu'un ait pensé 6 : fais-le multiplier par 4, viendra 24; à cela fais ajouter 15, la somme sera 39; fais la diviser par 3 le quotient sera 13. Or, divisant le multiplicateur 4 par le diviseur 3, il te provient $1\frac{1}{3}$; donc fais ôter du quotient 13 le nombre pensé une fois et encore le tiers d'icelui, à savoir 6 et encore 2 qui font 8, restera 5 qui est le nombre qui te proviendra divisant le nombre ajouté 15 par le diviseur 3.

Semblablement, s'il avait songé 8, fais-le multiplier par 6, viendra 48, fais-y ajouter 12 viendra 60, fais-le diviser par 4 viendra 15, et pour ce que divisant le multiplicateur par le diviseur provient 1 $\frac{1}{2}$, fais ôter de 15 une fois et demie le nombre pensé, à savoir 8 et 4 qui font 12 : tu devineras que le reste est 3 qui provient divisant le nombre ajouté 12 par le diviseur 4.

DÉMONSTRATION.

Les opérations qu'on fait ici exécuter sur un nombre n peuvent être représentées par $\frac{na+b}{c}$, expression qui revient à $n\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$; or on en fait retrancher $n\frac{a}{c}$, donc on sait qu'il doit rester $\frac{b}{c}$.

AVERTISSEMENT.

Ce jeu coutumièrement se pratique par plusieurs d'une façon trop particulière ; car ils font toujours doubler le nombre pensé, puis ajouter à cela un nombre pair tel qu'ils veulent, puis partir cette somme par 2, et du quotient font ôter le nombre pensé une fois, et finalement devinent que le reste est la moitié du nombre pair qu'ils ont fait ajouter. Mais la règle générale que j'ai donnée est beaucoup plus belle et plus subtile ; et ce problème ainsi pratiqué, bien qu'il soit aisé à celui qui est expert à bien manier les nombres, semble néanmoins admirable aux autres, et l'artifice d'icelui ne peut être facilement découvert ; encore est-il évident que la façon commune sus alléguée revient à la mienne, et n'est que comme un échantillon d'icelle.

Que si l'on m'objecte qu'on ne peut aisément pratiquer ce problème si généralement que j'ai montré, si l'on n'est bien versé en l'arithmétique, à cause que le plus souvent il y intervient des fractions, dont tout le monde ne se sait pas bien escrimer, je réponds premièrement que je n'écris pas principalement pour ceux qui sont du tout ignorants, comme j'ai déjà protesté, et qui sont si hébétés et tardifs à comprendre les propriétés des nombres, qu'ils font trouver Pythagore un effronté menteur, disant que l'âme de l'homme n'est rien qu'une nombreuse harmonie. En après je dis qu'on peut pratiquer ce jeu en infinies façons sans toutefois tomber en fractions, et pour aider les plus faibles j'en veux donner les moyens.

Prends pour multiplicateur quel nombre que tu voudras, pourvu que tu prennes pour diviseur ou le même nombre ou un autre qui le mesure, et que le nombre que tu fais ajouter soit aussi mesuré par le même diviseur. Comme si l'on avait songé 7, fais-le multiplier par 5 viendra 35 ; et d'autant que 5 n'a pas de nombre qui le mesure sinon lui-même, tu es contraint de prendre aussi 5 pour diviseur, et par conséquent de faire ajouter un nombre mesuré par 5, comme 10 qui ajouté à 35 fera 45, qui divisé par 5 donne 9, duquel, si tu fais ôter une fois le nombre pensé, le reste sera 2, qui provient aussi divisant 10 par 5. Que si tu prends pour multiplicateur le nombre 6, tu pourras prendre pour diviseur ou le même 6, ou 3, ou 2; et ainsi d'une infinité de nombres.

Enfin, tu peux encore commander à celui qui songe le nombre d'en prendre un qui soit mesuré par le diviseur que tu veux employer, comme si tu veux faire diviser par 4, dis-lui qu'il songe quelque nombre qui ait quart ; car alors il n'importera par quel nombre tu fasses multiplier, pourvu que tu fasses toujours ajouter un nombre qui soit mesuré par ton diviseur.

PROBLÈME IX

Deux nombres étant proposés, l'un pair et l'autre impair, deviner de deux personnes lequel d'iceux chacune aura choisi.

SOIENT, par exemple, Pierre et Jean auxquels tu aies proposé deux nombres, l'un pair et l'autre impair, comme 10 et 9, et que chacun d'eux choisisse un de ces nombres à ton insu. Lors pour deviner lequel chacun aura choisi, prends aussi deux nombres, l'un pair et l'autre impair, comme 2 et 3, et fais multiplier celui que Pierre aura choisi par 2, et celui que Jean aura choisi par 3; après fais joindre ensemble les deux produits, et que la somme te soit manifestée, ou bien demande seulement si cette somme est nombre pair ou impair, ou par quelque moyen plus secret tâche de le découvrir, comme leur commandant d'en prendre la moitié. Car sachant cela tu viendras aisément à bout de ton attente, d'autant que si ladite somme est nombre pair, infailliblement le nombre que tu as fait multiplier par ton impair (à savoir 3) c'était le nombre pair (à savoir 10). Que si ladite somme est nombre impair, le nombre que tu as fait multiplier par ton impair était infailliblement le nombre impair (à savoir 9).

Comme si Pierre avait choisi 10 et Jean 9, fais multiplier par 2 celui de Pierre et par 3 celui de Jean, les produits seront 20 et 27 dont la somme est 47, nombre impair, dont tu conjectures que celui que tu as fait multiplier par 3, c'est le nombre impair, et partant que Jean avait choisi 9 et Pierre 10.

Que si tu fais multiplier par 2 celui de Jean, et celui de Pierre par 3, les deux produits seront 18 et 30 dont la somme est 48, nombre pair, dont tu recueilles que celui qui a été multiplié par 3, c'est le nombre pair, et partant que Pierre a choisi 10 et Jean 9.

DÉMONSTRATION.

Le nombre qu'on fait multiplier par 2 donne nécessairement un produit pair ; donc la somme des deux produits sera paire ou impaire suivant que l'autre produit sera lui-même pair ou impair ; mais ce produit étant donné par un multiplicateur impair, il sera pair ou impair suivant que le nombre qu'on multiplie sera lui-même pair ou impair ; donc le nombre qu'on fait multiplier par un nombre impair est pair ou impair en même temps que la somme des deux produits.

PROBLÈME X

Faire le même avec deux nombres pairs, dont l'un soit pairement pair et l'autre pairement impair seulement.

AYANT pris, comme dans le problème précédent, un nombre pair et un nombre impair, on fait multiplier l'un des nombres inconnus par le nombre pair, et l'autre par le nombre impair ; puis on fait ajouter les deux produits, et l'on demande si leur somme est pairement paire ou pairement impaire : le nombre inconnu qu'on a fait multiplier par le nombre impair est, en même temps que la somme, pairement pair ou pairement impair.

DÉMONSTRATION.

Le produit obtenu avec le nombre pairement pair est toujours pairement pair; donc la somme des deux produits sera pairement paire ou pairement impaire suivant que le second produit est lui-même pairement pair ou pairement impair ; mais ce second produit est obtenu avec un multiplicateur impair ; donc il est pairement pair ou pairement impair en même temps que le multiplicande; donc enfin le nombre inconnu qu'on a fait multiplier par le nombre impair est pairement pair ou pairement impair en même temps que la somme des produits.

4

PROBLÈME XI

Faire le même en deux nombres premiers entre eux.

Donne à choisir aux deux personnes deux nombres premiers entre eux, comme 9 et 7, pourvu que l'un d'iceux soit nombre composé comme est 9; et prends semblablement pour tes multiplicateurs deux nombres premiers entre eux, pourvu que l'un d'iceux mesure l'un des autres deux que tu as donnés à choisir : par exemple prends 3 et 2 qui sont premiers entre eux, et l'un d'iceux, à savoir 3, mesure l'un des autres, à savoir 9; et fais multiplier, comme auparavant, l'un des nombres choisis par 3, l'autre par 2, et que la somme des deux produits te soit manifestée, ou bien enquiers-toi si ladite somme est mesurée par celui de tes multiplicateurs qui mesure l'un des nombres choisis, comme en l'exemple donné fais moyen de savoir si ladite somme est mesurée par 3 en commandant qu'on prenne le tiers d'icelle. Par là tu devineras infailliblement lequel des deux nombres chaque personne a choisi : car si ladite somme est mesurée par 3, c'est signe que le nombre que tu as fait multiplier par 3 est celui que le même 3 ne mesurait pas, à savoir 7. Que si ladite somme n'est pas mesurée par 3, c'est signe que le nombre que tu as fait multiplier par 3 est celui même que 3 mesurait, à savoir 9. Et de même façon procèdera la règle, si tu donnes des autres nombres à choisir, et que tu en prennes des autres pour multiplicateurs, pourvu qu'ils aient les conditions requises.

DÉMONSTRATION.

Soient les deux premiers nombres A et B, qui sont premiers entre eux, et les deux autres nombres a et c, qui sont aussi premiers entre eux, le nombre a divisant A. Si l'on a multiplié A par c, la somme des deux produits est

$$Ac + Ba,$$

et cette somme est divisible par a, puisque dans chaque partie il y a un facteur divisible par a.

Mais si A a été multiplié par a, la somme des deux produits est

$$Aa + Bc,$$

et cette somme n'est pas divisible par a, car la première partie l'est évidemment, et la seconde ne l'est pas, puisque a étant premier avec chacun des nombres B et c est premier avec leur produit.

Donc suivant que la somme des produits est ou n'est pas divisible par a, c'est B qui a été ou qui n'a pas été multiplié par a.

PROBLÈME XII

Deviner plusieurs nombres pensés, pourvu que chacun d'iceux soit moindre que dix.

Fais multiplier le premier nombre pensé par 2, puis ajouter 5 au produit et multiplier le tout par 5, et à cela ajouter 10, puis y ajouter le second nombre pensé et multiplier le tout par 10, puis y ajouter le troisième nombre pensé, et si l'on a pensé davantage de nombres, fais encore multiplier cela par 10, puis ajouter le quatrième nombre, et ainsi fais toujours multiplier par 10 et ajouter un des autres nombres pensés. Alors fais-toi déclarer la dernière somme ; et si l'on n'a pensé que deux nombres, soustrais d'icelle somme 35, et du reste le nombre des dizaines te montrera le premier nombre pensé, le nombre des nombres (unités) le second. Que si l'on a pensé trois nombres, ôte de la dernière somme 350, et du reste le nombre des centaines exprimera le premier nombre pensé, celui des dizaines le second, celui des nombres le troisième ; et de même façon tu procèderas toujours à deviner davantage de nombres, comme si l'on en a pensé quatre, tu soustrairas de la dernière somme 3500, et du reste le nombre des mille exprimera le premier nombre pensé, celui des centaines le second, celui des dizaines le troisième, et celui des nombres le quatrième.

Par exemple les quatre nombres pensés soient 3, 5, 8, 2 ; fais doubler le premier viendra 6, auquel ajoutant 5 vient 11, qui multiplié par 5 donne 55, auquel ajoutant 10 vient 65, auquel ajoutant le second nombre vient 70, qui multiplié par 10 fait 700, auquel ajoutant le troisième nombre vient 708, qui multiplié par 10 fait 7080, auquel ajoutant le troisième nombre vient 7082, que si tu en soustrais 3500, le reste sera 3582 qui exprime par ordre les quatre nombres pensés.

DÉMONSTRATION.

Soient des nombres pensés $a, b, c, d,\ldots$ On effectue les calculs suivants :

Pour les deux premiers nombres :

$$(2a+5).\,5 = 10a+25;\quad 10a+25+10 = 10a+35,$$
$$10a+35+b = 10a+b+35.$$

Pour le troisième :

$$(10a+b+35).\,10+c = 100a+10b+c+350.$$

Pour le quatrième :

$$(100a+10b+c+350).\,10+d$$
$$= 1000\,a+100b+10\,c+d+3500.$$

Et ainsi de suite pour tant de nombres qu'on voudra ; ce qui montre clairement qu'ayant retranché du résultat 35 ou 350 ou 3500, etc., on trouvera les nombres pensés rangés par ordre dans le reste à partir de la droite.

AVERTISSEMENT.

Cette règle que j'ai donnée fort généralement est appliquée par plusieurs à diverses choses particulières.

Les uns s'en servent pour deviner combien il y a de points en chaque dé de tant qu'on en aura jetés, et la pratique en est bien aisée, car les points d'un dé ne peuvent jamais passer 6, et ne se faut qu'imaginer que les points de chaque dé sont un nombre pensé et la règle est du tout la même.

Les autres s'en servent pour deviner qui de plusieurs personnes aura pris une bague, en quelle main il l'aura, en quel doigt, et en quelle jointure; et alors il faut disposer les personnes par ordre, tellement qu'une soit première, l'autre seconde, l'autre troisième, etc. Semblablement il se faut imaginer que des deux mains l'une est première, l'autre est seconde, et aussi que des cinq doigts de la main l'un est premier, l'autre second, l'autre est troisième, etc., et faire encore le même des jointures de chaque doigt. Partant ce jeu n'est rien autre que deviner quatre nombres pensés. Par exemple, supposons que la quatrième personne ait la bague, en la seconde main, au cinquième doigt, en la troisième jointure: fais doubler le nombre de la personne, viendra 8 auquel ajoutant 5 vient 13 qui multiplié par 5 donne 65, auquel ajoutant 10 vient 75, et y ajoutant le nombre de la main provient 77 qui multiplié par 10 donne 770, auquel ajoutant le nombre du doigt vient 775 qui multiplié par dix donne 7750, auquel ajoutant le nombre de la jointure vient 7753 duquel il faut soustraire 3500, et le reste sera 4253 dont les figures expriment tout ce qu'on veut deviner.

Que si l'on voulait seulement deviner de plusieurs personnes laquelle a la bague et en quel doigt, ce ne serait que deviner deux nombres pensés; mais il faut prendre garde qu'en ce cas on s'imagine en chaque personne dix doigts disposés par ordre, par conséquent il peut arriver qu'une personne ait la bague au dixième doigt, et partant alors à un nombre précis de dizaines ajoutant 10 il se fera aussi un nombre de dizaines précis, mais plus grand d'un qu'auparavant; partant après la soustraction de 35 il restera o en la place des nombres. Donc cela t'arrivant, sois assuré que pour deviner le nombre de la personne il te faut ôter 1 du nombre des dizaines, et dire que telle personne a la bague au dixième doigt. Par exemple que la sixième personne ait la bague au dixième doigt : fais doubler le nombre de la personne viendra 12 auquel ajoutant 5 vient 17 qui multiplié par 5 fait 85, auquel ajoutant 10 fait 95, et à cela ajoutant encore le nombre du doigt, vient 105 d'où si tu ôtes 35 reste 70, où tu vois clairement que le nombre des dizaines surpasse d'un le nombre de la personne.

Pour diversifier la pratique de ce problème, il ne faut que bien entendre ce que j'ai dit en l'avertissement du problème IV. Car premièrement bien que les multiplicateurs ne se puissent bonnement changer (d'autant qu'il faut toujours qu'après avoir ajouté chaque nombre on multiplie le tout par 10) toutefois on y peut encore procéder avec quelque diversité, car puisque multiplier par 2 et puis par 5 c'est autant que multiplier par 10, il appert qu'au commencement on pourrait faire multiplier le premier nombre par 10, au lieu de doubler puis multiplier par 5; ou bien faire en premier lieu multiplier par 5 puis par 2. Semblablement après qu'on a ajouté quelqu'un des autres nombres, au lieu de faire multiplier le tout par 10, on pourrait faire multiplier par 2 puis par 5, ou bien par 5 puis par 2.

Secondement quant aux nombres superflus que l'on fait ajouter pour couvrir l'artifice, et dont la somme se soustrait à la fin, ils se peuvent changer comme l'on veut, et par ainsi la règle se peut diversifier en infinies manières : la cause en est évidente par ce que j'ai dit en l'avertissement du problème IV. Par exemple, soient les quatre nombres pensés 4, 2, 5, 3 comme ci-dessus. Fais multiplier le premier par 5 viendra 20, fais-y ajouter 8 viendra 28; fais doubler cela viendra 56; fais-y ajouter le second nombre pensé viendra 58; fais multiplier cela par 10 viendra 580; fais-y ajouter 12 viendra 592; fais-y ajouter le troisième nombre pensé viendra 597; fais le doubler viendra 1194; fais-y ajouter 6 viendra 1200; fais-le multiplier par 5 viendra 6000, auquel ajoutant le dernier nombre pensé viendra 6003. Or parce qu'après avoir ajouté 8 on a doublé c'est autant que si l'on avait doublé 8 qui fait 16, lequel multiplié par 10 fait 160 auquel ajoutant 12 vient 172, qui doublé fait 344 auquel ajoutant 6 vient 350 qui multiplié par 5 donne 1750. Partant le nombre qu'il faut soustraire est 1750 qui ôté de 6003 reste 4253 qui exprime les quatre nombres pensés.

PROBLÈME XIII

Quelqu'un ayant pris en ses deux mains certains nombres d'unités dont la proportion seulement soit connue, deviner après quelques changements combien il lui en reste en une main.

Quelqu'un ait pris en la main droite certain nombre d'unités, comme de jetons, et qu'il en prenne aussi certain nombre en la main gauche, pouvu qu'il te déclare seulement la proportion (le rapport) de ces deux nombres. Par exemple qu'il en ait 15 en la main droite et 12 en la main gauche; alors il te dira que le nombre de ceux de la droite au nombre de ceux de la gauche est en proportion de $\frac{5}{4}$ ou $1\frac{1}{4}$. Partant fais-lui mettre de la gauche en la droite quel nombre de jetons tu voudras, pourvu qu'il se puisse faire, et qu'il ait partie semblable à celle ou à celles qui seront exprimées au dénominateur (nombre) de la proportion, comme en l'exemple donné où le dénominateur est $\frac{5}{4}$, fais-lui mettre de la gauche en la droite quelque nombre qui ait quart, comme 8; en après dis-lui qu'il en remette de la droite en la gauche autant qu'il en est demeuré en la gauche selon le dénominateur de la proportion, à savoir qu'il y en remette 1 fois et $\frac{1}{4}$ autant qu'il y en est demeuré; et pour ce que de 12 ôtant 8 il demeure 4, il est certain qu'il y en remettra 5, et en tout il s'en trouvera lors 9 en la gauche. Adonc tu devineras ce qui lui reste en la droite par tel artifice : prends le dénominateur de la proportion, à savoir 1 $\frac{1}{4}$, ajoutes-y 1 viendra 2 $\frac{1}{4}$; multiplie par 2 $\frac{1}{4}$ le nombre qu'en premier lieu tu as fait transporter de la gauche en la droite, à savoir 8, viendra 18, le nombre que tu veux deviner.

Autre exemple : qu'il prenne 39 jetons en la droite, et 15 en la gauche, qui est une proportion de 2 $\frac{3}{5}$. Dis-lui que de la gauche en la droite il mette un nombre qui ait cinquième, comme 10. Alors il en aura 49 en la droite, et restera 5 en la gauche. En après dis-lui qu'il en remette de la droite en la gauche deux fois autant qu'il en est demeuré et les trois cinquièmes du même nombre qui est demeuré, et il y en remettra 13 ; partant en tout il en aura lors en la gauche 18. Mais tu devineras ce qui lui reste en la droite, si tu ajoutes 1 au dénominateur de la proportion, car il viendra 3 $\frac{3}{5}$ par qui multipliant 10, le nombre que du commencement tu as fait transporter de la gauche en la droite, tu auras 36, le nombre juste qui lui reste en la droite.

DÉMONSTRATION.

Soient a et b les deux nombres de jetons, et $\frac{m}{n}$ le rapport de a à b.

On retranche de b un nombre p qu'on ajoute à a qui devient $a+p$, et b est devenu $b-p$; alors on retranche de $a+p$ la quantité $\frac{m}{n}(b-p)$, ce qui la réduit à $a+p-\frac{m}{n}(b-p)$, ou, parce que $a=\frac{m}{n}b$,

$$\frac{m}{n}b+p-\frac{m}{n}(b-p),$$

expression qui revient à $\left(1+\frac{m}{n}\right)p$, ce qui démontre la règle.

Remarque i. On voit par cette démonstration que p peut être un nombre quelconque moindre que b, et que si Bachet recommande de le prendre multiple de n c'est pour éviter d'avoir des fractions, lesquelles sont incompatibles avec la nature des unités employées.

Remarque ii. Bachet prescrit encore de commencer par soustraire p du plus petit nombre ; mais rien dans la démonstration ne suppose b plus petit que a. Seulement quand on soustrait p de b on emploie le rapport de a à b, et si l'on soustrayait p de a, il faudrait employer le rapport de b à a, c'est à-dire $\frac{n}{m}$.

PROBLÈME XIV

Faisant le même qu'auparavant, deviner après les.mêmes changements combien il y a d'unités en chaque main, et combien il y en avait du commencement.

Posons le cas comme ci-dessus qu'on eût pris 15 jetons en la main droite et 12 en la gauche, et qu'on en eût transféré 8 de la gauche en la droite, et qu'on en eût remis de la droite en la gauche une fois et quart autant qu'il en était demeuré. Alors puisque par la règle précédente, tu sais ce qui reste en la droite, n'en fais nul semblant, mais demande encore quelle proportion il y a du nombre qui se treuve en une main à celui qui se treuve en l'autre, car si tu sais telle proportion, l'un des nombres étant connu, tu connaîtras infailliblement l'autre, comme en l'exemple donné, si l'on te dit qu'après les changements faits il y a deux fois autant de jetons en la droite qu'en la gauche, puisque par la règle précédente tu sais qu'il y en a 18 en la droite, tu es bien assuré qu'il y en a 9 en la gauche. Partant la première partie de ce problème est bien aisée, et porte avec soi sa démonstration.

Maintenant si tu veux deviner combien il y avait de jetons du commencement en chaque main, pusque tu sais par la première partie la somme de tous les jetons qui est 18 plus 9 ou 27, et puisque tu sais aussi que le nombre de la droite du commencement contenait celui de la gauche une fois et quart, il te convient diviser la somme connue 27 en deux nombres qui observent la proportion de $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$, ce qui te donne 15 et 12, les nombres que tu cherchais.

NOTE.

Le partage d'un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés étant expliqué dans toutes les arithmétiques, nous ne ferons que rappeler la règle : *On multiplie le nombre à partager alternativement par chacun des autres nombres donnés et l'on divise à chaque fois par la somme de ces autres nombres.*

Ainsi, pour un nombre a dont les parties doivent être proportionnelles à m, n, p, les parties sont :

$$\frac{a \times m}{m+n+p}, \quad \frac{a \times n}{m+n+p}, \quad \frac{a \times p}{m+n+p},$$

ce qui est évident *à posteriori.*

PROBLÈME XV

Plusieurs dés étant jetés, deviner la somme des points ajoutés ensemble d'une certaine façon.

Par exemple qu'on ait jeté trois dés à ton insu : fais ajouter par quelqu'un les points d'iceux ensemble, puis laissant un d'iceux à part en l'état qu'il est, fais prendre des autres deux les points du dessous, à savoir ceux qui sont dans la partie du dé opposée à celle de dessus qui paraît sur la table, et qu'on ajoute ces points à la somme des précédents ; puis qu'on rejette derechef ces deux dés, et qu'on ajoute les points d'iceux qui paraissent dessus à la susdite somme, et qu'on en laisse un d'iceux en l'état qu'il est avec le premier, et que du troisième on prenne les points de dessous et qu'on les ajoute aux autres ; finalement qu'on rejette ce troisième, et qu'on ajoute à la susdite somme les points d'icelui qui paraissent dessus, et qu'on le laisse en l'état qu'il est avec les deux autres. Lors t'approchant de la table et regardant les points des trois dés qui paraissent dessus, tu les ajouteras ensemble, et à leur somme ajouteras encore 21, et tu auras la somme de tous les points ajoutés ensemble en la façon que j'ai dit.

Comme si la première fois les points des trois dés sont 5, 3, 2, leur somme est 10; et laissant un d'iceux à part tourné comme il est, à savoir le 5, qu'on prenne les points opposés du 3 et du 2, on trouvera 4 et 5 qui ajoutés à 10 font 19. Puis qu'on rejette ces deux dés, et que les points d'iceux paraissant dessus soient 4 et 1, qui ajoutés à 19 font 24; et laissant 4 à part avec le premier, qu'on prenne les points opposés de l'autre, qui font 6, qui ajoutés à 24 font 30; finalement qu'on rejette ce dernier dé, et que les points d'icelui soient 2, qui ajoutés à 30 font 32, et qu'on laisse aussi ce dé en l'état qu'il est avec les autres. Lors t'approchant et regardant les trois dés, tu trouveras que les points paraissant dessus sont 5, 4, 2, dont la somme est 11, à qui si tu ajoutes 21, comme j'ai dit, tu auras 32, la somme requise.

DÉMONSTRATION.

Ce jeu peut sembler admirable à ceux qui en ignorent la cause, et toutefois la finesse n'est pas des plus grandes, car elle ne dépend que de la structure des dés qui sont tous façonnés de telle sorte que les points de deux parties opposées joints ensemble font toujours 7 : par ainsi d'un côté il y a 1, de l'autre côté opposé 6; d'un côté se treuve 2, de l'autre 5; d'un côté est marqué 3, de l'autre 4. Donc toutes les fois que tu fais prendre les points des deux parties opposées d'un même dé, tu es assuré que leur somme est 7. Partant puisque parfaisant le jeu comme j'ai enseigné, on prend les points des parties opposées en trois dés, il est certain que cela est autant que prendre 3 fois 7, à savoir 21; et partant ajoutant 21 à tous les autres points qu'on assemble, il est évident qu'on a la somme de tous.

AVERTISSEMENT.

Pour faire le même jeu en quatre, cinq, ou plusieurs dés, il ne faut que prendre garde combien de fois on fait ajouter les points opposés d'un dé, et retenir autant de fois 7 pour ajouter à la fin. Comme si l'on avait jeté quatre dés, pratiquant le jeu ainsi que j'ai montré en trois, on trouverait qu'on fait prendre 6 fois les points opposés d'un dé, partant qu'à la fin il faudrait ajouter 6 fois 7 ou 42; et en cinq dés on trouverait qu'on prendrait 10 fois les points opposés d'un dé, partant à la fin il faudrait ajouter 70 ; et ainsi toujours on peut faire une règle pour tant de dés que l'on voudra.

PROBLÈME XVI

Deviner combien il y a de points en une carte, regardant une fois seulement chacune des autres cartes.

PRENDS un jeu de cartes entier où il y en a 52, et donne à tirer une carte à quelqu'un qui la retiendra sans te la montrer; lors pour deviner combien de points il y a en la carte tirée, prends le reste des cartes, et faisant valoir les as 1, chaque personnage 10, et les autres cartes autant de points qu'elles en marquent, commence à ajouter les points de la première carte aux points de la seconde, et la somme d'iceux aux points de la troisième, et ainsi consécutivement jusqu'à la dernière carte, rejetant toujours le nombre 10, et ajoutant le reste aux points de la carte suivante, comme on rejette 9 en la preuve par 9. Finalement ôte la dernière somme ou le dernier reste du nombre 10, ce qui restera sera le nombre des points de la carte tirée. Que si ladite dernière somme est égale à 10, le nombre des points de la carte tirée sera aussi 10.

DÉMONSTRATION.

Cette démonstration est bien facile, car il ne faut que prouver que la somme des points de toutes les cartes ensemble est un nombre mesuré par 10. Mais ceci est évident, d'autant qu'en premier lieu la somme des points de tous les personnages et des quatre dix est mesurée par 10, à cause que chacune desdites cartes contient justement 10 points. En après la somme des autres 9 cartes de même couleur depuis 1 jusqu'à 9 étant justement 45, il est évident que toutes les cartes des quatre couleurs depuis l'as jusqu'au 9 inclusivement feront 4 fois 45, c'est-à-dire 180 qui est aussi un nombre mesuré par 10. Donc puisque 10 mesure la somme de tous les points de tous les personnages, et des quatre dix, et de toutes les autres cartes depuis l'as jusques au 9, il s'ensuit que le même 10 mesure la somme des points de toutes les cartes ensemble. C'est pourquoi assemblant les points de toutes les cartes, et rejetant toujours 10, il faut que la dernière somme fasse aussi justement 10. Partant si on a tiré une carte, ajoutant les points de toutes les autres ainsi que j'ai dit, la dernière somme ou le dernier reste joint avec les points de la carte tirée doit faire 10 justement. Par conséquent ôtant de 10 ladite dernière somme ou ledit dernier reste, ce qui restera sera infailliblement le nombre des points de la carte tirée ; ou si ladite dernière somme est 10, il faut que le nombre des points de la carte tirée soit aussi 10. Ce qu'il fallait démontrer.

AVERTISSEMENT.

Quiconque aura bien compris la démonstration, il trouvera facilement diverses autres façons de faire ce problème. Car premièrement on le peut faire en tout nombre de cartes, pourvu qu'on remarque auparavant la somme des points de toutes lesdites cartes ensemble. Par exemple aux 36 cartes du piquet (*a*),

(*a*) On voit que, sous Louis XIII, on jouait au piquet avec 36 cartes ; et il supposant que l'as vaille 1, la somme des points de toutes les cartes sera 284, qui n'est pas justement mesuré par 10, car ôtant tous les 10 de 284 il reste 4. Néanmoins on fera le jeu aussi facilement qu'auparavant, si, commençant à ajouter ensemble les points des cartes, on rejette premièrement 4, et puis jusques à la fin on rejette 10.

Secondement, le nombre qu'on rejette en ajoutant, et duquel à la fin on soustrait le dernier reste pour deviner les points de la carte cachée, se peut aussi changer en beaucoup de façons, car il n importe quel nombre ce soit, pourvu qu'il ne soit point plus petit que le nombre des points de la plus haute carte. Ainsi au lieu de 10 on pourrait prendre 11, ou 12, ou 13, etc Mais il faut toujours considérer si ce nombre qu'on choisira mesure le nombre des points de toutes les cartes ou non, ce qui se connaît par la division; car s'il ne reste rien il le mesure, s'il reste quelque chose de la division il ne le mesure pas; et en ce cas il faut ôter le reste tout au commencement de l'addition qu'on fait des points des cartes restantes, comme j'ai dit en l'exemple précédent qu'il fallait ôter 4 avant de commencer à ôter les 10.

Finalement tu remarqueras qu'il y a plusieurs cartes dont la valeur est arbitraire, et se peut changer à plaisir, comme sont tous les personnages, lesquels ordinairement on fait valoir 10, sans aucune différence entre le roi, la dame et le valet; car on pourrait faire valoir le valet 11, la dame 12, le roi 13, ou bien quelques autres nombres.

En faisant ainsi, pourvu que l'on manie deux fois les cartes,

en était encore de même sous Louis XIV, comme le prouve une scène des *Fâcheux*, de Molière. (A. L.)

on pourra deviner non-seulement les points de la carte cachée, mais on devinera précisément quelle carte c'est. Comme si l'on prend le jeu de cartes tout entier, à cause que la somme des points de toutes les cartes est 364, laquelle est mesurée par 13, tu compteras toujours jusques à 13, et ôteras 13 aussitôt qu'il se pourra faire, et continuant ainsi jusqu'à la fin, si tu ôtes de 13 la dernière somme ou le dernier reste, tu trouveras infailliblement le nombre des points de la carte cachée, et par là tu sauras déjà si c'est un roi, ou un valet, ou un dix, etc. Par conséquent, si tu reprends les cartes, tu verras incontinent lequel des quatre rois, ou des quatre valets, ou des quatre dix, etc., te manque; et celui qui te manquera sera sans doute la carte cachée; mais prends garde que s'il ne restait rien la carte cachée serait un roi.

PROBLÈME XVII

Deviner combien de points il y a en trois cartes.

PRENDS un jeu de cartes entier où il y en a 52, et quelqu'un choisisse trois d'icelles, lesquelles qu'il voudra; tu devineras combien elles contiennent de points en cette sorte. Dis-lui qu'à chacune des cartes choisies il ajoute tant des autres cartes qu'elles accomplissent le nombre de 15 en computant les points de la carte choisie; cela fait, qu'il te donne le reste des cartes; lors du nombre d'icelles ôte 4, et le reste sera infailliblement le nombre des points des trois cartes.

Par exemple que les points des trois cartes soient 4, 7, 9. Il est certain que pour accomplir 15 computant les points de chaque carte, à 4 il faut ajouter 11 cartes, à 7 il en faut ajouter 8, et à 9 il en faut ajouter 6. Partant le reste des cartes sera 24, d'où si tu ôtes 4 restera 20, qui est le nombre des points des trois cartes 4, 7 et 9.

DÉMONSTRATION.

Pour rendre parfaite raison de ceci, supposons que les trois cartes choisies soient les trois moindres, à savoir les trois as, dont chacun ne vaille qu'un; alors il est évident que pour accomplir

15 à chaque carte il faut ajouter 14 cartes, et partant le nombre tant des trois choisies que des ajoutées sera 45, lequel étant ôté du nombre entier des cartes qui est 52 il en reste 7, d'où si l'on ôte 4 reste 3, le nombre des points des trois cartes choisies. Or ceci supposé il est aisé à preuver qu'il faut toujours ôter 4 du nombre des cartes restantes pour deviner la somme des points des trois cartes. Car d'autant qu'on augmentera les nombres des points d'icelles, en mettant des plus hautes cartes, autant moins de cartes il faudra ajouter pour accomplir les 15, et partant d'autant précisément s'augmentera le nombre des cartes restantes ; partant ôtant 4, comme auparavant, le reste sera toujours égal au nombre des points des trois cartes choisies. Comme si au lieu du premier as on met un six, alors la somme des points sera augmentée de 5, car au lieu de 3 elle sera 8 ; mais aussi à la première carte au lieu de 14 qu'on y ajoutait pour accomplir 15, on n'ajoutera maintenant que 9 qui font 5 de moins. Partant le reste des cartes se treuvera augmenté de 5. Dont il appert de la vérité de mon dire.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soient n le nombre des cartes, a, b, c, les nombres de points que représentent les cartes choisies, et p le nombre qu'on accomplit en ajoutant à chacun des nombres a, b, c, un certain nombre de cartes dont chacune ne compte que pour 1. Le nombre des cartes qu'on ajoute à a est $p-a$, celui qu'on ajoute à b est $p-b$, et celui qu'on ajoute à c est $p-c$; si on y ajoute les trois cartes primitivement choisies, et le nombre r des cartes restantes, on aura le nombre n de toutes les cartes ; on a donc l'égalité

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)+3+r=n,$$

d'où l'on tire

$$a + b + c = r + (3p + 3) - n.$$

Pour $n = 52$ et $p = 15$, on a $a + b + c = r - 4$.

Pour $n = 32$ et $p = 15$, on a $a + b + c = r + 16$.

De cette solution générale on tire la règle suivante : *Triplez le nombre de points que l'on accomplit sur chacune des cartes choisies et ajoutez-y 3; puis prenez la différence entre cette somme et le nombre total des cartes et ajoutez-la au reste ou retranchez-la du reste suivant qu'elle est positive ou négative, c'est-à-dire suivant que la somme est plus grande ou plus petite que le nombre total des cartes.*

Pour $n = 36$ et $p = 11$, on a $3n + 3 - n = 0$;
donc $a + b + c = r$.

Remarque I. — Il n'est pas nécessaire de parfaire le même nombre p sur chacune des cartes choisies; on peut prendre des nombres p, q, s, et alors mettre leur somme à la place de $3p$ dans la formule.

Remarque II. — Au lieu de trois cartes si l'on en prenait quatre, la formule serait

$$a + b + c + d = r + (4p + 4) - n;$$

et si l'on en prenait cinq, elle deviendrait

$$a + b + c + d + e = r + (5p + 5) - n;$$

et ainsi de suite.

Remarque III. — Il peut arriver qu'il n'y ait pas assez de cartes pour parfaire le nombre p sur toutes les cartes choisies; alors on demande le nombre q qui manque, et l'on opère comme si le jeu avait été fait avec $n + q$ cartes, le reste r étant zéro.

PROBLÈME XVIII

De plusieurs cartes disposées en divers rangs deviner laquelle on aura pensée.

Prends 15 cartes et les dispose en trois rangs, si bien qu'il s'en trouve 5 en chaque rang; et que quelqu'un pense laquelle qu'il voudra pourvu qu'il te déclare en quel rang elle est. Alors ramasse à part les cartes de chaque rang, puis joins-les toutes ensemble, mettant toutefois le rang où est la carte pensée au milieu des deux autres. En après derechef dispose toutes les cartes en trois rangs, en posant une au premier, puis une au second, puis une au troisième, et en remettant derechef une au premier, puis une au second, puis une au troisième, et ainsi jusqu'à ce qu'elles soient toutes rangées. Alors demande en quel rang est la carte pensée, et ramasse comme auparavant chaque rang à part, mettant au milieu des autres celui où est la carte pensée; et finalement dispose-les encore en trois rangs de la même sorte qu'auparavant, et demande auquel est-ce que se treuve la carte pensée, et sois assuré qu'elle se treuvera lors la troisième du rang où elle sera. Ainsi tu la devineras aisément.

Que si tu veux encore mieux couvrir l'artifice, tu peux ramasser derechef toutes les cartes en la façon que j'ai dit ci-dessus, mettant au milieu des deux autres le rang où est la carte pensée, et lors la carte pensée se treuvera au milieu de toutes les quinze cartes, si bien que, de quel côté que l'on commence à compter, elle sera toujours la huitième.

DÉMONSTRATION.

Pour rendre raison infaillible de ceci, il me faut preuver que, disposant les cartes ainsi que j'ai dit par trois fois, enfin après la troisième fois la carte pensée est nécessairement la troisième du rang où elle se treuve. Or prends garde que la première fois ayant rangé en trois rangs quinze cartes, comme j'ai dit, quand tu sais en quel rang est la carte pensée, tu es assuré que c'est une des cinq qui sont en ce rang; et mettant au milieu des autres rangs celui où est la carte pensée, et les disposant derechef comme j'ai enseigné, alors tu mets en divers rangs les cinq cartes qui auparavant n'étaient qu'en un seul rang. Partant regarde bien en quelles places tombent les cartes du rang du milieu, entre lesquelles tu sais que doit être la carte pensée, et remarque ces cinq points :

1° Que la première tombe au second lieu du troisième rang.

2° Que la seconde tombe au troisième lieu du premier rang.

3° Que la troisième tombe au troisième lieu du second rang.

4° Que la quatrième tombe au troisième lieu du troisième rang.

5° Que la cinquième tombe au quatrième lieu du premier rang.

En représentant par des o les cartes où ne se trouve pas la carte pensée et par des 1 celles parmi lesquelles elle se trouve, on a la disposition suivante :

1er *rang.*	2e *rang.*	3e *rang.*
0	0	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0
0	0	0

Donc si la carte pensée est lors au premier rang, tu es assure que c'est la troisième ou quatrième d'icelui; partant disposant derechef les cartes en la façon ordonnée, elle tombera nécessairement en la troisième place du second ou en la troisième du troisième rang.

Que si après la seconde disposition la carte pensée est au second rang tu es assuré que c'est la troisième du même rang; partant dès lors tu la peux deviner; mais quand bien tu rangeras derechef les cartes en la façon exposée, elle retombera toujours à la même place (c'est une propriété spéciale et évidente de la carte du milieu). Que si la carte pensée, après la seconde disposition, est au troisième rang, tu es assuré que c'est la seconde ou la troisième d'icelui ; partant rangeant derechef les cartes, elle tombera infailliblement en la troisième place du premier rang, ou en la troisième du second. Donc, quoi qu'il advienne, après la troisième fois, la carte pensée sera toujours la troisième du rang où elle se treuvera. Ce qu'il fallait démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

La démonstration de Bachet est évidemment trop particulière, et ne montre pas si avec un nombre impair quelconque de cartes distribuées en un nombre impair de tas égaux, on peut toujours amener la carte pensée au milieu du jeu.

Soient n le nombre des cartes de chaque tas et t le nombre des tas. La carte pensée se trouve au commencement parmi les n cartes du tas du milieu ; à la distribution suivante ces n cartes seront réparties sur les t tas, et si n divisé par t donne un quotient entier e, elles se trouveront également distribuées dans les t tas, formant un groupe de e cartes au milieu de chaque tas.

1re *disposition.*			2e *disposition.*		
o	1	o	o	o	o
o	1	o	o	o	o
o	1	o	o	o	o
o	1	o	1	1	1
o	1	o	1	1	1
o	1	o	1	1	1
o	1	o	o	o	o
o	1	o	o	o	o
o	1	o	o	o	o

Il en sera de même si le quotient e est divisible par t ; et encore de même si le nouveau quotient f est divisible par t ; et ainsi de suite : en sorte que la carte pensée se trouve constamment dans un groupe occupant le milieu du jeu, quand on a mis au milieu des autres le tas où elle se trouve. Si donc les divisions par t se font sans reste jusqu'à ce qu'on trouve le quotient 1, la carte pensée sera au milieu du jeu quand on aura mis le tas qui la contient au milieu des autres. Mais aussitôt que l'un des quotients n'est plus entier, on trouve dans une ou plusieurs des tranches horizontales des cartes des deux espèces, comme dans l'exemple suivant où il y a 5 tas de 9 cartes :

1re *disposition.*					2e *disposition.*				
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

et si la carte pensée n'est pas dans le tas du milieu, après la distribution, elle peut se trouver dans un groupe qui ne forme pas le milieu du jeu, après qu'on aura mis le tas qui la contient au milieu des autres; comme si, par exemple, elle se trouve dans l'un des deux premiers tas de droite, ou dans l'un des deux derniers tas de gauche dans la seconde distribution précédente.

Mais alors il suffira de remplacer un zéro par un 1 pour pouvoir dire que la carte pensée se trouve dans un groupe qui peut occuper ensuite le milieu du jeu. Ainsi, que la carte soit dans le premier tas de gauche, on remplacera par 1 le 0 qui précède le premier 1, et ce tas étant mis au milieu des autres, la carte pensée se trouvera dans un groupe de trois cartes placé au milieu du jeu.

En raisonnant de la même manière pour les répartitions suivantes, on voit qu'à la fin la carte pensée ne peut manquer de se trouver au milieu du jeu.

Reste la question de savoir après combien de coups elle se trouvera sûrement au milieu du jeu. Si l'on a bien compris les explications précédentes, on en conclura qu'ayant divisé n par t, si le quotient e est entier on devra le diviser aussi par t, et ainsi de suite, tant que le quotient sera entier ; que si un quotient n'est pas entier, le premier nombre entier supérieur à ce quotient exprime le maximum du nombre de cartes (contenant la carte pensée) qui se trouvent dans un tas, dans la distribution correspondante ; mais que si ce maximum est un nombre pair, il faut y ajouter 1 pour avoir le groupe qui peut être placé au milieu du jeu et dont fasse partie la carte pensée. On divisera de même ce groupe par t, en opérant de la même manière ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à l'unité ou à un quotient plus petit que 1 : le nombre des divisions par t sera le nombre maximum des conps après lesquels le problème sera résolu. D'ailleurs il n'y a pas à craindre de manquer la solution en faisant plus de coups qu'il ne faut ; car quand la carte pensée est arrivée au milieu du jeu, elle s'y maintient, quel que soit le nombre des distributions que l'on puisse faire inutilement.

Si l'on considère les n cartes du tas qu'on a mis la première fois au milieu des autres, on voit que ces cartes se répartiront ensuite au milieu de la distribution sur les t nouveaux tas, en sorte que si n ne surpasse pas t, elles se trouveront dans la rangée horizontale du milieu, et il n'y en aura pas plus d'une dans chaque tas ; par conséquent, les tas étant ramassés comme on l'a dit, la carte pensée se trouvera au milieu du jeu.

Si l'on a $n > t$ mais que n ne surpasse pas t^2, les n cartes du milieu occuperont dans la distribution suivante plus d'une rangée horizontale, mais elles n'en occuperont pas plus de t, ces rangées étant toujours placées au milieu de la distribution ; en sorte que les tas étant ramassés, on sera certain que la carte pensée se trouve parmi les t cartes du milieu du jeu. Une nouvelle distribution isolant ces t cartes sur les t tas, la carte pensée se trouvera au milieu du tas qui la contient, et par suite au milieu du jeu quand on aura ramassé les tas suivant la règle.

On verra de même que si n est supérieur à t^2 mais non supérieur à t^3, il faudra trois distributions pour amener la carte pensée au milieu du jeu (nous ne comptons pas le premier partage du jeu, lequel n'avait d'autre objet que de présenter les cartes à une personne pour qu'elle en choisît une en faisant connaître le tas où elle se trouvait). En continuant le même raisonnement, on voit que le nombre des distributions doit être égal à la première valeur de d qui rend t^d égal ou supérieur à n.

AVERTISSEMENT.

Si tu comprends bien le fondement de ce jeu, il te sera bien aisé de le faire en tout nombre de cartes, et en plusieurs différentes façons. Car la finesse consiste en cela que les cartes d'un même rang par une autre disposition se séparent et se mettent en divers rangs, ce que je veux éclaircir entièrement par un exemple facile. Prends 16 cartes et les dispose seulement en deux rangs, tellement qu'il y en ait 8 d'un côté et 8 de l'autre. Lors sachant en quel rang est la carte pensée, tu es assuré que c'est une des huit; partant prenant les cartes de chaque rang à part, et les disposant de telle sorte que tu en mettes une au premier rang, l'autre au second, puis une au premier, puis une au second, et ainsi jusques à la fin, tu vois bien que des huit cartes entre lesquelles est la carte pensée, il en tombe quatre d'un côté et quatre de l'autre. Donc demandant lors en quel rang est la carte pensée tu es assuré que c'est une des quatre. Que si tu les ranges derechef ainsi que j'ai dit, de ces quatre-là il en tombera deux d'un côté et deux de l'autre; partant si tu sais lors en quel rang est la carte pensée, tu es assuré que c'est une des deux. Que si finalement tu les ranges encore comme il faut, de ces deux-là l'une se treuvera au premier rang, l'autre au second. Par conséquent, sachant lors en quel rang est la carte pensée, tu la devineras infailliblement.

Que si tu veux faire le jeu plus promptement, prenant les mêmes 16 cartes il te les faut disposer en quatre rangs, si bien qu'en chaque rang il y en ait 4; et après avoir su en quel rang est la carte pensée, disposant derechef les cartes en la façon ci-devant exposée, les quatre de ce rang-là se sépareront toutes, tellement qu'une tombera au premier rang, l'autre au second rang, l'autre au troisième, l'autre au quatrième. Partant tout incontinent tu peux deviner la carte pensée, sachant le rang où elle est alors.

Par ce même artifice quelques-uns font un autre jeu assez gentil, par lequel plusieurs cartes étant proposées à plusieurs personnes, on devine quelle carte chaque personne a pensée. Par exemple qu'il y ait quatre personnes, prends quatre cartes et les montrant à la première personne dis-lui qu'elle pense celle qu'elle voudra, et mets à part ces quatre cartes. Puis prends-en quatre autres et les présente de même à la seconde personne afin qu'elle pense celle qu'elle voudra; et fais encore tout de même avec la troisième et quatrième personne. Alors prends les quatre cartes de la première personne et les dispose en quatre rangs, et sur icelles range les quatre de la seconde personne, puis les quatre de la troisième, puis celles de la quatrième. Et présentant chacun de ces quatre rangs à chaque personne, demande à chacune en quel rang est la carte par elle pensée; car infailliblement la carte de la première personne sera la première du rang où elle se treuvera, la carte de la seconde personne sera la seconde de son rang, la carte de la troisième sera la troisième en son rang, et la carte de la quatrième sera la quatrième du rang où elle se treuvera. Et ainsi des autres, s'il y a plus de personnes, et par conséquent plus de cartes. La raison de ceci est bien évidente, partant je ne m'y amuserai pas davantage.

Voilà ce que j'avais dit de ce jeu en la première impression de ce livre. Mais en cette seconde je veux donner une autre façon de le faire beaucoup plus belle que toutes les précédentes. Prends un nombre de cartes qui soit le produit de la multiplication de deux nombres prochains, c'est-à-dire dont l'intervalle soit l'unité, comme 12 qui se fait multipliant 3 par 4, ou 20 qui se fait multipliant 4 par 5, ou 30 qui se fait multipliant 5 par 6, ou 42 qui se fait multipliant 6 par 7; puis accouple lesdites cartes 2 à 2, et ordonne qu'on en pense deux ainsi accouplées comme elles sont. Alors ramasse toutes lesdites cartes ensemble, mettant toujours celles qui sont accouplées l'une après l'autre. Après tu rangeras toutes ces cartes en un carré long en cette sorte. Mets les trois premières par même ordre l'une à côté de l'autre, puis range la 4 sous la 1; puis mets la 5 à côté de la troisième, la 6 sous la 4, la 7 à côté de la 5, la huitième sous la 6, et continue à faire de la sorte jusqu'à ce qu'au rang de celles que tu mets à côté l'une de l'autre, il y ait un nombre de cartes égal au plus grand côté de ton carré long, et un autre nombre de cartes égal au moindre côté du même carré long au rang de celles que tu mets l'une sous l'autre. Comme si tu as pris 20 cartes, le plus grand côté sera 5 et le plus petit 4. Partant tu rangeras tes cartes en la façon exposée jusqu'à ce qu'il y en ait 5 l'une à côté de l'autre, et 4 l'une sous l'autre, ce qui sera lorsque tu auras mis la 8 sous la 6. Cela fait, range à côté de la 4 la 9, la 10 et la 11 toutes de suite; puis mets la 12 sous la 9, et la 13 à côté de la 11, et la 14 sous la 12; après range tout de suite la 15, 16, 17 à côté de la 12, et finalement la 18, 19, 20 à côté de la 14.

Mais parce que je ne puis ici exprimer 20 cartes par nombres, prenons au lieu de 20 cartes 20 nombres, à savoir les 20 premiers depuis 1 jusques à 20. Et supposant que tu les aies accouplés au commencement 2 à 2, mettant ensemble 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8, et ainsi de suite, il est certain que suivant la règle donnée tu les rangeras comme tu vois qu'ils sont en la figure suivante :

A	1	2	3	5	7	B
C	4	9	10	11	13	D
E	6	12	15	16	17	F
G	8	14	18	19	20	H

Cela fait, tu demanderas en quel rang, ou en quels rangs, sont les deux nombre pensés, prenant les rangs d'un côté à l'autre, non pas de haut en bas, le premier étant AB, le second, CD, le troisième EF, le quatrième GH. Lors on te dira que les deux nombres pensés sont en un même rang, ou en deux rangs différents, spécifiant lesdits rangs. S'ils sont en un même rang, tiens pour règle assurée que ce sont deux nombres l'un à côté de l'autre, dont le premier tient le même rang dans son propre rang que tient ce rang même entre les autres rangs : comme si les deux nombres pensés sont au troisième rang, le premier d'iceux est le troisième de ce rang-là et les nombres pensés sont 15 et 16. Tu remarqueras donc attentivement les nombres 1 et 2 du premier rang, les nombres 9 et 10 du second rang, 15 et 16 du troisième, 19 et 20 du quatrième; car je les appelle les clefs du jeu, qui servent non-seulement pour deviner les deux nombres pensés lorsqu'ils sont tous deux en un même rang, mais aussi lorsqu'ils sont en deux divers rangs. D'autant qu'en ce cas, aussitôt qu'on t'a manifesté les deux rangs où sont les deux nombres pensés, il te faut prendre la clef du rang le plus haut, et sous le premier nombre de ladite clef tu trouveras au rang d'en bas un des deux nombres pensés, et à côté du second nombre de la clef, en égale distance, tu trouveras l'autre nombre pensé. Par exemple, si les deux nombres pensés sont 7 et 8, on te dira qu'ils sont au premier et au quatrième rang : prends donc la clef du plus haut de ces deux rangs, à savoir du premier, laquelle est 1 et 2, et descends droit depuis 1 jusques au quatrième rang, tu trouveras 8 un des nombres pensés. Après cherche à côté de 2 un nombre autant éloigné de 2 que 8 est éloigné de 1 : tu trouveras 7 l'autre nombre pensé. Que si l'on te dit que les nombres pensés sont au second et au quatrième rang, tu prendras la clef du second qui est 9 et 10, et descendant droit depuis 9 jusques au quatrième rang, tu trouveras 14 un des nombres pensés; et si tu prends à côté de 10 un nombre autant éloigné de 10 que 14 de 9, tu trouveras l'autre nombre pensé qui est 13.

La démonstration de ceci a même fondement que les règles données ci-devant; car il est évident que des nombres accouplés 2 à 2, il n'y en a jamais qu'un couple qui se treuve au même rang; de tous les autres l'un (des nombres) est toujours en un rang et l'autre en un autre. Tout ce à quoi il faut bien prendre garde, c'est à disposer lesdits nombres comme j'ai enseigné. Et pour mieux te faire comprendre cet ordre, j'ai mis ici les deux figures suivantes, l'une de 30 nombres, l'autre de 42:

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

1	2	3	5	7	9	11
4	13	14	15	17	19	21
6	16	23	24	25	27	29
8	18	26	31	32	33	35
10	20	28	34	37	38	39
12	22	30	36	40	41	42

Ce jeu se peut faire non pas seulement avec une personne, mais encore avec plusieurs en même temps. Car quand ils seront quatre ou cinq dont chacun pensera en même temps deux de ces cartes accouplées, après que tu les auras rangées en un carré long tu demanderas à chacun, l'un après l'autre, en quels rangs sont celles qu'il a pensées, et les devineras par la règle donnée.

PROBLÈME XIX

Deviner de plusieurs cartes celle que quelqu'un aura pensée.

PRENEZ un nombre quelconque de cartes et montrez-les par ordre à celui qui en voudra penser une; en les lui montrant vous en compterez secrètement le nombre, et vous lui direz de retenir le rang de la carte qu'il a pensée, c'est-à-dire si c'est la première, ou la seconde ou la troisième, etc. Puis vous ramasserez les cartes dans le même ordre que vous les avez présentées, et vous les mettrez sous les cartes que vous n'avez pas employées, s'il y en a. Alors vous annoncerez que comptant les cartes d'une certaine façon vous ferez tomber la carte pensée sous tel nombre que vous direz, soit le nombre des cartes que vous avez employées, soit un nombre plus grand : pour y réussir, vous demanderez le numéro du rang qu'occupait la carte pensée, et commençant à compter les cartes par la fin, vous donnerez à la dernière carte ce même numéro, 7 par exemple, et aux suivantes les numéros suivants 8, 9, 10, etc., jusqu'à ce que vous soyez arrivé au numéro exprimé par le nombre des cartes que vous avez primitivement employées; la carte qui recevra ce numéro sera la carte pensée. Si vous avez annoncé un nombre plus grand que celui des cartes employées, il vous suffira d'augmenter d'autant le numéro du rang de la carte pensée, et de partir de la somme obtenue, en comptant les cartes à partir de la fin.

DÉMONSTRATION.

Supposons que la carte pensée soit la septième et qu'on emploie 20 cartes. On arriverait de la carte pensée à la dernière en nommant successivement les cartes

$$7, 8, 9, 10, \ldots, 17, 18, 19, 20,$$

ou en ajoutant un nombre quelconque, 3 par exemple,

$$10, 11, 12, 13, \ldots, 20, 21, 22, 23;$$

donc on arrivera aussi de la dernière à la carte pensée en nommant les mêmes nombres dans le même ordre : la carte pensée tombera sous le nombre 20 dans le premier cas, et sous le nombre 23 dans le second.

PROBLÈME XX

De plusieurs nombres par ordre commençant par l'unité et disposés en rond, deviner lequel on aura pensé.

SOIENT par exemple les nombres de 1 à 12.

1

12 2

11 3

10 4

9 5

8 6

7

Une personne ayant pensé un nombre, 5 par exemple, dites-lui d'en toucher un autre, et supposons que ce soit 9. Pour arriver de 5 à 9 directement on doit compter 5, 6, 7, 8, 9; donc on arrivera de 9 à 5, en comptant à rebours, c'est-à-dire en repassant par les mêmes nombres 9, 8, 7, 6, 5, et en les appelant aussi 5, 6, 7, 8, 9. Quand on est arrivé de 9 à 5, si l'on fait un tour de cadran dans le même sens, c'est-à-dire si l'on compte 12 nombres de plus, on reviendra au même nombre 5 ; et cela revient à compter à rebours, à partir de 9, depuis 5 jusqu'à $9+12$ ou 21.

Si au contraire on avait pensé 9, et qu'on eût touché 5, on arriverait de 9 à 5 dans le sens direct en comptant

$$9, 10, 11, 12, 12+1, 12+2, 12+3, 12+4, 12+5 \text{ ou } 17 ;$$

donc on arriverait de 5 à 9 en parcourant le cercle en sens contraire et en comptant les mêmes nombres.

On conclut de là cette manière de deviner le nombre pensé : *Au nombre touché ajoutez le plus grand nombre du cercle*, *et dites à la personne qu'à partir du nombre qu'elle touche*, *inclusivement*, *elle compte à rebours sur le cercle depuis le nombre qu'elle a pensé jusqu'à la somme que vous avez obtenue*, *et en touchant à mesure chacun des nombres du cercle : le nombre sur lequel elle s'arrêtera sera le nombre pensé.*

Remarque. Il est évident qu'au nombre touché on peut ajouter plusieurs fois le plus grand nombre du cercle, comme aussi à la série des nombres à compter on peut substituer toute autre série qui contienne la même quantité de nombres.

On fait le même jeu avec des cartes, qu'on peut retourner quand on connaît la disposition qu'on leur a donnée, ce qui rend le jeu plus piquant.

PROBLÈME XXI

Disposer en trois rangs les 9 premières cartes depuis l'as jusques au 9, tellement que les points de chaque rang assemblés fassent toujours la même somme tant en long qu'en large et en diamètre.

	G	K	M	
A	4	9	2	B
C	3	5	7	D
E	8	1	6	F
	H	L	N	

Je ne saurais mieux te déclarer le sens de la proposition de ce problème, ni mieux t'enseigner le moyen de le parfaire, qu'en t'exposant la figure que j'ai mise à côté, où tu vois que les neuf premiers nombres sont disposés en trois rangs tellement que chacun des rangs AB, CD, EF fait la somme de 15, et derechef chacun des trois rangs GH, KL, MN fait semblablement 15, et les nombres qui sont disposés en diamètre, à savoir d'un côté 4, 5, 6, et de l'autre 2, 5, 8, font encore 15. Quant à la règle générale pour disposer ainsi tous les nombres depuis l'unité jusqu'à un nombre carré, quel qu'il soit, j'en parlerai en l'avertissement.

AVERTISSEMENT.

J'ai vu en plusieurs auteurs disposés en cette sorte tous les nombres depuis l'unité jusques aux sept nombres carrés consécutifs commençant à 9, à savoir 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Mais la règle pour les disposer ainsi je ne l'ai trouvée en aucun auteur. Or après avoir beaucoup spéculé là-dessus, j'ai enfin treuvé une règle très-belle et très-facile pour tous les carrés impairs; mais pour les pairs je n'ai pu rencontrer aucune jusques à présent qui soit parfaite et qui me contente. Quant à la règle des carrés impairs, elle est telle. Fais un carré parfait ABCD (fig. 1) et divise chaque côté en autant de parties égales qu'il y a d'unités au côté du carré que tu veux disposer.

Fig. 1.

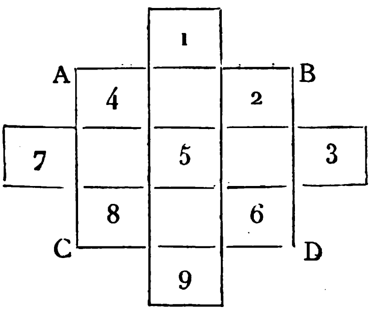
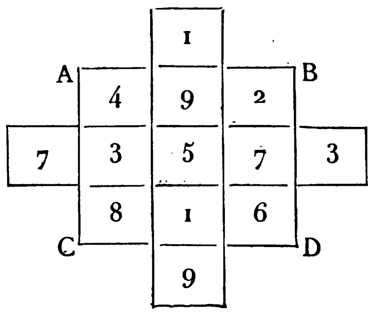
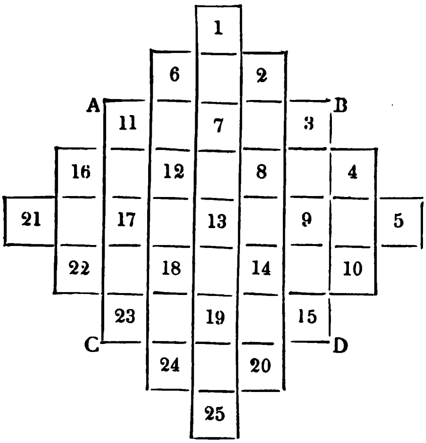
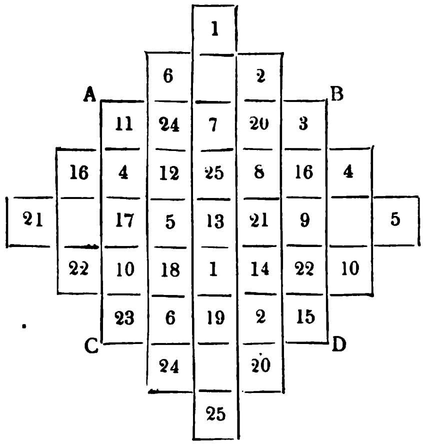


Fig. 2.



Puis tire des lignes parallèles aux côtés tant en long qu'en large des points de tes divisions, et tout le carré se treuvera divisé en autant de petits carrés que tu as de nombres à disposer : comme si tu veux disposer 9 nombres, tout le carré ABCD sera divisé en 9 petits carrés, comme tu vois en la figure. Après allonge sur tous les côtés les lignes tirées des points de tes divisions, et fais derechef des petits carrés semblables aux premiers qui aillent toujours décroissant du nombre de deux jusqu'à ce qu'ils se terminent en un seul petit carré. Lors range tes nombres suivant l'ordre naturel des nombres, et mets 1 au petit carré d'en haut, et le 2 et le 3 aux petits qui sont à l'entour du même diamètre que le premier, c'est-à-dire que 1, 2, 3 se doivent disposer dans les trois petits carrés qui vont en biaisant, et semblablement dans trois autres tu mettras 4, 5, 6, et dans trois autres 7, 8, 9, comme tu vois en la première figure. Cela fait, les nombres qui se treuveront dans ton carré ABCD seront justement colloqués en leurs places, à savair 2, 4, 5, 6, 8; mais les autres qui sont demeurés dehors tu les mettras dans les places vides qui restent, usant seulement de transposition, c'est à savoir que ceux d'en haut tu les mettras en bas, et ceux d'en bas tu les porteras en haut; ceux du côté gauche passeront au côté droit, et ceux du côté droit iront au côté gauche, comme tu vois en la seconde figure. Ainsi tous tes nombres seront disposés en la façon que requiert ce problème. Mais remarque que la règle générale de la transposition est qu'il faut porter le nombre qui se treuve hors de ton carré dans le même rang où il se treuve autant de places plus avant qu'il y a d'unités au côté de ton carré: comme en notre exemple il le faut porter trois places plus avant à cause que 3 est le côté de 9, et si nous avions pris au lieu de 9 les carrés 25 ou 49, on porterait les nombres qui se treuveraient hors des carrés 5 places ou 7 places plus avant, à cause que 5 est le côté de 25 et 7 le côté de 49. Pour mieux te faire entendre cette règle, j'ai disposé ici en même sorte tous les nombres depuis 1 jusques à 25 comme tu vois ès deux figures suivantes.





Ainsi les 25 nombres sont disposés comme il faut dans le carré ABCD, car la somme de chaque rang est toujours 65. La même règle sert en tous autres nombres, pourvu qu'ils soient pris en continuelle progression arithmétique, encore qu'ils ne commencent point par 1 et que la différence de la progression ne sera point 1, comme si tu veux ainsi disposer les 9 nombres suivants 4, 7, 10, 13,....., 28, qui sont en progression arithmétique dont la différence est 3 (*a*). On peut donc, pour faire le jeu avec neuf cartes, laisser l'as, et prendre les 9 autres depuis le 2 jusques au 10.

Voilà tout ce que je puis dire touchant la règle des carrés im-

(*a*) En prenant des nombres en progression arithmétique on est certain de pouvoir faire le carré; mais on peut aussi le remplir avec d'autres nombres; ainsi le carré de 25 peut être fait avec les nombres 2, 5, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 20, 21, 22, 25, 27, 30, 31, 32, 35, 37, 40, 41, 42, 45, 47, 50, 51. (A. L.)

pairs. Quant à la règle des carrés pairs, j'ai déjà dit que je n'en ai point encore treuvé une parfaite : c'est pourquoi je ne m'amuserai pas à mettre par écrit plusieurs particulières observations que j'ai faites sur ce sujet, avec lesquelles néanmoins j'ai disposé tous les nombres depuis l'unité jusques aux carrés 100 et 144, ce que personne n'avait encore fait devant moi (*a*).

ADDITION.

Nous allons donner la démonstration du procédé employé par Bachet pour la construction des carrés impairs ; nous ferons ensuite connaître quelques autres procédés pour la construction des mêmes carrés, et une méthode générale pour la construction des carrés pairs.

En se reportant à la première figure du carré de 5, on voit que les deux diagonales sont remplies par la construction : chaque diagonale est une progression de 5 termes ayant 13 pour terme moyen ; la somme des termes de chacune d'elles est donc 13×5, c'est-à-dire la cinquième partie de la somme totale 13×25 ; ainsi elles sont telles que le veut le problème. Pour nous rendre compte des horizontales et des verticales, imaginons les termes de la progression comme étant formés chacun de deux nombres de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
1+0, & 2+0, & 3+0, & 4+0, & 5+0, \\
1+5, & 2+5, & 3+5, & 4+5, & 5+5, \\
1+10, & 2+10, & 3+10, & 4+10, & 5+10, \\
1+15, & 2+15, & 3+15, & 4+15, & 5+15, \\
1+20, & 2+20, & 3+20, & 4+20, & 5+20,
\end{array}$$

(*a*) On trouve dans un livre imprimé à Madrid en 1599 la figure que donne Bachet et la construction des carrés magiques jusqu'à celui dont le côté est 16. L'auteur est Diego Palomino. (A. L.)

en sorte qu'ils seront les combinaisons de chacun des nombres 1, 2, 3, 4, 5 avec chacun des nombres 0, 5, 10, 15, 20, combinaisons que nous représenterons en remplaçant le signe + par une virgule, comme 2,15 au lieu de 2 + 15. En les mettant dans la figure imaginée par Bachet, nous aurons la disposition suivante:

				1, 0				
			1, 5		2, 0			
	A	1, 10		2, 5		3, 0	B	
	1, 15		2, 10		3, 5		4, 0	
1, 20		2, 15		3, 10		4, 5		5, 0
	2, 20		3, 15		4, 10		5, 5	
		3, 20		4, 15		5, 10		
			4, 20		5, 15			
				5, 20				

Nous avons ainsi dix diagonales : en les prenant à partir de leur case la plus élevée, cinq se dirigent vers la droite et cinq vers la gauche ; chacune des premières contient cinq fois l'un des nombres 0, 5, 10, 15, 20 ; et chacune des autres contient cinq fois l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5. Nous désignerons chaque diagonale par le nombre qui s'y trouve répété cinq fois. Tout nombre se trouve à l'intersection de deux diagonales, et par conséquent il est formé de la somme des deux nombres qui sont répétés cinq fois dans ces deux diagonales.

Cela posé, considérons d'abord les nombres qui sont dans le carré. Dans une bande horizontale ou verticale, on ne peut pas trouver deux fois l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, car la diagonale de l'un de ces nombres ne peut pas couper deux fois la même bande horizontale ou verticale. Par la même raison, on ne peut pas trouver dans la même bande deux fois l'un des nombres 0, 5, 10, 15, 20.

Considérons maintenant un nombre situé hors du carré, le nombre (1, 5) par exemple situé au-dessus de la partie supérieure du carré : le premier nombre 1 ni le seeond nombre 5 ne se trouvent dans la verticale du carré qui passe par le nombre (1, 5), puisque les diagonales de ces nombres ne coupent cette verticale qu'en dehors du carré. La diagonale de 1 et celle de 5 n'ayant chacune que cinq cases ne coupent pas la cinquième bande horizontale qui est au-dessous de (1, 5) ; donc si l'on descend ce nombre dans cette horizontale, c'est à-dire de cinq rangs, les cases de rang impair étant vides, il tombera dans une case vide de cette bande, et après l'introduction de ce nombre cette bande horizontale ne contiendra pas deux fois l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, ni l'un des nombres 0, 5, 10, 15, 20. Il en sera de même de tous les autres nombres placés hors du carré à la partie supérieure, lesquels se placeront tous au-dessous de la bande horizontale du milieu du carré.

Le même raisonnement s'applique aux nombres placés en dehors du carré au-dessous de sa partie inférieure, lesquels viendront tous se placer au-dessus de la bande horizontale du milieu du carré.

Quant aux nombres qui sont hors du carré sur la droite et qui vont être transportés à gauche de la verticale du milieu du carré, on voit que la transposition d'un nombre qui contient un terme commun avec l'un des précédents ne se fera ni dans la même verticale ni dans la même horizontale où le précédent a été transporté : par exemple, le nombre (4, 0) de droite étant transporté de cinq cases tombera au delà de la verticale qui contient le nombre (4, 20) d'en bas, et celui-ci étant transporté de cinq cases tombe au delà de l'horizontale qui contient l'autre nombre. Donc, cette troisième transposition n'amène aucun des nombres 1, 2, 3, 4, 5, à se trouver deux fois dans une bande horizontale ou verticale; et il en est de même pour les nombres 0, 5, 10, 15, 20.

Le même raisonnement se reproduit pour les nombres qui sont hors du carré sur la gauche, lesquels viennent se placer à la droite de la verticale du milieu du carré.

Donc, quand le carré est rempli, aucune bande horizontale ou verticale ne contient deux fois l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, ni deux fois l'un des nombres 0, 5, 10, 15, 20; et comme chaque bande contient dix nombres, il faut que tous les nombres précédents s'y trouvent; donc la somme des nombres d'une quelconque des bandes est $3 \times 5 + 10 \times 5$ ou 13×5, ce qui démontre l'exactitude de la construction.

Les carrés construits suivant les conditions précédemment énoncées s'appellent carrés *magiques*. La construction d'un carré magique peut toujours se faire par les deux progressions

$$1, 2, 3, 4, \ldots r,$$
$$0, r, 2r, 3r, \ldots (r-1)r,$$

dans lesquelles r désigne le côté du carré; il suffit de satisfaire aux trois conditions suivantes :

1° Remplir un premier carré de côté r avec les nombres 1, 2, 3,... r écrits dans chaque ligne horizontale ou verticale, de manière que la somme des nombres de chaque bande horizontale soit la même que celle des nombres de chaque bande verticale et qu'il en soit de même de la somme des nombres de chaque diagonale.

2° Remplir un second carré de côté r avec les nombres 0, r, $2r$, $3r$,... aux mêmes conditions que le premier carré.

3° Faire en outre les deux carrés de manière qu'en ajoutant deux à deux les nombres qui occupent les mêmes cases dans ces deux carrés, les sommes soient toutes différentes les unes des autres.

Car il est évident qu'en mettant dans un troisième carré chacune des sommes précédentes, chaque somme étant mise dans la même case que les nombres d'où elle provient, ce troisième carré sera magique.

Nous allons donner des exemples des dispositions les plus intéressantes avec les règles qui s'y rapportent.

§ 1. *Méthode des diagonales.*

Pour former le premier carré, on écrit dans la première horizontale les nombres 1, 2, 3,... dans un ordre quelconque ; toutefois le nombre moyen doit occuper l'un des angles (ici on a placé les nombres en comptant les cases de 2 en 2). Puis on écrit chaque nombre en diagonale dans le sens où le nombre moyen occupe toute une diagonale du carré, et quand une moitié du carré est remplie on remplit l'autre moitié de la même manière en reprenant les nombres à partir de celui qui n'est encore écrit qu'une fois.

PREMIER CARRÉ.

1	5	2	6	3	7	4
5	2	6	3	7	4	1
2	6	3	7	4	1	5
6	3	7	4	1	5	2
3	7	4	1	5	2	6
7	4	1	5	2	6	3
4	1	5	2	6	3	7

SECOND CARRÉ.

21	42	14	35	7	28	0
0	21	42	14	35	7	28
28	0	21	42	14	35	7
7	28	0	21	42	14	35
35	7	28	0	21	42	14
14	35	7	28	0	21	42
42	14	35	7	28	0	21

Pour former le second carré, on écrit dans la première horizontale les nombres 0, r, 2 r, 3 r,... dans un ordre quelconque, le moyen étant dans l'angle opposé à celui qu'occupe le moyen dans l'autre carré (ici on a placé les nombres à partir de la dernière case et en comptant les cases de 2 en 2 dans le sens rétrograde). Puis on écrit chaque nombre en diagonale dans le sens où le nombre moyen occupe toute une diagonale du carré ; et quand une moitié du carré est remplie, on remplit l'autre moitié de la même manière en reprenant les nombres à partir de celui qui n'est encore écrit qu'une fois.

En ajoutant les deux carrés, on a le carré magique.

Puisque dans la première horizontale de chaque carré on peut disposer d'une manière quelconque tous les nombres excepté un, on peut produire par cette méthode un très-grand nombre de dispositions différentes dans le carré magique. L'une de ces dispositions est le carré de Bachet ; elle correspond à la succession spéciale que nous avons donnée aux nombres dans la première horizontale des carrés précédents.

Manuel Moscopule, auteur plus ancien que Bachet, mais dont celui-ci n'a pas connu le manuscrit, donne une règle pour écrire immédiatement les nombres dans les carrés magiques qui ont la disposition spéciale dont nous venons de parler. Voici en quoi elle consiste.

Ayant placé l'unité sous la case du milieu, descendez verticalement

CARRÉ MAGIQUE.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	2	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

d'une case, puis avancez horizontalement d'une case et placez le nombre 2 ; à partir de ce nombre, descendez verticalement d'une case, puis avancez horizontalement d'une case et placez le nombre 3 ; faites de même pour les nombres suivants 4, 5,... jusqu'à la racine r du carré ; alors descendez de deux cases pour placer le nombre suivant $r + 1$, ce que vous ferez également toutes les fois qu'il faudra placer le nombre qui suit un multiple de la racine ; les autres nombres se placeront tous comme les premiers nombres 2, 3,...r.

Lorsque dans ces déplacements vous serez arrivé au bas du carré et qu'il faudra descendre, vous remonterez à la case supérieure de la même bande verticale, et vous compterez cette case comme si vous étiez descendu d'une case au-dessous de la case inférieure ; de même si le déplacement horizontal vous obligeait à sortir du carré sur la droite, vous vous transporteriez à l'autre extrémité de la même bande horizontale, et vous en prendriez la première case comme étant celle qu'exigeait le déplacement horizontal.

§ 2. — *Méthode des horizontales.*

Nous ne considérerons qu'un seul cas de cette méthode ; mais il peut donner une grande variété de dispositions dans les carrés magiques.

Pour former le premier carré, on écrit les nombres 1, 2, 3,... r dans la première ligne horizontale dans un ordre quelconque ; on écrit ces mêmes nombres dans la seconde horizontale et dans le même ordre, mais en commençant par celui qui suit le nombre du milieu dans la ligne précédente ; on passe de la seconde ligne à la troisième comme on a passé de la première à la seconde, et ainsi des autres lignes jusqu'à la dernière.

PREMIER CARRÉ.

5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4
1	4	2	5	3

SECOND CARRÉ.

5	15	0	10	20
0	10	20	5	15
20	5	15	0	10
15	0	10	20	5
10	20	5	15	0

Pour le second carré, on met dans la première horizontale les nombres 0 r, 2 r,.,. dans un ordre quelconque ; on écrit ces mêmes nombres dans la seconde horizontale et dans le même ordre, mais en commençant par celui qui est au milieu dans la ligne précédente ; il en est de même des autres lignes horizontales.

En faisant la somme des nombres qui se correspondent, on a le carré suivant qui est magique :

10	18	1	14	22
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15
17	5	13	21	9
11	24	7	20	3

Si dans le premier carré on remplit la première horizontale des nombres 1, 2, 3,... r, en commençant par la case du milieu et en parcourant les cases de 2 en 2, puis qu'on remplisse de même le second carré avec les nombres 0, r, 2 r,... mais en comptant les cases de 2 en 2 dans le sens rétrograde (comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent), on a une disposition de carré magique qui était connue de Moscopule et pour laquelle il a donné la règle suivante :

Ayant mis l'unité au milieu de la première horizontale, descendez verticalement de deux cases, puis avancez horizontalement d'une case et placez le nombre 2 ; à partir de ce nombre, descendez verticalement de deux cases, puis avancez horizontalement d'une case et placez le nombre 3 ; faites de même pour les nombres suivants 4, 5,... jusqu'à la racine r du carré ; mais pour placer le nombre suivant $r + 1$, vous descendrez verticalement de 4 cases sans avancer horizontalement ; et vous ferez de même toutes les fois que vous aurez à placer le nombre qui suit un multiple de la racine ; tous les autres nombres se placeront comme vous avez placé les premiers 2, 3, 4,... r. Quand ces différents mouvements vous obligeront à sortir du carré, vous observerez ce qui a été dit à la première règle de Moscopule.

Si l'on remplit la première horizontale du premier carré des nombres 2, 4, 6,... 1, 3, 5,...r, et que l'on forme les horizontales suivantes comme dans le cas précédent, puis que l'on construise le second carré en plaçant les nombres 0, r, $2r$,... consécutivement dans la première horizontale à partir du milieu, et dans chacune des suivantes, en commençant par le second nombre de la précédente, on obtient un carré magique suivant la méthode *indienne*. On passe d'un nombre au suivant en montant, puis en avançant d'une case; mais les nombres $r+1$, $2r+1$,... se placent au-dessous des nombres r, $2r$,.. Voici le carré de 9 construit de cette manière :

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

En conservant la succession des nombres placés dans la première horizontale du premier carré, le second ne changeant pas, et en faisant avancer ou reculer la progression d'un certain nombre de rangs, on peut faire occuper au nombre 1, dans ce premier carré et dans le carré magique, chacune des cases où se trouvent les nombres 2, 3, 4,... r, sans que la règle soit modifiée.

§ 3. — *Méthode des horizontales et des verticales.*

Les méthodes précédentes ne s'appliquent qu'aux carrés impairs ; nous allons appliquer celle-ci aux carrés pairs.

Dans la progression 1, 2, 3, 4,... r, deux nombres également distants des extrêmes et les deux extrêmes eux-mêmes sont dits nombres *complémentaires*.

Il en est de même des termes de la progression 0, r, $2r$, $3r$,...

Deux horizontales sont dites *correspondantes* lorsqu'elles sont à la même distance des deux côtés horizontaux du carré. La même dénomination s'applique à deux verticales également distantes des deux côtés verticaux du carré. Dans une ligne, les cases extrêmes ainsi que deux cases également distantes de celles-là sont des cases *correspondantes*.

Pour former le premier carré, on remplit d'abord la première dia-

PREMIER CARRÉ DE 6.

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

gonale des nombres 1, 2, 3,... r, les cases correspondantes étant occupées par des nombres complémentaires ; puis on remplit la seconde avec les complémentaires des nombres qui remplissent la première, en les plaçant dans les cases horizontales correspondantes ; ensuite on remplit les bandes verticales chacune avec le nombre qui s'y trouve déjà et son complémentaire, de manière que ces deux nombres y soient le même nombre de fois, et quand on a rempli une verticale, on remplit sa correspondante en y inscrivant les compléments des nombres qui sont dans la première.

Pour former le second carré, on remplit d'abord la première diagonale des nombres o, *r*, 2 *r*... suivant la règle précédente ; puis on remplit la seconde avec les complémentaires des nombres qui remplissent la première, en les plaçant dans les cases verticales correspondantes ; ensuite on remplit les bandes horizontales, comme on a rempli les bandes verticales du premier carré, mais en y observant une règle spéciale.

SECOND CARRÉ DE 6.

0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

Si une horizontale du premier carré et sa correspondante contiennent verticalement deux nombres complémentaires, il faut dans le second carré mettre le même nombre dans chaque horizontale aux cases occupées par ces deux nombres complémentaires. Quand on a satisfait à cette condition, on achève de remplir les bandes horizontales, et toujours de manière que les bandes correspondantes contiennent verticalement des nombres complémentaires.

Ainsi, dans le premier carré de 6, la première horizontale et sa correspondante donnant 5 et 2 à la seconde verticale, on met dans le second carré le même nombre 30 à la seconde et à la cinquième case de la première horizontale ; et par suite le même nombre o sera placé aux mêmes cases dans l'horizontale correspondante. Dans la seconde horizontale du premier carré et sa correspondante, on trouve 4 et 3 à la troisième verticale ; on mettra donc dans le second carré le même nombre 24 à la troisième et à la quatrième case de la seconde horizontale. Enfin, dans la troisième et la quatrième horizontale du premier carré, on trouve 6 et 1 à la première verticale, et l'on met dans le second carré le même nombre 18 à la première et à la dernière case de la troisième horizontale. On achève alors de remplir les horizontales suivant la règle ; et en faisant les sommes on a le carré magique.

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Formons de la même manière le carré magique 10. Le premier carré étant formé comme on le voit ici, et les diagonales étant remplies dans le second carré, on prend dans le premier la première horizontale et sa correspondante, et l'on voit que les nombres 9, 8, 4, 7, 3, 2 de la première correspondent à leurs complémentaires dans la seconde ; on mettra donc dans la première horizontale du second carré le même nombre 90 ou le même nombre 0 aux cases correspondantes de cette ligne ; et comme il y a déjà deux 0 dans la ligne, on mettra une fois deux 0, et deux fois deux 90. La seconde horizontale du premier carré a sa correspondante constituée de la même manière qu'elle ; et il en est de même de la cinquième et de la sixième. Mais à la troisième et à la huitième, les premiers nombres 10 et 1 étant complémentaires, on

PREMIER CARRÉ DE 10.

1	9	8	4	6	5	7	3	2	10
10	2	3	7	6	5	4	8	9	1
10	2	3	4	5	6	7	8	9	1
1	9	8	4	5	6	7	3	2	10
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
1	9	8	4	6	5	7	3	2	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	2	3	7	6	5	4	8	9	1
1	2	3	7	6	5	4	8	9	10

placera le même nombre 70 ou le même nombre 20 aux deux extrémités de la troisième horizontale du second carré. Enfin, dans la quatrième et la septième horizontale du premier carré, on trouve les nombres complémentaires 5 et 6 à la cinquième verticale ; on mettra donc le même nombre 30 ou le même nombre 60 dans les cases du milieu de la quatrième horizontale du second carré.

SECOND CARRÉ DE 10.

0	90	90	0	90	0	0	90	90	0
80	10	10	80	80	80	80	10	10	10
70	20	20	20	70	70	70	20	20	70
30	60	60	30	30	30	30	60	60	60
50	50	50	40	40	40	40	50	50	40
40	40	40	50	50	50	50	40	40	50
60	30	30	60	60	60	60	30	30	30
20	70	70	70	20	20	20	70	70	20
10	80	80	10	10	10	10	80	80	80
90	0	0	90	0	90	90	0	0	90

La règle spéciale étant observée à l'égard de toutes les horizontales qui en exigent l'application, on achève, suivant la règle générale, de remplir chaque horizontale des deux nombres complémentaires qu'elle doit contenir, de manière que chacun d'eux s'y trouve le même nombre de fois et que les cases homologues des horizontales correspondantes soient remplies de nombres complémentaires. On fait ensuite les sommes et l'on a le carré magique suivant :

1	99	98	4	96	5	7	93	92	10
90	12	13	87	86	85	84	18	19	11
80	22	23	24	75	76	77	28	29	71
31	69	68	34	35	36	37	63	62	70
60	59	58	47	45	46	44	53	52	41
50	49	48	57	55	56	54	43	42	51
61	39	38	64	66	65	67	33	32	40
21	72	73	74	25	26	27	78	79	30
20	82	83	17	16	15	14	88	89	81
91	2	3	97	6	95	94	8	9	100

Pour troisième exemple, nous donnerons la construction d'un carré magique de 8.

PREMIER CARRÉ DE 8.

7	6	1	4	5	8	3	2
7	3	8	5	4	1	6	2
2	6	1	5	4	8	3	7
2	6	8	4	5	1	3	7
7	6	8	4	5	1	3	2
2	3	1	4	5	8	6	7
2	3	8	5	4	1	6	7
7	3	1	5	4	8	6	2

SECOND CARRÉ DE 8.

8	48	48	8	8	48	48	8
56	0	0	56	0	56	0	56
40	16	40	16	16	40	16	40
24	24	24	32	32	32	32	24
32	32	32	24	24	24	24	32
16	40	16	40	40	16	40	16
0	56	56	0	56	0	56	0
48	8	8	48	48	8	8	48

CARRÉ MAGIQUE DE 8.

15	54	49	12	13	56	51	10
63	3	8	61	4	57	6	58
42	22	41	21	20	48	19	47
26	30	32	36	37	33	35	31
39	38	40	28	29	25	27	34
18	43	17	44	45	24	46	23
2	59	64	5	60	1	62	7
55	11	9	53	52	16	14	50

Dans les deux premiers carrés, on n'a pas rempli les diagonales en y plaçant par ordre les nombres 1, 2, 3,.... o, r, 2 r,.... ; mais on y a toutefois placé ces nombres de manière que deux nombres complémentaires y occupent toujours deux cases correspondantes.

Dans les carrés pairement pairs, on peut faire en sorte que les bandes horizontales correspondantes du premier carré soient identiques deux à deux ; alors on est dispensé d'avoir égard à la règle spéciale pour la construction du second carré qui reste seulement soumis pour les bandes horizontales aux lois générales de la construction du premier par bandes verticales. En voici un exemple :

PREMIER CARRÉ DE 8.

8	2	3	5	4	6	7	1
1	7	6	4	5	3	2	8
1	7	6	4	5	3	2	8
8	2	3	5	4	6	7	1
8	2	3	5	4	6	7	1
1	7	6	4	5	3	2	8
1	7	6	4	5	3	2	8
8	2	3	5	4	6	7	1

La disposition spéciale que nous avons donnée aux lignes horizontales et aux lignes verticales dans les deux premiers carrés, disposition dont on aperçoit facilement la loi, donne les carrés magiques pairs tels que les rapportent les anciens auteurs ; comme ces carrés avaient été pris des talismans hébraïques, le nombre 1 est toujours placé à droite ; nous le mettrons à gauche, en faisant connaître la règle que Moscopule

SECOND CARRÉ DE 8.

0	56	56	0	0	56	56	0
48	8	8	48	48	8	8	48
40	16	16	40	40	16	16	40
24	32	32	24	24	32	32	24
32	24	24	32	32	24	24	32
16	40	40	16	16	40	40	16
8	48	48	8	8	48	48	8
56	0	0	56	56	0	0	56

CARRÉ MAGIQUE DE 8.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

a donnée pour construire de cette manière les carrés pairement pairs (*a*). Voici comment il faut procéder :

Inscrivez dans un premier carré et par bandes horizontales les nombres consécutifs qu'il faut disposer dans un carré pour faire un carré magique.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Prenez un second carré, et inscrivez-y d'abord dans les diagonales les nombres qui sont dans les diagonales du premier (le lecteur est prié de faire la figure, ou de suivre l'explication sur le carré magique précédent supposé retourné de droite à gauche).

Puis vous y inscrirez les autres nombres en conservant les uns dans les mêmes cases, et en échangeant les autres comme il sera dit plus loin.

Dans la première horizontale vous conserverez 1, vous échangerez 2 et 3, vous conserverez 4 et 5, vous échangerez 6 et 7, et ainsi de suite de 2 en 2, jusqu'au dernier nombre que vous conserverez.

(*a*) Moscopule n'a pas donné de règle pour les carrés pairement impairs, quoiqu'il donne deux exemples de ces carrés.

Dans la deuxième bande horizontale, c'est le contraire : vous échangez le premier nombre, vous conservez les deux suivants, vous échangez les deux nombres qui viennent après, et ainsi de suite de 2 en 2 jusqu'au dernier nombre que vous échangez. Vous traiterez la troisième horizontale comme la seconde, la quatrième et la cinquième comme la première, la sixième et la septième comme la seconde, et ainsi de suite de 2 en 2 bandes ; et l'opération sera achevée quand vous l'aurez faite sur les deux bandes du milieu.

Quant aux nombres qui ne doivent pas rester à leurs cases, on les échange avec ceux qui sont placés dans les bandes horizontales correspondantes à la même distance de la case de droite que les premiers le sont de la case de gauche, ou *vice versa ;* ainsi, dans le carré de 8, on échange 2 et 63, 3 et 62, 6 et 59, 7 et 58 ; puis 9 et 56, 12 et 53, 13 et 52, etc. La somme de deux nombres échangés est égale à la somme des extrêmes de la progression qui forme le carré, car ces deux nombres sont toujours à égale distance des extrêmes.

On peut encore construire les carrés magiques pairement pairs par une méthode qui dispense de faire deux carrés.

1		3			6		8
	10		12	13		15	
17		19			22		24
	26		28	29		31	
	34		36	37		39	
41		43			46		48
	50		52	53		55	
57		59			62		64

On remplit les cases horizontales de 2 en 2 en mettant dans chacune le nombre correspondant à son rang, avec cette exception qu'on ne remplit pas les deux cases du milieu d'une bande quand on a rempli la première case de la bande, et qu'on les remplit dans la bande suivante ; de plus, les deux bandes horizontales du milieu doivent être remplies de la même manière.

Lorsqu'on a placé le dernier nombre r^2, ici 64, on recommence à partir de ce nombre, et de droite à gauche, à compter 1, 2, 3, 4,... et l'on inscrit ceux de ces nombres qui correspondent à des cases vides. On obtient ainsi le carré magique suivant :

1	63	3	61	60	6	58	8
56	10	54	12	13	51	15	49
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	14	52	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

Voici le carré de 4 construit de la même manière :

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Malgré la longueur de cette addition au problème XXI de Bachet, nous n'avons pu qu'effleurer la question des carrés magiques ; le lecteur qui s'y intéresserait pourra consulter les Mémoires de l'Académie des sciences, tome V, et années 1705, 1710, 1750 ; les Mémoires des Savants étrangers, tome IV, et différents travaux d'Euler recueillis dans les *Commentationes Arithmeticæ.* Outre l'ouvrage de Diego Palomino dont nous avons parlé précédemment, nous citerons :

Traité des Carrés sublimes, par Poignard ;

De Quadratis magicis commentatio, auctore C. Mollweide.

On trouve encore des renseignements sur les carrés magiques dans les ouvrages suivants :

Du Royaume de Siam, par de La Loubère ;

Arithmologia, par le P. Kircher ;

Nouveaux Eléments de Géométrie (par MM. de Port-Royal) ;

Nouveaux Eléments de Mathématiques, par Jean Prestet ;

Récréations mathématiques, par Ozanam.

PROBLÈME XXII

Si deux ont proposé entre eux de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse point un nombre préfix, pour voir, ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront, qui arrivera plus tôt à quelque nombre prescrit, faire si bien qu'on arrive toujours le premier au nombre destiné.

Soit 100 le nombre destiné, et que le nombre préfix qu'on ne peut passer soit 10, si bien qu'il soit permis de dire 10 ou tout nombre moindre. Par exemple, le premier die 7, le second 10, qui font 17, puis le premier prenne 5, qui font 22, et le second prenne 8, qui font 30, et ainsi toujours l'un après l'autre alternativement prenne un nombre à plaisir, ne surpassant point 10 ; et qu'on ajoute toujours les nombres qu'ils diront, jusqu'à ce qu'on parvienne à 100, et que celui qui dira le nombre accomplissant 100 soit réputé pour vainqueur. Or, pour vaincre infailliblement, ajoute 1 au nombre qu'on ne peut passer, qui est ici 10, tu auras 11 ; et ôte continuellement 11 du nombre destiné 100, tu auras ces nombres :

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1

(c'est-à-dire à partir de 1 tous les multiples de 11 plus 1). Partant, si tu commences à dire 1, quel nombre que ton adversaire die, il ne pourra t'empêcher de parvenir ensuite à 12, et de la même manière à 23, puis à 34, à 45, à 56, à 67, à 78, à 89, et finalement à 100. Dont il appert que si les deux qui jouent à ce jeu savent tous deux la finesse, infailliblement celui qui commence emportera la victoire. Toutefois, ce n'est pas règle générale, car si l'on changeait le nombre destiné, à savoir 100, ou le nombre qu'on ne peut passer, à savoir 10, la chose pourrait aller autrement, comme je déclarerai ci-après.

AVERTISSEMENT.

On peut apporter de la diversité en la pratique de ce jeu. Premièrement à cause que le nombre destiné pour y parvenir peut être quel nombre que l'on voudra choisir : par exemple, au lieu de 100, on se pourrait proposer 120, et alors les nombres qu'il faudrait remarquer seraient 109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10 (c'est-à-dire à partir de 10 les multiples de 11 plus 10), où il appert aussi que celui qui commencerait gagnerait infailliblement.

Secondement, pour ce que le nombre préfix que l'on ne peut passer se peut aussi changer à plaisir, par exemple, voulant toujours parvenir à 100, on pourrait, pour le nombre préfix, choisir 8, et alors les nombres qu'il faudrait remarquer seraient

91, 82, 73, 64, 55. 46, 37, 28, 19, 10, 19

(c'est-à-dire à partir de 1 les multiples de 9 plus 1); et celui qui commencerait gagnerait aussi. Mais si l'on prenait 9 pour le nombre préfix, les nombres à remarquer seraient

90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10;

partant, il appert que celui qui commencerait pourrait perdre si l'autre entendait le secret du jeu, d'autant que le premier ne pouvant passer 9, ne pourrait parvenir à 10, et ne pouvant dire moins que 1, il ne pourrait empêcher que l'autre ne parvînt à 10; et ainsi des autres nombres 20, 30, etc., jusqu'à 100.

Mais il est certain que tous ces jeux ne se font pas ordinairement avec ceux qui les savent déjà, ains avec ceux qui les ignorent. Partant, si ton adversaire ne sait pas la finesse du jeu, tu ne dois pas prendre toujours tous les nombres remarquables et nécessaires pour gagner infailliblement; car faisant ainsi tu découvriras trop l'artifice, et s'il est homme de bon esprit il remarquera tout incontinent ces nombres-là, voyant que tu choisis toujours les mêmes; mais au commencement tu peux dire à la volée des autres nombres jusqu'à ce que tu approches du nombre destiné, car alors tu pourras subtilement accrocher quelqu'un des nombres nécessaires, de peur d'être surpris.

PROBLÈME XXIII

Étant proposé quelque nombre d'unités distinguées entre elles, les disposer et ranger par ordre en telle sorte que rejetant toujours la neuvième, ou la dixième, ou la tantième que l'on voudra jusques à un certain nombre, les restantes soient celles que l'on voudra.

On a accoutumé de proposer ce problème en cette facon : Quinze chrétiens et quinze Turcs se treuvent sur mer dans un même navire, et s'étant élevé une terrible tourmente, le pilote dit qu'il est nécessaire de jeter dans la mer la moitié des personnes qui sont en la nef pour sauver le reste. Or, cela ne se peut faire que par sort ; partant on est d'accord que se rangeant tous par ordre, et comptant de 9 en 9 on jette chaque neuvième dans la mer jusqu'à ce que, de 30 qu'ils sont, il n'en demeure que 15 ; on demande comment il les faudrait disposer pour faire que le sort tombât sur les 15 Turcs, sans perdre aucun des chrétiens.

En comptant de 9 en 9 une suite de 30 objets placés les uns à la suite des autres, 30 zéros par exemple, on tombe sur les objets dont les rangs sont 9, 18, 27.

Qu'on supprime ces objets, puis que l'on continue à compter de 9 en 9, en prenant d'abord les trois objets qui suivent le 27e et en revenant au commencement de la série qui ne contient plus que 27 objets, on tombera sur ceux dont les rangs sont 6, 15, 24, dans la nouvelle série.

Ces objets étant supprimés, si l'on opère de même pour la nouvelle série de 24 objets, on tombera sur les objets dont les rangs sont 6, 15 et 24 dans cette série.

En les supprimant, on aura une nouvelle série de 21 objets dont on sera conduit à supprimer ceux dont les rangs sont 9 et 18, ce qui la réduira à 19 objets, dont on supprimera ensuite, par le même calcul, ceux dont les rangs sont 6 et 15. Enfin, la série étant réduite alors à 17 objets, on y supprimera les objets placés aux rangs 5 et 14, et il restera 15 objets. Si l'on examine alors quels rangs les objets restants occupaient dans la première série, on trouve que ce sont les suivants :

1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, .., 13, 14, 15, .., 17, .., 20,
21, ..., 25, .., 28, 29, ..

De là la solution donnée par Bachet :

Pour faire ceci promptement, remarque ces deux vers :

Mort, tu ne falliras pas
En me livrant le trépas !

et prends garde seulement aux voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, t'imaginant que la première, *a*, vaut 1, la seconde, *e*, vaut 2, la troisième, *i*, vaut 3, la quatrième, *o*, vaut 4, et la cinquième, *u*, vaut 5. Et d'autant qu'il faut commencer par les chrétiens, en la première syllabe *mort*, la voyelle *o* te montre qu'il faut en premier lieu mettre 4 chrétiens; en la seconde syllabe *tu*, la voyelle *u* te montre qu'il faut après ranger 5 Turcs; ensuite *ne* signifie 2 chrétiens, *fal* un Turc, *li* 3 chrétiens, *ras* un Turc, *pas* un chrétien, *en* 2 Turcs, *me* 2 chrétiens, *li* 3 Turcs, *vrant* un chrétien, *le* 2 Turcs, *tré* 2 chrétiens, *pas* un Turc.

AVERTISSEMENT.

Il est aisé à voir que ce jeu se peut pratiquer fort diversement. Car premièrement le nombre des unités peut être tel que l'on veut, par exemple au lieu de 30 on en pourrait mettre 40, 50, 60, ou plus ou moins. Secondement, au lieu de rejeter toujours la neuvième, on peut rejeter la sixième, la dixième, ou la tantième que l'on voudra.

Finalement, au lieu d'en rejeter autant qu'il en demeure, on peut n'en rejeter que tant peu que l'on voudra; tellement qu'il en demeure davantage, ou bien en rejeter si grand nombre qu'il en demeure beaucoup moins. La solution se trouverait toujours comme il a été précédemment expliqué.

Or, comme j'ai touché en la préface de cette œuvre, c'est par cette invention que Josèphe se sauva très-subtilement dans Jotapata, ainsi qu'on recueille évidemment des paroles d'Hegesippus touchant ce fait au livre III de la *Guerre de Hierusalem.* Et bien qu'il ne particularise pas assez cette action, toutefois par ce qu'il dit nous nous pouvons imaginer comme le tout se passa. Car, ainsi qu'il raconte, il y eut quarante soldats qui se sauvèrent avec Josèphe dans la caverne, si bien qu'à compter ledit Josèphe, ils étaient en tout 41. Partant, supposons qu'il ordonna que comptant de 3 en 3 on tuerait toujours le troisième, il est certain que, procédant de la sorte, tu trouveras qu'il faut que Josèphe se mît le trente-unième après celui par lequel on commençait à compter, au cas qu'il visât à demeurer en vie lui tout seul. Mais s'il voulut sauver un de ses compagnons, il le mit en la seizième place, et s'il en voulut sauver encore un autre, il le mit en la trente cinquième place.

PROBLÈME XXIV

Plusieurs nombres inégaux étant proposés, diviser chacun d'iceux en deux parties, et treuver deux nombres desquels l'un multipliant une desdites parties, et l'autre multipliant l'autre, la somme des deux produits se treuve partout la même.

CONSIDÉRONS d'abord deux nombres a et b, le premier étant plus grand que le second ; soient x et $a-x$ les deux parties de a, y et $b-y$ les deux parties de b, z et t les deux multiplicateurs, le premier étant plus grand que le second.

On doit avoir :

$$xz + t(a-x) = zy + t(b-y);$$

on en tire

$$x = y - \frac{(a-b)\,t}{z-t} \qquad (1),$$

égalité qui détermine x quand on a choisi y. On n'oubliera pas que x et y désignent les parties de a et de b, qui sont multipliées par le plus grand des deux multiplicateurs.

Il faut que y, qui est une partie de b, soit pris plus grand que $\frac{(a-b)\,t}{z-t}$, ce qui exige qu'on ait $\frac{(a-b)\,t}{z-t} < b$; on en conclut qu'il faudra prendre

$$z > \frac{at}{b} \qquad (2).$$

Ces deux formules résolvent la question.

Soient les deux nombres 18 et 40, et prenons $t = 3$; d'après la formule (2), il faut prendre $z > \frac{40 \times 3}{18}$ ou $> \frac{20}{3}$: soit $z = 14$; la quantité $\frac{(a-b)t}{z-t}$ donne $\frac{22.3}{11}$ ou 6.

Prenons alors dans 18 un nombre plus grand que 6, 10 par exemple, ce sera le nombre y, et le nombre correspondant de 40 sera $10 - 6$ ou 4.

Les deux parties de 18 sont 10 et 8 qui multipliées respectivement par 14 et 3 donnent 140 et 24 dont la somme est 164.

Les deux parties de 40 sont 4 et 36 qui multipliées respectivement par 14 et 3 donnent 56 et 108 dont la somme est aussi 164.

Au lieu de prendre $z = 14$, prenons $z = 7$: la quantité $\frac{(a-b)t}{z-t}$ donne $\frac{22.3}{4}$ ou $16\frac{1}{2}$.

Décomposons alors 18 en 17 et 1 ; la première partie de 40 sera

$$17 - 16\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}, \text{ et l'autre } 39\frac{1}{2}.$$

En faisant les multiplications par 7 et 3, et ajoutant les produits, on trouve 122 de part et d'autre.

Sachant résoudre le problème pour deux nombres, il est facile de le résoudre pour tant de nombres qu'on voudra. Soient les trois nombres 18, 40 et 50.

Prenons $t = 3$; pour déterminer une limite inférieure de z, il faut évidemment opérer avec le plus grand nombre, et prendre $z > \frac{50.3}{18}$ ou $8 : \frac{1}{3}$: nous prendrons $z = 10$.

La quantité $\frac{(a-b)\,t}{z-t}$ devient pour le second nombre $\frac{22.3}{7}$ ou $9\frac{3}{7}$, et pour le troisième nombre $\frac{32.3}{7}$ ou $13\frac{5}{7}$: prenons donc dans 18 un nombre supérieur à $13\frac{5}{7}$, par exemple 15 ; les parties correspondantes des autres nombres seront $15-9\frac{3}{7}$ ou $5\frac{4}{8}$ et $15-13\frac{5}{7}$ ou $1\frac{2}{7}$: en sorte que les trois nombres seront décomposés en

$$15 \text{ et } 3,\ 5\frac{4}{7} \text{ et } 34\frac{3}{7},\ 1\frac{2}{7} \text{ et } 48\frac{5}{7}.$$

En multipliant les deux parties de chaque nombre par 10 et 3, et faisant la somme des produits, on trouve 159 pour chacun des trois nombres.

Le problème que nous venons de résoudre se propose ordinairement sous la forme d'une vente :

Trois personnes arrivent au marché ayant respectivement 10 mesures, 12 mesures et 15 mesures de graine ; elles vendent leurs marchandises aux mêmes prix, et elles en retirent chacune la même somme : on demande comment la vente a été faite.

Mais si les objets mis en vente ne peuvent être fractionnés, il faut résoudre le problème en nombres entiers, et c'est ce dont Bachet s'occupe exclusivement, en prenant pour exemple trois femmes qui vendent au marché, l'une 20 pommes, l'autre 30 et la troisième 40.

La formule (1) donnera pour x un nombre entier, si y étant pris entier, la quantité $\frac{(a-b)\,t}{z-t}$ est un nombre entier.

Or, il suffit de chercher les solutions où z et t sont premiers entre eux; car si le problème est résolu par mz' et $m\ t'$, il le sera évidemment par z' et t', et réciproquement. Dans ce cas, $z - t$ est premier avec t ; et il faut alors et il suffit que $z - t$ divise l'autre facteur $a - b$ du numérateur de la fraction $\frac{(a-b)t}{z-t}$, pour que celle-ci donne un nombre entier. En sorte que si $a - b$ est un nombre premier, il faudra qu'on ait $z - t = 1$ ou $z = t + 1$.

Cela posé, revenons à la formule fondamentale $x = y - \frac{(a-b)t}{z-t}$.

Ici y est au plus égal à $b - 1$, et en posant

$$\frac{(a-b)t}{z-t} < b - 1$$

on trouve qu'il faut prendre

$$z > \frac{a-1}{b-1} t.$$

Soient, par exemple, les trois nombres 31, 32, 37, dont les différences 32 — 31, 37 — 31 sont premières entre elles. Il faut prendre $z > \frac{36}{30} t$ ou $\frac{6}{5} t$, et chercher les solutions où $z - t = 1$:

Pour $t = 1$, on a $z = 2$,
pour $t = 2$, on a $z = 3$,
pour $t = 3$, on a $z = 4$,
pour $t = 4$, on a $z = 5$,

et il n'y a pas d'autres solutions de cette espèce.

Quant aux trois nombres 20, 30 et 40 choisis par Bachet, il faut prendre $z > \frac{39}{19} t$.

Les différences 30 — 20 ou 10, 40 — 20 ou 20 ayant pour diviseurs communs 2, 5 et 10, on pourrra prendre

$$\begin{aligned} t &= 1 \text{ et } z = 3 \\ t &= 1 \text{ et } z = 6 \\ t &= 1 \text{ et } z = 11 \\ t &= 2 \text{ et } z = 7 \\ t &= 3 \text{ et } z = 8 \\ t &= 3 \text{ et } z = 13, \text{ etc.,} \end{aligned}$$

en se bornant aux solutions où z et t sont premiers entre eux. Le reste s'achèvera avec la formule (1).

REMARQUE. Si $z - t = d$, on devra avoir

$$t + d > \frac{a-1}{b-1}\, t,$$

inégalité d'où l'on tire $t < \dfrac{(b-1)\,d}{a-b}$.

Ainsi dans l'exemple précédent, on doit avoir $t < \dfrac{19.10}{20}$ ou $t < 9\frac{1}{2}$; donc 9 sera la plus grande valeur que l'on devra donner à t si l'on continue les essais précédents pour trouver les autres solutions.

PROBLÈME XXV

De trois choses et de trois personnes proposées deviner quelle chose aura été prise par chaque personne.

IMAGINE-TOI que des trois personnes l'une est première, l'autre est seconde, l'autre est troisième; et semblablement des trois choses fais-en une première, l'autre seconde, l'autre troisième. Puis prenant 24 jetons, donne 1 jeton à la première personne, 2 à la seconde, 3 à la troisième, et laissant les 18 jetons restants sur la table, permets qu'à ton insu chaque personne prenne celle des trois choses qu'elle voudra. Cela fait, ordonne que la personne qui a pris la première chose prenne des jetons restants autant que tu lui en as donné, et que la personne qui a pris la seconde chose prenne des jetons restants deux fois autant que tu lui en as donné, et que la personne qui a pris la troisième chose prenne des jetons restants quatre fois autant que tu lui en as donné. Il reste alors sur la table un certain nombre de jetons, et, d'après la connaissance de ce nombre de jetons, il faut deviner quelle chose a été prise par chaque personne.

Voyons combien il doit rester de jetons dans les différents cas qui peuvent se présenter. Désignons les trois objets par les lettres *a*, *e*, *i*. En les disposant dans l'ordre où les ont pris la première, la seconde et la troisième personne, on pourra avoir les six cas suivants :

a, e, i; *e, a, i*; *a, i, e*;
e, i, a; *i, a, e*; *i, e, a*.

Dans le premier cas, les trois personnes prennent respectivement 1, 4 et 12 jetons, ce qui fait 17, et il en reste 1.

Dans le second cas, les trois personnes prennent respectivement 2, 2 et 12 jetons, ce qui fait 16, et il en reste 2.

Dans le troisième cas, les trois personnes prennent respectivement 1, 8 et 6 jetons, ce qui fait 15, et il en reste 3.

Dans le quatrième cas, les trois personnes prennent respectivement 2, 8 et 3 jetons, ce qui fait 13, et il en reste 5.

Dans le cinquième cas, les trois personnes prennent respectivement 4, 2 et 6 jetons, ce qui fait 12, et il en reste 6.

Dans le sixième cas, les trois personnes prennent respectivement 4, 4 et 3 jetons, ce qui fait 11, et il en reste 7.

Ces résultats sont compris dans le tableau suivant :

RESTES.	1re PERS.	2e PERS.	3e PERS.
1	*a*	*e*	*i*
2	*e*	*a*	*i*
3	*a*	*i*	*e*
5	*e*	*i*	*a*
6	*i*	*a*	*e*
7	*i*	*e*	*a*

On peut remarquer que, pour le reste 1, les objets sont dans l'ordre direct *a*, *e*, *i*, et pour le reste 7 dans l'ordre inverse *i*, *e*, *a*; que pour le reste 2 il suffit de permuter les deux premiers du reste 1, et pour le reste 3 les deux derniers; que pour le reste 5 il suffit de permuter les deux premiers du reste 7, et pour le reste 6 les deux derniers.

Voici la règle mnémonique donnée par Bachet :

Pour ces six façons différentes, remarque ces six paroles :

Par fer, César, jadis, devint, si grand, prince.

Que s'il reste 1 jeton, tu te serviras de la première (par fer) ;
S'il en reste 2, tu te serviras de la seconde (César) :
S'il en reste 3, tu te serviras de la troisième (jadis) ;
S'il en reste 5, tu te serviras de la quatrième (devint) ; et ainsi consécutivement.

Or, pour t'en servir, tu dois remarquer qu'en chaque parole, il y a deux syllabes, dont la première signifie la première personne et la seconde signifie la seconde personne ; semblablement prends garde aux voyelles *a*, *e*, *i*, car *a* signifie la première chose, *e* la seconde, *i* la troisième. Partant, selon que tu trouveras une de ces voyelles en une des syllabes, tu dois juger qu'une telle chose est entre les mains d'une telle personne. Par exemple, supposons qu'il reste 3 jetons, et que partant il se faille servir de la troisième parole *jadis*. Alors d'autant que la première voyelle *a* est en la première syllabe, tu diras que la première personne a la première chose ; et pour ce que la troisième voyelle *i* est en la seconde syllabe, tu diras que la seconde personne a la troisième chose, et sachant ce qu'ont la première et la seconde personne, tu sais bien ce qu'a la troisième.

AVERTISSEMENT.

Quelques-uns pratiquent ce jeu un peu différemment, car ils donnent 1 jeton à la première personne, 2 à la seconde et 4 à la troisième ; partant les jetons restants ne sont que 17. Puis ils ordonnent que celui qui a la première chose prenne des jetons restants autant qu'il en a reçu, et que celui qui a la seconde chose prenne des jetons restants deux fois autant qu'il en a, et que celui qui a la troisième chose prenne des jetons restants trois fois autant qu'il en a ; et faisant en cette façon, les restes de jetons sont 0, 1, 2, 5, 4, 6, dans les six cas étudiés précédemment.

[On peut résoudre mnémoniquement le problème en employant ces paroles :

Avec éclat l'Aï brillant devint libre,

et en les appliquant successivement aux restes 0, 1, 2, 4, 5, 6.

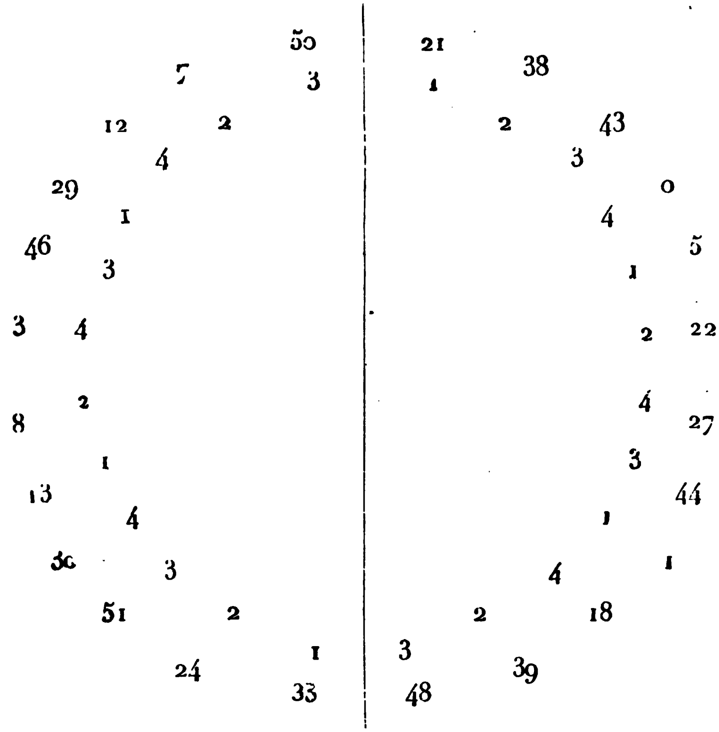
Il vaudrait mieux mettre 18 jetons sur la table, pour avoir comme précédemment les restes 1, 2, 3, 5, 6, 7.]

Bachet s'occupe ensuite du même problème pour 4 personnes et 4 objets, ce qu'aucun auteur, dit-il, n'avait fait avant lui. Il désigne les quatre objets par *a*, *e*, *i*, *o* ; il donne aux quatre personnes respectivement 1, 2, 3, 4 jetons, et il en met 78 sur la table ; la personne qui a le premier objet prend sur la table autant de jetons qu'elle en a, la personne qui a le second objet prend 4 fois autant de jetons qu'elle en a, et la personne qui a le troisième objet prend 16 fois autant de jetons qu'elle en a ; il n'y a pas à s'occuper de la personne qui a pris le quatrième objet, elle sera connue quand on connaîtra les personnes qui ont pris les trois premiers objets. Ces trois objets peuvent être pris par les personnes 1, 2, 3 de 6 manières différentes ; également par les personnes 1, 2, 4, par les personnes 1, 3, 4 et par les personnes

2, 3, 4; ce qui offre 24 combinaisons. Faisant le calcul dans les différents cas, on trouve 24 restes différents; donc, le problème peut être résolu par la connaissance des restes. Voici le tableau des solutions:

RESTES.	1re PERS.	2e PERS.	3e PERS.	4e PERS.
0	*o*	*a*	*e*	*i*
1	*a*	*o*	*e*	*i*
3	*o*	*e*	*a*	*i*
5	*a*	*e*	*o*	*i*
7	*e*	*o*	*a*	*i*
8	*e*	*a*	*o*	*i*
12	*o*	*a*	*i*	*e*
13	*a*	*o*	*i*	*e*
18	*o*	*e*	*i*	*a*
21	*a*	*e*	*i*	*o*
22	*e*	*o*	*i*	*a*
24	*e*	*a*	*i*	*o*
27	*o*	*i*	*a*	*e*
29	*a*	*i*	*o*	*e*
30	*o*	*i*	*e*	*a*
33	*a*	*i*	*e*	*o*
38	*e*	*i*	*o*	*a*
39	*e*	*i*	*a*	*o*
43	*i*	*o*	*a*	*e*
44	*i*	*a*	*o*	*e*
46	*i*	*o*	*e*	*a*
50	*i*	*e*	*o*	*a*
51	*i*	*e*	*a*	*o*

On pourra aussi se servir facilement de ces mêmes nombres disposés en cercles, contenant au-dedans les quatre nombres 1, 2, 3, 4, signifiant les quatre objets : car sachant le reste des jetons, il faut chercher ce reste sur le cercle extérieur, et prendre sur le



cercle intérieur le nombre qui lui correspond, avec les deux nombres qui suivent, en avançant vers le bas du cercle : ces trois nombres indiquent les objets pris respectivement par les trois premières personnes. Par exemple, si le reste des jetons est 43, on prendra ce nombre sur le cercle extérieur ; on trouvera 3 au même rang sur le cercle intérieur, et les deux nombres qui suivent sont 4 et 1 : ces trois nombres 3, 4, 1 ainsi disposés signifient que la première personne a le troisième objet, la seconde le quatrième, et la troisième le premier, d'où l'on conclut que la quatrième a le second.

Sur le demi-cercle de gauche si l'on prend le reste 8, on trouve vis-à-vis, sur le cercle intérieur, le nombre 2, et les nombres suivants sont 1 et 4; donc les personnes ont pris respectivement les objets *e, a, o, i*. Pour le reste 39 on prendrait les nombres 2, 3, 1, tandis que pour le reste 24 on prendrait les nombres 2, 1, 3.

ADDITION

La solution que vient de donner Bachet se trouve démontrée par notre proposition XII. Nous voyons en même temps que le problème de 3 objets et de 3 personnes peut se résoudre de la même manière en laissant 12 jetons sur la table, et en demandant que la personne qui a le premier objet prenne autant de jetons qu'elle en a, tandis que la personne qui a le deuxième objet en prendra 3 fois autant qu'elle en a. On a dans ce cas le tableau suivant :

RESTES.	1re PERS.	2e PERS.	3e PERS.
1		*a*	*e*
2	*a*		*e*
3		*e*	*a*
5	*a*	*e*	
6	*e*		*a*
7	*e*	*a*	

On peut résoudre mnémoniquement le problème en employant les paroles suivantes :

Il a jadis brillé dans ce petit État,

et en appliquant les syllabes deux par deux successivement aux restes 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mais la proposition XII nous donne la solution d'un problème plus général, en ce qu'elle nous permet de considérer un nombre quelconque d'objets inférieur au nombre des personnes. Ainsi que 3 objets doivent être pris par 3 personnes non désignées dans une société de 5 personnes. Après avoir fait ranger les personnes et leur avoir donné respectivement 1, 2, 3, 4, 5 jetons, vous demanderez que la personne qui a le premier objet prenne sur la table autant de jetons qu'elle en a, que la personne qui a le deuxième objet en prenne 5 fois autant qu'elle en a, et que la personne qui a le troisième objet en prenne 25 fois autant qu'elle en a ; et comme elles peuvent avoir besoin pour cela de $5 \times 25 + 4 \times 5 + 3 \times 1$ (prop. XI) ou 148 jetons, vous en mettrez 149 sur la table, et il vous sera facile, d'après le reste des jetons, de deviner les personnes qui ont pris les trois objets ; vous en aurez dressé le tableau comme dans les cas précédents, et il doit présenter $5 \times 4 \times 3$ ou 60 cas différents. Comme la quantité de jetons à employer serait assez incommode, on la remplacera par un calcul sur le nombre 149 inscrit sur un papier, et effectué par les personnes qui auront pris les trois objets.

Nous ferons remarquer qu'avant Bachet, Diego Palomino avait examiné la question de 4 objets avec 4 personnes ; il en donne une solution fort ingénieuse dans le même ouvrage où il traite des carrés magiques.

S'ENSUIVENT

QUELQUES AUTRES

PETITES SUBTILITÉS DES NOMBRES

QU'ON PROPOSE ORDINAIREMENT

I

Je demande un nombre qui étant divisé par 2 *il reste* 1, *étant divisé par* 3 *il reste* 1, *et semblablement étant divisé par* 4 *ou par* 5 *ou par* 6, *il reste toujours* 1, *mais étant divisé par* 7 *il ne reste rien.*

Cette question se propose ainsi ordinairement :

Une pauvre femme portant un panier d'œufs pour vendre au marché vient à être heurtée par un certain qui fait tomber le panier et casser tous les œufs, qui pourtant désirant de satisfaire à la pauvre femme s'enquiert du nombre de ses œufs; elle répond qu'elle ne le sait pas certainement, mais qu'elle a bien souvenance que les ôtant 2 à 2 il en restait 1, et semblablement les ôtant 3 à 3, ou 4 à 4, ou 5 à 5, ou 6 à 6 il restait toujours 1, et les comptant 7 à 7 il ne restait rien. On demande comme de là on peut conjecturer le nombre des œufs.

Le plus petit commun multiple des nombres 2, 3, 4, 5, 6 étant 60, il s'agit de trouver un multiple de 7 qui surpasse de l'unité un multiple de 60. On le trouve rapidement par essais successifs : 60 divisé par 7 donne pour reste 4 ; donc 2.60 donnera pour reste 8 ou 1 ; on a donc

$$2.60 = 7 + 1\,;$$

par conséquent $\quad 7.60 - 2.60 + 1 = \dot{7},$

c'est-à-dire $\quad 5.60 + 1 = \dot{7}.$ (Voir note II.)

Ainsi le plus petit nombre résolvant la question est 301.

On résoudrait le problème de la même manière pour un reste différent de 1, par exemple si l'on demandait un multiple de 19 qui divisé par chacun des nombres 8, 12 et 15 donnât pour reste 7.

II

Trouver un nombre qui étant divisé par 2 laisse 1, et divisé par 3 laisse 2, et divisé par 4 laisse 3, et divisé par 5 laisse 4, et divisé par 6 laisse 5, mais qui divisé par 7 ne laisse rien.

CETTE question rentre dans la précédente, car un multiple de 6 plus 5 est un multiple de 6 moins 1, et ainsi des autres nombres ; par conséquent, il faut satisfaire à l'égalité

$$\dot{7} = \dot{60} - 1,$$

qui revient à

$$\dot{60} = \dot{7} + 1.$$

Le nombre 120 est le premier nombre qui résout la question (voir note II).

Le problème se résoudrait de la même manière si la différence entre chaque diviseur et le reste était un nombre différent de 1.

III

Deux bons compagnons ont 8 pintes de vin à partager entre eux également, lesquelles sont dans un vase contenant justement 8 pintes, et pour faire leur partage ils n'ont que deux autres vases dont l'un contient 5 pintes et l'autre 3. On demande comment ils pourront partager justement leur vin, ne se servant que de ces trois vases.

On peut soudre cette question (et toutes celles du même genre) en deux façons :

Premièrement, du vase contenant 8, qui est plein, on versera 5 pintes dans le vase contenant 5, et d'icelui on en versera 3 dans le vase contenant 3, et il en restera 2 dans le 5; on versera puis les 3 pintes qui sont dans le 3 dedans le 8, et on mettra dans le 3 les deux qui sont dans le 5; en après de ce qui est dans le 8 on remplira derechef le 5, et du 5 on versera une pinte dans le 3, ce qui lui manquait pour le remplir. Partant il restera justement 4 pintes dans le vase de 5, et 4 pintes dans les deux autres.

Secondement, on versera du vase de 8 3 pintes dans le 3, lesquelles on mettra puis dans le vase de 5; et derechef du vase de 8 on versera 3 pintes dans le 3, dont on mettra 2 dans le 5 pour le remplir, et lors il n'en restera qu'une dans le 3; en après on videra le 5 dans le 8, et on mettra dans le 5 la pinte qui est dans le 3; et des 7 pintes qui se trouvent dans le 8 on en versera 3 dans le 3. Partant il en restera 4 justement dans le 8, et 4 dans les deux autres vases.

Ces solutions peuvent être représentées en tableaux de la manière suivante :

1re *Solution.*

VASES.

8	5	3
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

2e *Solution.*

VASES.

8	5	3
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Or, bien qu'il semble que cette question ne se puisse soudre par règle certaine, et qu'il y faille nécessairement procéder à tâtons, toutefois on peut par un discours certain et infaillible parvenir à la solution d'icelle, ou discourir son impossibilité, si par hasard on la proposait impossible; et de fait sur la question proposée on peut ainsi discourir :

Puisque pour partager 8 pintes également il faut qu'il y en ait 4 d'un côté et 4 de l'autre, et il est certain qu'il n'en peut avoir 4 que dans le 5 ou dans le 8, il nous faut procurer l'un ou l'autre : voilà donc que je peux prendre deux différentes voies; et suivant la première je ferai ce discours : Pour faire que dans le vase de 5 il reste 4 pintes justement, il faut, ledit vase étant plein, en ôter une seulement : cela ne se peut faire qu'en versant icelle pinte dans l'un des deux autres à qui il ne faille qu'une pinte pour être plein ; cela ne peut arriver au 8 (car si le 5 étant plein il ne manquait qu'une pinte au 8 pour être plein, il s'ensuivrait qu'en tout il y aurait 12 pintes contre l'hypothèse) ; il faut donc que ce soit le vase de 3 à qui il ne faille qu'une pinte pour être plein, et partant il faut que dans icelui il y ait seulement 2. Or cela se peut imaginer en deux façons : la première si le 3 étant plein on peut ôter une pinte d'icelui, la seconde si le 3 étant vide on y apporte d'un autre vase lesdites 2 pintes. La première façon ne peut réussir, car il faudrait que le 3 étant plein il ne manquât qu'une pinte à l'un des autres vases pour être plein, ce qui ne peut arriver au 5 (car il faudrait qu'il n'y eût que 4 pintes dans icelui, qui serait supposer ce que l'on cherche) ; il ne peut arriver au 8 (car il faudrait qu'il y eût 7 pintes en icelui qui jointes avec les autres 3 feraient en tout 10 pintes contre l'hypothèse) ; donc il faut suivre la seconde façon, et apporter d'ailleurs 2 pintes dans le 3. Mais cela ne peut venir du 8 (car si le 3 étant vide il n'y avait que 2 pintes dans le 8, quoique le 5 fût plein, tout le nombre des pintes ne serait que de 7 contre l'hypothèse) ; il faut donc que les deux pintes viennent du 5. Or, pour faire qu'il n'y ait que 2 pintes dans le 5, il faut en ôter 3 quand il est plein, ce qui est bien aisé, à cause que nous avons un vase contenant 3. Partant, si l'on rebrousse chemin, et si l'on reprend le fil du discours depuis la fin jusques au commencement, on trouvera la première façon de soudre la question.

Suivant l'autre route je ferai ce discours : Pour faire demeurer 4 pintes dans le 8, il faut en ôter 4. Cela se peut imaginer en 3 façons. Premièrement, ôtant les 4 pintes d'un coup, ce qui est impossible (car il n'y a point de vase contenant 4); secondement, ôtant 2 pintes et puis 2 autres, ce qui est aussi impossible (car bien qu'on puisse ôter 2 pintes, comme j'ai montré en l'autre discours, où l'on fait venir 2 pintes dans le 5, toutefois, cela fait, il est impossible d'en ôter 2 autres, comme on peut recueillir du même discours); troisièmement, ôtant 1 pinte et puis 3, et cette façon est fort vraisemblable, car si l'on peut mettre une pinte dans le 5 il sera aisé d'en mettre 3 dans le 3.

Or, pour faire venir une pinte dans le 5, il faut ou que l'on ôte 4 dudit 5 lorsqu'il est plein, ou que l'on y apporte d'ailleurs ladite pinte. Le premier moyen est impossible, car du 5 on ne peut vider 4 pintes dans le 3 qui n'en est pas capable; on ne les peut aussi vider dans le 8 (car il faudrait que dans le 8 il y eût déjà 4 pintes, et partant tout le nombre des pintes serait 9 contre l'hypothèse); il faut donc embrasser le second moyen, et apporter d'ailleurs une pinte dans le 5. Cela ne peut venir du 8 (car le 5 étant vide, s'il n'y avait qu'une pinte dans le 8, quoique le 3 fût plein, tout le nombre des pintes ne serait que 4); il faut donc qu'il vienne du 3. Or, pour faire que dans le 3 il n'y ait qu'une pinte, il faut en ôter 2 quand il est plein.

Donc il faut qu'à l'un des deux autres vases il ne manque que 2 pour être plein. Cela ne peut arriver au 8 (car autrement tout le nombre des pintes serait 9); donc il faut qu'il arrive au 5; et partant il faut que dans le 5 il n'y ait que 3 pintes, ce qui se procure aisément versant le 3 quand il est plein dedans le 5.

Donc, reprenant tout ce discours depuis la fin jusques au commencement, on trouvera la seconde façon que j'ai donnée pour soudre cette question.

Voici des exemples variés de ce genre de problèmes :

Premier exemple, avec des vases 16, 9 et 7.

1re SOLUTION.

16,	9,	7
16,	0,	0
7,	9,	0
7,	2,	7
14,	2,	0
14,	0,	2
5,	9,	2
5,	4,	7
12,	4,	0
12,	0,	4
3,	9,	4
3,	6,	7
10,	6,	0
10,	0,	6
1,	9,	6
1,	8,	7
8,	8,	0

2e SOLUTION.

16,	9,	7
16,	0,	0
9,	0,	7
9,	7,	0
2,	7,	7
2,	9,	5
11,	0,	5
11,	5,	0
4,	5,	7
4,	9,	3
13,	0,	3
13,	3,	0
6,	3,	7
6,	9,	1
15,	0,	1
15,	1,	0
8,	1,	7
8.	8,	0

Deuxième exemple, avec des vases 16, 11 et 6.

1re SOLUTION.

16,	11,	6
16,	0,	0
5,	11,	0
5,	5,	6
11,	5,	0
11,	0,	5
0,	11,	5
0,	10,	6
6,	10,	0
6,	4,	6
12,	4,	0
12,	0,	4
1,	11,	4
1,	9,	6
7,	9,	0
7,	3,	6
13,	3,	0
13,	0,	3
2,	11,	3
2,	8,	6
8,	8	0

2e SOLUTION.

16,	11,	6
16,	0,	0
10,	0,	6
10,	6,	0
4,	6,	6
4,	11,	1
15,	0,	1
15,	1,	0
9,	1,	6
9,	7,	0
3,	7,	6
3,	11,	2
14,	0,	2
14,	2,	0
8,	2,	6
8,	8,	0

Troisième exemple, avec des vases 42, 27 et 12.

1re SOLUTION.

42,	27,	12
42,	0,	0
15,	27,	0
15,	15,	12
27,	15,	0
27,	3,	12
39,	3,	0
39,	0,	3
12,	27,	3
12,	18,	12
24,	18,	0
24,	6,	12
36,	6,	0
36,	0,	6
9,	27,	6
9,	21,	12
21,	21,	0

2e SOLUTION.

42,	27,	12
42,	0,	0
30,	0,	12
30,	12,	0
18,	12,	12
18,	24,	0
6,	24,	12
6,	27,	9
33,	0,	9
33,	9,	0
21,	9,	12
21,	21,	0

Pour démontrer la résolution de son problème, Bachet a fait un raisonnement fort ingénieux qu'il faudrait imiter sur chaque exemple particulier pour savoir s'il y a une solution, ce qui souvent serait fort difficile, vu la longueur et la délicatesse du raisonnement.

Nous avons donc repris la question, et nous avons été assez heureux pour lever la difficulté. Examinons d'abord la première solution, et désignons les vases par A, B, C.

On remplit B de A, puis on remplit $\dot{C}$ de B, et à chaque fois que C est plein, on le verse dans A. Pendant cette opération, il reste à chaque fois dans B une quantité de liquide exprimée par

$$B - \dot{C}.$$

Si cette quantité n'a pas été égale à $\frac{A}{2}$, on la verse dans C, lorsqu'elle est moindre que C.

On remplit de nouveau B avec A, puis on achève de remplir C qu'on verse dans A; et l'on continue de remplir C et de le verser dans A; la quantité de liquide restant à chaque instant dans B est alors exprimée par

$$2\,B - \dot{C}.$$

On voit que, cette opération étant continuée, la quantité de liquide contenue dans B, à un moment quelconque, peut être représentée par

$$\dot{B} - \dot{C};$$

donc, pour qu'elle devienne égale à $\frac{A}{2}$, il faut qu'on puisse avoir

$$\dot{B} = \dot{C} + \frac{A}{2},$$

condition à laquelle on peut toujours satisfaire, si B et C sont premiers entre eux, ou si $\frac{A}{2}$ contient les facteurs communs à B et C.

Cette condition est suffisante, *s'il y a toujours dans* A *assez de liquide pour remplir* B; car l'égalité

$$m\,B = n\,C + \frac{A}{2}$$

montre qu'après avoir rempli *m* fois B de A et versé *n* fois C dans A, le vase B contiendra la quantité $\frac{A}{2}$.

Quand la capacité de A n'est pas inférieure à la somme des capacités des autres vases, il y a toujours dans A assez de liquide pour remplir B. Mais il pourrait n'en être plus de même si l'on avait $A < B+C$; c'est ce qui arrive, par exemple, avec des vases dont les capacités sont 20, 13 et 9, ou 16, 12 et 7. Dans ce cas, le problème peut être possible (1er exemple), ou impossible (2e exemple); mais on n'en sait rien *à priori*.

Considérons maintenant la seconde manière de résoudre le problème.

On remplit C de A et on le verse dans B; on remplit encore C et on le verse dans B, et ainsi de suite jusqu'à ce que B soit plein ou contienne la quantité $\frac{A}{2}$, ce qui n'arrivera que si C est un sous-multiple de $\frac{A}{2}$.

Quand B est plein, on le verse dans A, et il reste dans C une quantité de liquide exprimée par $\dot{C} - B$. On verse cette quantité dans B.

On remplit de nouveau C avec A, puis on verse C dans B, jusqu'à ce que B soit plein. Tant que B n'est pas plein, il contient une quantité de liquide exprimée par $\dot{C} - B$, car à la quantité qu'il contenait précédemment on n'a fait qu'ajouter un multiple de C. Quand B est plein, on le verse dans A, et il reste dans C une quantité de liquide exprimée par $\dot{C} - 2B$, qu'on verse dans B et à laquelle on ajoute ensuite un multiple de C.

On voit que, cette opération étant continuée, la quantité de liquide contenue dans B, à un moment quelconque, lorsqu'il n'est pas plein, peut être représentée par

$$\dot{C} - \dot{B};$$

donc, pour qu'elle devienne égale à $\frac{A}{2}$, il faut qu'on puisse avoir

$$\dot{C} = \dot{B} + \frac{A}{2},$$

condition à laquelle on peut toujours satisfaire si B et C sont premiers entre eux, ou si $\frac{A}{2}$ contient les facteurs communs à B et C.

Cette condition est suffisante, *s'il y a toujours dans* A *assez de liquide pour remplir* C; car si l'on a

$$nC = mB + \frac{A}{2},$$

il en résulte
$$A - nC + mB = \frac{A}{2},$$

égalité qui montre qu'après avoir rempli n fois C de A et versé m fois B dans A, ce dernier vase contiendra la quantité $\frac{A}{2}$.

Le cas exceptionnel de $A < B + C$ existe ici comme dans le cas précédent.

IV

Trois maris jaloux se trouvent de nuit avec leurs femmes au passage d'une rivière où ils ne rencontrent qu'un petit bateau sans batelier, si étroit qu'il n'est capable que de deux personnes, on demande comment ces six personnes passeront deux à deux, tellement que jamais aucune femme ne demeure en compagnie d'un ou de deux hommes si son mari n'est présent.

Il faut qu'ils passent en six fois en cette sorte.

Premièrement, deux femmes passent, puis l'une ramène le bateau et repasse avec la troisième femme. Cela fait, l'une des trois femmes ramène le bateau, et se mettant en terre avec son mari, laisse passer les deux autres hommes qui vont treuver leurs femmes. Alors un desdits hommes avec sa femme ramène le bateau, et, mettant sa femme en terre, prend l'autre homme et repasse avec lui. Finalement la femme qui se treuve passée avec les trois hommes entre dans le bateau, et en deux fois va quérir les deux autres femmes : par ainsi en six fois tous passent.

Il semble que cette question ne soit fondée en aucune raison; mais toutefois la condition apposée qu'il ne faut point qu'aucune femme demeure accompagnée d'aucun des hommes si son mari n'est présent, nous peut guider pour trouver la solution d'icelle par un discours infaillible. Car il est certain que pour passer deux à deux il faut ou que deux hommes passent ensemble, ou deux femmes, ou un homme avec sa femme. Or, au premier passage, on ne peut faire passer deux hommes (car alors un homme seul demeurerait avec les trois femmes contre la condition); donc il est nécessaire que deux femmes passent, ou qu'il passe un homme avec sa femme ; mais ces deux façons reviennent à une, d'autant que si deux femmes passent, il faut que l'une ramène le bateau; partant une seule se treuve en l'autre rive; et si un homme passe avec sa femme, le même adviendra, d'autant que l'homme doit ramener le bateau (car si la femme le ramenait elle se treuverait avec les deux autres hommes sans son mari). Au second passage, deux hommes ne peuvent passer (car l'un deux lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme); un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car étant passé il se treuverait seul avec deux femmes); il est donc nécessaire que les deux femmes passent : ainsi les trois femmes étant passées, il faut que l'une d'icelles ramène le bateau. Quoi fait, au troisième passage, où restent à passer les trois hommes et une femme, on voit bien que deux femmes ne peuvent passer, puisqu'il n'y en a qu'une; un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car étant passé il se treuverait seul avec les trois femmes); donc il faut que deux hommes passent, et allent vers leurs deux femmes, laissant l'autre homme avec sa femme. Or qui ramènera le bateau? Un homme ne le peut faire (car il lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme) : une femme ne peut aussi (car elle irait vers un autre homme laissant son mari); que si les deux hommes le ramenaient, ce serait ne rien faire, car ils retourneraient là d'où ils sont venus. Partant, ne restant autre moyen, il faut qu'un homme avec sa femme ramène le bateau. Au quatrième passage, où restent à passer deux hommes avec leurs deux femmes, il est certain qu'un homme avec sa femme ne doit passer (car ce serait ne rien faire) ; les deux femmes aussi ne peuvent passer (car alors les trois femmes seraient avec un seul homme); donc il faut que les deux hommes passent. Alors pour ramener le bateau deux hommes ne peuvent être employés (car ce serait retourner là d'où ils sont venus); un homme seul aussi ne peut (car, cela fait, il se treuverait seul avec deux femmes), donc il faut que ce soit la femme qui en deux fois aille quérir les deux autres femmes qui restent à passer, et voilà le cinquième et sixième passage. Partant, en six fois ils sont tous passés sans enfreindre la condition.

Résoudre le même problème pour quatre maris et leurs femmes.

Tartaglia a cru pouvoir résoudre ce problème en faisant passer les personnes deux à deux; mais il s'est trompé, comme le montre Bachet, qui reconnaît d'ailleurs que la chose est impossible, sans en donner la démonstration. On peut s'en assurer de la manière suivante :

On remarque d'abord que d'un passage à un autre le nombre des personnes passées ne peut augmenter que d'une unité. Or admettons qu'on en ait passé 2, puis 3, puis 4, suivant les conditions, et voyons si 5 peuvent se trouver passées. Ces 5 personnes seront 4 femmes et 1 homme, ou 3 femmes et 2 hommes, ou 2 femmes et 3 hommes, ou enfin 1 femme et 4 hommes.

Or le premier ni le second cas ne peuvent avoir lieu, car il y aurait quelque femme qui se trouverait avec un homme sans son mari; le troisième ne peut non plus avoir lieu, car l'un des hommes aurait sa femme sur l'autre rive en compagnie d'un autre homme.

Quant au dernier cas, s'il a lieu, c'est que le dernier passage a amené 2 hommes, ou un homme et une femme. Or il n'a pu amener 2 hommes, car alors il y aurait eu ensemble de l'autre côté 2 hommes et 3 femmes, ce que nous avons vu être impossible; il n'a pas non plus amené 1 homme et 1 femme, car il y aurait eu de l'autre côté 1 homme et 4 femmes, ce qui est encore contraire aux conditions du problème.

Donc il est impossible que 5 personnes passent aux conditions imposées par l'énoncé.

Il n'en est plus de même en les faisant passer trois à trois.

Désignons les maris par A, B, C, D, et leurs femmes par *a*, *b*, *c*, *d*.

	A PASSER.	PASSÉS.
Trois femmes passent d'abord,	A, B, C, D, *d*,	*a*, *b*, *c*,
Deux reviennent et emmènent la quatrième,	A, B, C, D,	*a*, *b*, *c*, *d*,
Une femme revient, reste avec son mari, et les trois autres hommes passent,	A, *a*,	B, C, D, *b*, *c*, *d*;
Un mari revient avec sa femme, et emmène l'autre mari,	*a*,	A, B, C, D, *b*, *c*, *d*,
Enfin, deux femmes reviennent, et passent celle qui est restée.		A, B, C, D. *a*, *b*, *c*, *d*.

Il est facile de généraliser le problème. Soient n maris A, B,... L, M, et leurs n femmes a, b,... l, m, chaque passage devant contenir $n - 1$ personnes.

	A PASSER.	PASSÉS.
D'abord $n - 1$ femmes passent,	A, B,... L, M, m,	a, b,... l,
$n - 2$ femmes reviennent chercher la dernière,	A, B,... L, M,	a, b,... l, m,
Une femme revient, reste avec son mari, et les $n - 1$ autres maris passent,	A, a,	B,... L, M, b,... l, m,
Ici deux cas se présentent : n est impair ou il est pair; si n est impair, représentons-le par $2n' + 1$; alors $(n' - 1)$ couples repassent la rivière, et ramènent le couple restant, ce qui achève le problème; et il y a eu quatre passages,		A, B,...L, M, a, b,... l, m,
Mais il y a exception pour $n = 3$, parce qu'alors $n' - 1 = 0$; dans ce cas, un couple revient, la	A, a,	B, C, b, c,
femme reste, les deux maris passent;	a, b,	A, B, C, c,
et il faut encore qu'une femme fasse deux voyages pour ramener les deux autres femmes,	a,	A, B, C, b, c,
ce qui fait six passages pour ce cas exceptionnel,		A, B, C, a, b, c,

	A PASSER.	PASSÉS.
Si n est pair et égal à $2n'$, il y a		
encore $n' - 1$ couples qui re-	A,	B...L, M,
passent la rivière, mais ils ne	*a*,	*b*,... *l*, *m*,
ramènent que le mari qui était		A, B,... L, M,
resté, et il faut encore un voyage	*a*,	*b*,... *l*, *m*,
de $n - 2$ femmes pour passer		
celle qui reste.		A, B,... L, M,
		a; *b*,... *l*, *m*.

Il y a ainsi cinq voyages.

Le cas de $n = 2$ fait aussi exception, et ne peut être soumis à la condition de ne passer que $n - 1$ personnes à la fois; mais en en passant deux, il se résout facilement.

V

Étant donnée telle quantité qu'on voudra pesant un nombre de livres depuis 1 jusques à 40 inclusivement (sans toutefois admettre les fractions), on demande combien de poids pour le moins il faudrait employer à cet effet.

L'énoncé du problème tel que le donne Bachet n'a de précision qu'à l'égard du nombre 40 qu'il a choisi ; si l'on prenait un autre nombre, on pourrait souvent trouver différents systèmes de poids contenant chacun le moins de poids possible, et avec lesquels on pourrait faire toutes les pesées depuis 1 jusqu'au nombre assigné. Voici la vraie forme sous laquelle le problème doit être énoncé :

Trouver une série de poids avec lesquels on puisse faire toutes les pesées en nombres entiers depuis 1 jusqu'à la somme des poids employés, cette somme étant la plus grande possible relativement au nombre de ces poids.

Ne prenons d'abord que 2 poids. L'unité doit être le premier poids, sans quoi, le second étant a, on ne pourrait pas faire la pesée $a + 1$ qui se trouverait avant la somme des deux nombres.

Si l'on prend 1 et 2, on pourra peser jusqu'à $1 + 2$ ou 3. Si l'on prend 1 et 3, on pourra peser 2 ou $3 - 1$, en mettant 3 dans l'un des plateaux de la balance et 1 dans l'autre ; puis on pourra faire la pesée $1 + 3$ ou 4 plus grande qu'avec les poids 1 et 2. Si l'on prend 4 pour second poids, on ne pourra pas faire la pesée 2, et il en sera de même avec tout poids plus grand que 3 : donc les deux premiers poids sont 1 et 3.

Prenons un nouveau poids. On pourrait prendre 5, puisqu'on a pesé jusqu'à 4; mais on peut aussi prendre 6, car 5 se pèsera par $6 - 1$; par la même raison, on peut prendre 7, 5 se pesant par $7 - 2$ ou $7 - 3 + 1$ et 6 se pesant par $7 - 1$; on pourrait de même prendre 8; et enfin on peut prendre 9, car avec les quatre premiers nombres déjà formés on en formera quatre autres en les retranchant de 9, et ces nombres seront 5, 6, 7, 8; mais on ne peut pas prendre un nombre plus grand que 9, car il y aurait quelque pesée intermédiaire qu'on ne pourrait pas faire. En ajoutant à 9 chacune des quatre premières pesées, on aura toutes les pesées de 1 à 13. Les trois premiers poids sont donc 1, 3, 9.

En raisonnant de la même manière avec ces 13 pesées, on verra que le plus grand poids qu'on puisse prendre à la suite est 2 fois 13 plus 1 ou 27, ce qui permettra de faire toutes les pesées jusqu'à 40. Puis on prendra un nouveau poids égal à 2 fois 40 plus 1, ce qui étendra toutes les pesées jusqu'à 121, et ainsi de suite.

Ainsi, le premier poids étant 1,

le second $= 1.2 + 1$ ou 3,
le troisième $= (1 + 3)\,2 + 1$ ou 9,
le quatrième $= (1 + 3 + 9)\,2 + 1$ ou 27,
le cinquième $= (1 + 3 + 9 + 27)\,2 + 1$ ou 81, etc.

Or c'est la propriété de la progression

$$1,\ 3,\ 3^2, \ldots\ 3^{n-1},\ 3^n;$$

car si l'on fait la somme S des n premiers termes, on a :

$$S = \frac{3^n - 1}{2},$$

d'où $3^n = 2S + 1$.

Donc les poids qui jouissent de la propriété énoncée sont ceux de la progression

$$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \ldots$$

ou

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots.$$

VI

Souvent on requiert qu'on réduise une plus haute monnaie en des plus basses de différente valeur, tellement qu'il y ait égal nombre des unes et des autres, comme si l'on demande qu'on réduise un écu en sous et en liards, tellement qu'il y ait autant de sous que de liards.

Le sou valant quatre liards, la valeur des liards répondant à la question vaudra quatre fois moins que la valeur des sous qui seront en même nombre que les liards; nous partagerons donc 60 sous, valeur de l'écu, en deux parties qui soient proportionnelles à 4 et 1 ; et ces parties qui sont 48 sous, et 12 sous ou 48 liards, répondent à la question.

Si l'on voulait faire le partage en liards et deniers, comme le liard vaut 3 deniers, on partagerait 240 liards, valeur de l'écu, en parties proportionnelles à 3 et 1 ; et ces parties qui sont 180 liards et 60 liards ou 180 deniers répondraient à la question.

On peut de même faire la réduction en plus de deux espèces de monnaies. Soit, par exemple, à réduire l'écu en liards, doubles et deniers, de manière qu'il y ait autant des uns que des autres. Comme le double vaut deux deniers et le liard trois deniers, on partage 240 liards, valeur de l'écu, en parties proportionnelles aux nombres 3, 2 et 1 ; et ces parties qui sont 120 liards, 80 liards ou 120 doubles, et 40 liards ou 120 deniers, résolvent le problème.

VII

Un homme venant à mourir partage son bien consistant en certaine somme d'écus à ses enfants, en telle sorte qu'il ordonne que le premier prenne 1 écu et la septième partie du restant : en après que le second prenne 2 écus et la septième partie du reste ; et cela fait que le troisième prenne 3 écus et la septième partie du reste, et ainsi consécutivement des autres. Or le partage fait en cette façon il se treuve que chacun des enfants est également portionné : on demande la somme des écus et le nombre des enfants.

Résolvons le problème d'une manière générale.

Soient a, $2a$, $3a$, etc., les sommes respectives que les enfants prennent d'abord, et $\frac{1}{n}$ la fraction de chaque reste que chacun d'eux prend ensuite. Désignons par x le bien total.

Le premier enfant prend $a + \frac{x-a}{n}$; il reste alors $x - a - \frac{x-a}{n}$

ou
$$\frac{(n-1)(x-a)}{n};$$

et le second reçoit $2a + \frac{(n-1)(x-a)}{n^2} - \frac{2a}{n}$;

on doit donc avoir $2a + \frac{(n-1)(x-a)}{n^2} - \frac{2a}{n} = a + \frac{x-a}{n}$, ou en simplifiant,

$$an^2 + (n-1)(x-a) - 2an = n(x-a);$$

d'où l'on tire

$$x - a = an^2 - 2an$$

ét
$$x = a(n^2 - 2n + 1) = a(n-1)^2.$$

La part de chaque enfant est alors, d'après la première part $a + \frac{x-a}{n}$,

$$a + an - 2a \text{ ou } a(n-1);$$

et, par suite, le nombre des enfants est $(n-1)$.

Pour $a = 1$, les $n-1$ enfants ont chacun $n-1$ écus, et le bien total est de $(n-1)^2$ écus.

Ainsi, dans le problème de Bachet, il y avait 6 enfants et 36 écus.

Le calcul fait prouve seulement que les parts des deux premiers enfants sont égales. Il faut vérifier s'il en est de même des autres.

Supposons que les k premiers enfants aient eu chacun la même part $a(n-1)$, le bien étant $a(n-1)^2$; il reste alors

$$a(n-1)^2 - ak(n-1);$$

et l'enfant suivant reçoit

$$(k+1)\ a + \frac{a(n-1)^2 - ak(n-1) - (k+1)a}{n},$$

quantité qui se réduit à

$$\frac{a(n-1) + a(n-1)^2}{n} \text{ ou } \frac{a(n-1)(1+n-1)}{n},$$

c'est-à-dire $a(n-1)$.

Or, les deux premiers enfants ont la même part; donc il en est de même du troisième, puis du quatrième, et ainsi de suite de tous les autres.

Bachet ajoute : Il faut prendre garde qu'en la proposition de la question, il ne soit fait mention que d'une seule partie ; car si l'on faisait mention de diverses parties, comme si l'on disait que le premier prenne 1 et la moitié du reste, le second 2 et le tiers du reste, et ainsi de quelque autre semblable manière, la question serait impossible. En outre, il ne faut point que la partie mentionnée ait autre numérateur que l'unité ; car si l'on proposait la question en telle sorte que le premier dût prendre 1 et $\frac{2}{3}$ du reste, le second 2 et $\frac{2}{3}$ du reste, et ainsi consécutivement, la question serait aussi impossible.

Enfin, elle le serait encore si les nombres qu'on prend d'abord

$$1,\ 2,\ 3,\ldots$$

ou

$$a,\ 2a,\ 3a,\ldots$$

ne se suivaient pas en progression arithmétique ayant pour raison le premier terme.

On peut aussi proposer la question en changeant l'ordre des nombres, c'est-à-dire que chaque enfant prend d'abord $\frac{1}{n}$ du bien ou du restant avant de prendre la somme a, $2a$, $3a$,.... qui correspond à son rang.

Soit toujours x le bien à partager.

Le premier enfant prend $\frac{x}{n} + a$, et il reste $\frac{n-1}{n}x - a$; le second aura donc

$$\frac{n-1}{n^2}x - \frac{a}{n} + 2a;$$

et l'on doit avoir

$$\frac{x}{n} + a = \frac{n-1}{n^2} x - \frac{a}{n} + 2a;$$

il en résulte

$$nx + an^2 = (n-1)x - an + 2an^2,$$

d'où

$$x = an^2 - an = an(n-1).$$

La part du premier $\frac{x}{n} + a = a(n-1) + a = an$; et le nombre des enfants est $\frac{an(n-1)}{an}$ ou $n-1$.

D'après le calcul, il est certain que les deux premiers enfants ont la même part; mais il faut vérifier qu'il en est de même des autres.

Supposons que les k premiers enfants aient eu la même part an, le bien étant $an(n-1)$; il reste alors $an(n-1) - kan$, et l'enfant suivant reçoit $\frac{an(n-1) - kan}{n} + (k+1)a$, quantité qui se réduit à an.

Or, les deux premiers enfants ont la même part; donc il en est de même du troisième, puis du quatrième, et ainsi de suite de tous les autres.

Le problème serait impossible, comme le précédent, si chaque enfant ne prenait pas la même fraction $\frac{1}{n}$ de chaque reste, ou si pour les nombres complémentaires on ne suivait pas la progression a, $2a$, $3a$,...

VIII

Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus. Le premier donne des siens au deux autres autant qu'ils en ont chacun; en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun; finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun: cela fait, chacun se treuve 8 *écus. On demande combien chacun en avait du commencement.*

Cette question se résout aisément par un discours qui porte avec soi sa demonstration, et qui est tel. Puisque à la fin chacun se treuve avoir 8 écus, et qu'immédiatement auparavant le troisième avait donné au premier et au second autant qu'ils avaient chacun, il faut donc que chacun d'iceux n'en eût que 4 et que le troisième en eût 16. Mais le second en venait de donner aux deux autres autant qu'ils en avaient chacun; il faut donc qu'auparavant le premier n'en eût que 2, le troisième 8 et le second 14. Or cela n'est advenu qu'après que le premier en a donné aux deux autres autant qu'ils en avaient chacun; donc il convient dire que du commencement le second en avait 7, le troisième 4 et le premier 13.

Et remarque que pour soudre généralement toute semblable question, il faut toujours prendre des nombres en même proportion que 13, 7, 4 et 8; car pourvu que cela soit, procédant de même façon, tous trois à la fin se treuveront égaux. Partant le nombre auquel se fait l'égalité étant donné, il est aisé de treuver les trois nombres du commencement, car il ne faut que diviser le nombre donné par 8, et multiplier le quotient par 13, 7 et 4 : comme si l'on dit, faisant de la même sorte, que chacun à la fin se treuve 6 écus, divise 6 par 8 vient $\frac{3}{4}$ qui multiplié par 13, 7 et 4 te donne à connaître qu'au commencement le premier avait $9\frac{3}{4}$, le second $5\frac{1}{4}$, le troisième 3. Par même raison, les trois nombres que chacun a du commencement étant donnés, il est facile de treuver celui auquel se doit faire l'égalité, car il est nécessaire afin que la question soit possible, que lesdits trois nombres donnés observent la même proportion que 13, 7 et 4; partant si tu divises le plus grand par 13, ou le moyen par 7, ou le moindre par 4, il viendra partout un même quotient qui étant multiplié par 8 produira le nombre auquel se doit faire l'égalité : comme si les nombres donnés étaient 26, 14, 8; divisant 26 par 13, ou 14 par 7, ou 8 par 4, vient toujours pour quotient 2, qui multiplié par 8 produit 16, le nombre auquel se fera l'égalité.

Or d'ici l'on peut tirer la façon d'un jeu assez gentil pour deviner de trois personnes combien chacune aura pris de jetons ou de cartes ou d'autres unités, et ce jeu se pourra pratiquer en cette sorte.

Commande que le troisième prenne, par exemple, un nombre de jetons tel qu'il voudra, pourvu qu'il soit pairement pair, c'est à savoir mesuré par 4 : en après ordonne que le second prenne autant de fois 7 que le troisième a pris de fois 4, et que le premier prenne autant de fois 13. Alors commande que le premier donne de ses jetons aux deux autres autant qu'ils en ont chacun, et puis que le second en donne aux autres autant qu'ils en ont chacun, et finalement que le troisième fasse tout de même.

Cela fait, prends le nombre des jetons que tu voudras des trois (car ils s'en treuveront tous un égal nombre), et prends la moitié d'icelui, ce sera le nombre des jetons qu'avait le troisième du commencement; partant il est aisé de deviner les nombres des autres, prenant pour celui du second autant de fois 7, et pour celui du premier autant de fois 13 qu'il y a de fois 4 au nombre du troisième connu. Par exemple, que le troisième ait pris 12 jetons, alors le second en prendra 21, et le premier 39; et après que chacun aura donné et reçu comme j'ai devisé, il adviendra que chacun aura 24, et la moitié de 24, à savoir 12, est justement le nombre du troisième. Ceci n'est autre en effet que la règle que j'ai ci-devant donnée; car le nombre auquel se fait l'égalité étant connu, j'ai dit qu'il fallait diviser ledit nombre par 8, et multiplier le quotient par 13, 7 et 4; or est-il certain que diviser un nombre par 8 et multiplier le quotient par 4, c'est autant que prendre les quatre huitièmes du même nombre, à savoir la moitié ?

On peut résoudre par règle générale toutes autres semblables questions, encore que l'on changeât la proportion de ce que chacun doit donner aux deux autres, comme si, au lieu de leur donner une fois autant qu'ils ont, on requérait qu'il leur donnât 2 fois, 3 fois, 4 fois autant, etc.

En voici la solution générale.

Une personne ayant une somme a, si on lui donne n fois autant qu'elle a, elle possédera $na + a$ ou $(n + 1)\ a$; donc ce qu'elle avait auparavant n'est que la $(n + 1)^{\text{ième}}$ partie de ce qu'elle a maintenant. Ainsi les trois personnes ayant à la fin la même somme a, on en conclut qu'avant la distribution d'argent faite par la troisième personne,

la première avait .... $\frac{1}{n+1}a$, (1)

la seconde .... $\frac{1}{n+1}a$, (2)

et par suite que la troisième, qui possède le reste, avait

$$3a - \frac{2}{n+1}a,$$

qui se réduit à .... $\frac{3n+1}{n+1}a$. (3)

Ces sommes étant produites après la distribution d'argent faite par la seconde personne, on en conclut qu'avant cette distribution,

la première personne avait .... $\frac{1}{(n+1)^2}a$, (1)

la troisième .... $\frac{3n+1}{(n+1)^2}a$, (3)

et par suite que la seconde, qui possède le reste, avait

$$3a - \frac{1}{(n+1)^2}a - \frac{3n+1}{(n+1)^2}a,$$

quantité qui se réduit à .... $\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^2}a$, (2)

Ces sommes étant produites après la distribution d'argent faite par la première personne, on en conclut qu'avant cette distribution,

la troisième personne avait....... $\dfrac{3n+1}{(n+1)^3}a,$ (3)

la seconde.......................... $\dfrac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}a,$ (2)

et la première

$$3a-\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}a-\frac{3n+1}{(n+1)^3}a,$$

quantité qui se réduit à............ $\dfrac{3n^3+6n^2+3n+1}{(n+1)^3}a.$ (1)

Pour éviter les fractions, on pourra prendre:

$$a=(n+1)^3b;$$

et les trois nombres seront

$$(3n^3+6n^2+3n+1)b, (3n^2+3n+1)b, (3n+1)b.$$

Voici la règle que donne Bachet pour former les coefficients de b; le nombre n y est appelé *dénominateur de la proportion.*

Triple le dénominateur de la proportion et au produit ajoute 1, *tu auras le troisième nombre; à ce troisième nombre ajoute* 2, *et multiplie le tout par le dénominateur de la proportion, et au produit ajoute* 1, *tu auras le second nombre; joins ensemble le second et troisième nombre déjà trouvés, à leur somme ajoute* 1, *et multiplie le tout par le dénominateur de la proportion, et au produit ajoute* 1, *tu auras le premier nombre.*

Pour $n=1$, les trois coefficients sont 13, 7 et 4.

Pour $n=2$, ils deviennent 55, 19 et 7.

Bachet, qui n'a pas cru devoir donner le calcul algébrique d'où il a tiré sa règle, termine en disant:

J'ai tiré cette règle de l'opération de l'algèbre, et partant elle est infaillible; je m'en rapporte au jugement de ceux-là qui savent comme on tire la quintessence d'une opération d'algèbre qui a passé par l'alambic d'un esprit bien délié.

IX

Trois hommes ont à partager 21 tonneaux, dont il y en a sept pleins de vin, sept vides, et sept pleins à demi. Je demande comment se peut faire le partage, en sorte que tous trois aient un égal nombre de tonneaux, et égale quantité de vin.

CHAQUE personne doit avoir évidemment un nombre de tonneaux exprimé par $\frac{21}{3}$, ou 7 tonneaux; et l'on voit que le problème serait impossible, si l'on donnait des nombres tels que ce premier quotient ne fût pas un nombre entier.

Remarquons maintenant que le partage du liquide est le même que celui des tonneaux, puisqu'il équivaut à 21 tonneaux demi-pleins; chaque personne ayant 7 tonneaux doit donc avoir en liquide l'équivalent de 7 tonneaux demi-pleins, d'où l'on conclut d'abord qu'elle ne peut pas avoir que des pleins et des vides, ce qui ferait un nombre pair de demi-pleins. Mais alors si l'on retranche les demi-pleins, qui sont nécessairement en nombre impair, les autres formeront un nombre pair de tonneaux représentant autant de demi-pleins qu'il y a de tonneaux, d'où l'on conclut que chaque personne a autant de tonneaux pleins que de tonneaux vides, et que, par suite, le nombre de chacun d'eux est tout au plus égal à la moitié de 6.

Cela posé, partageons 7 en trois parties dont aucune ne surpasse 3, par exemple en

1, 3 et 3.

En considérant chaque nombre comme représentant des tonneaux pleins, et par suite aussi des tonneaux vides, et les distribuant les uns et les autres aux trois personnes, nous aurons distribué tous les tonneaux de ces deux premières espèces; il s'agit de voir qu'en complétant par des tonneaux demi-pleins les vides et les pleins de manière à faire la valeur de 7 tonneaux demi-pleins à chaque personne, on aura aussi distribué les 7 tonneaux demi-pleins. Or, c'est ce qui paraîtra évident si l'on remarque que les tonneaux pleins et les vides qu'on distribue aux trois personnes représentant 14 tonneaux demi-pleins, on les aura nécessairement complétés par 7 tonneaux demi-pleins pour faire la valeur des 21 qu'on distribue aux trois personnes.

Ainsi, cette décomposition du nombre 7 nous donne la solution suivante :

Par le premier nombre 1, une personne prend 1 tonneau plein et un vide, et par suite 5 demi-pleins; par le second nombre 3, une autre personne prend 3 tonneaux pleins et 3 vides, et par suite 1 tonneau demi-plein; enfin, par le dernier nombre 3, la dernière personne prend aussi 3 tonneaux pleins, 3 vides et 1 demi-plein.

On peut aussi décomposer 7 en 2, 2 et 3, ce qui fournit une seconde solution.

Si au lieu de 21 tonneaux il y en avait 27, dont 9 pleins, 9 vides et 9 demi-pleins, à partager entre 3 personnes, chacune en aurait 9; et comme ce nombre se décompose en

	3, 3, 3,
ou	2, 3, 4,
ou encore	1, 4, 4:

il y aurait trois solutions.

Soit maintenant à distribuer entre quatre personnes 24 tonneaux dont 8 pleins, 8 vides et 8 demi-pleins.

Ici Bachet s'est complétement trompé : il a bien distribué 24 tonneaux, mais il en a employé 6 pleins et 6 vides, et par suite 12 demi-pleins.

Chaque personne doit avoir 6 tonneaux, et la valeur de 6 tonneaux demi-pleins; mais c'est le nombre 8 qu'il faut décomposer en parties, et non pas le nombre 6, comme le fait Bachet. De plus, comme il faut la valeur de 6 tonneaux demi-pleins, ce qui peut se faire avec des tonneaux pleins seulement et autant de vides, on partagera 8 en quatre parties dont aucune ne surpasse 3, moitié de 6, et l'on pourra admettre zéro pour l'une des parties; on a ainsi quatre solutions :

2, 2, 2, 2;
3, 2, 2, 1;
3, 3, 1, 1;
3, 3, 2, 0.

La dernière solution signifie qu'une personne prend 3 tonneaux pleins et 3 vides; qu'une seconde personne prend également 3 tonneaux pleins et 3 vides; qu'une troisième personne prend 2 tonneaux pleins, 2 vides, et par suite 2 demi-pleins; et que la dernière personne prend 6 tonneaux demi-pleins.

Soit encore le problème suivant :

Partager entre trois personnes 24 tonneaux dont 5 pleins, 8 vides et 11 demi-pleins, de manière que le nombre de tonneaux et la quantité de liquide soient les mêmes pour chaque personne.

On voit immédiatement que chaque personne doit avoir 8 tonneaux et en liquide la valeur de 7 tonneaux demi-pleins ; par conséquent, une personne ne peut pas avoir plus de trois tonneaux pleins, mais elle peut n'en avoir aucun et prendre 7 tonneaux demi-pleins avec un vide ; on peut donc partager les 5 tonneaux pleins de trois manières :

0, 2, 3,
1, 2, 2,
1, 1, 3,

ce qui fournit trois solutions faciles à compléter :

	1re SOLUTION.	2e SOLUTION.	3e SOLUTION.
Tonneaux pleins,	0, 2, 3 ;	1, 2, 2 ;	1, 1, 3 ;
Tonneaux demi-pleins,	7, 3, 1 ;	5, 3, 3 ;	5, 5, 1 ;
Tonneaux vides,	1, 3, 4 ;	2, 3, 3 ;	2, 2, 4.

X

Il y a 41 personnes en un banquet tant hommes que femmes et enfants qui en tout dépendent 40 sous, mais chaque homme paye 4 sous, chaque femme 3 sous, chaque enfant 4 deniers. Je demande combien il y a d'hommes, combien de femmes, combien d'enfants.

Supposons d'abord un problème où il n'y ait que deux espèces de personnes : soit 42 personnes, hommes et femmes, ayant dépensé 160 sous, chaque homme ayant payé 5 sous et chaque femme 3 sous.

On peut raisonner ainsi : s'il n'y avait eu que des femmes, elles auraient dépensé 42×3 ou 126 sous, dont la différence avec 160 est 34; il faut donc remplacer un certain nombre de femmes par le même nombre d'hommes, de manière que la dépense augmente de 34 sous. Or, chaque homme substitué à une femme augmente la dépense de l'excès de 5 sous sur 3 sous ou de 2 sous; donc, autant de fois 2 est contenu dans 34, autant d'hommes il faut mettre à la place du même nombre de femmes. Il y avait donc 17 hommes, et par suite 25 femmes.

Les anciens arithméticiens ont étendu ce raisonnement au cas de trois espèces de personnes. Ainsi pour le problème rapporté par Bachet, ils disaient : S'il n'y avait eu que des enfants, ils au raient dépensé $\frac{41}{3}$ de sous, dont la différence avec 40 sous est $\frac{120}{3}$ moins $\frac{41}{3}$ ou $\frac{79}{3}$ de sous; il faut donc remplacer un certain nombre d'enfants par le même nombre d'hommes et de femmes, de manière que la dépense augmente de $\frac{79}{3}$ de sous. Or, chaque homme substitué à un enfant augmente la dépense de $4 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{11}{3}$ de sous, et chaque femme substituée à un enfant augmente la dépense de $3 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{8}{3}$ de sous; donc il faut partager $\frac{79}{3}$ en deux nombres dont l'un soit multiple de $\frac{11}{3}$ et l'autre de $\frac{8}{3}$, ou plus simplement partager 79 en deux nombres dont l'un soit multiple de 11, et l'autre de 8. En retranchant de 79 la somme $11 + 8$ ou 19 une ou plusieurs fois, jusqu'à ce qu'il reste un multiple de 11 ou un multiple de 8, on en déduira une solution. Dans le cas actuel, ayant retranché de 79 3 fois 19, il reste 22; d'où l'on conclut que 79 contient 5 fois 11 et 3 fois 8 : donc, il y avait 5 hommes, 3 femmes, et, par suite, 33 enfants.

Voici maintenant comment Bachet résout la question. Soit x le nombre des hommes, lesquels dépenseront $3x$ sous; le nombre des femmes et des enfants sera exprimé par $41 - x$, et leur dépense par $40 - 4x$; or ce dernier nombre doit contenir 3 fois le nombre des femmes et le tiers du nombre des enfants; donc, en le multipliant par 3, le produit $120 - 12x$ contiendra 9 fois le nombre des femmes et 1 fois le nombre des enfants; par conséquent, si l'on en retranche $41 - x$, qui représente 1 fois chacun de ces nombres, il restera 8 fois le nombre des femmes : ce reste est $79 - 11x$; donc le nombre des femmes est $\frac{79 - 11x}{8}$; par suite le nombre des enfants est $41 - x - \frac{79 - 11x}{8}$ ou $\frac{249 + 3x}{8}$.

D'après l'expression du nombre des femmes, on voit qu'on doit avoir $11x < 79$ ou $x < 7\frac{2}{11}$,

L'expression du nombre des enfants revient à $31 + \frac{1 + 3x}{8}$; pour que ce nombre soit entier, il faut que $1 + 3x$ soit multiple de 8 : on cherchera donc un multiple de 8 qui surpasse de 1 un multiple de 3, et si ce multiple de 3 ne surpasse pas 7 fois 3, puisque x ne peut pas surpasser 7, on aura résolu la question. On trouve que 16 répond à la question ; donc il y avait $31 + \frac{16}{8}$ ou 33 enfants, 5 hommes (5 étant la valeur de x dans l'égalité $1 + 3x = 16$) et 3 femmes.

Soit encore 20 personnes ayant dépensé 20 sous, les hommes payant 4 sous, les femmes $\frac{1}{2}$ sou et les enfants $\frac{1}{4}$ de sou.

Le nombre des hommes étant désigné par x, leur dépense sera $4x$; le nombre des femmes et des enfants sera donc $20 - x$, et leur dépense $20 - 4x$: ce dernier nombre contient la moitié du nombre des femmes et le quart du nombre des enfants ; donc, son produit par 4, ou $80 - 16x$, contient 2 fois le nombre des femmes et une fois le nombre des enfants ; donc, si on en retranche $20 - x$, qui représente une fois chacun de ces nombre, le reste $60 - 15x$ sera le nombre des femmes, et par suite l'excès de $20 - x$ sur $60 - 15x$ ou $14x - 40$ sera le nombre des enfants. Le nombre des femmes, $60 - 15x$, nous montre qu'on doit avoir $15x < 60$ ou $x < 4$; et le nombre $14x - 40$ des enfants exige qu'on ait $14x > 40$ ou $x > 2\frac{6}{7}$; or, entre $2\frac{6}{7}$ et 4, il n'y a que le nombre entier 3; donc, il y avait 3 hommes et, par suite, 15 femmes et 2 enfants.

Bachet, qui est l'inventeur de cette première méthode d'analyse indéterminée, termine en disant :

J'ajouterai ici, pour conclusion de ce livre, ce que j'ai trouvé en examinant les deux dernières questions du livre XVII de la première partie de l'Arithmétique de Tartaglia.

En la première, il propose de diviser le nombre 100 en quatre nombres entiers, tellement que, multipliant le premier par 3, le second par 1, le troisième par $\frac{1}{3}$, le quatrième par $\frac{1}{2}$, la somme des produits soit aussi 100, et il donne une seule solution, mettant le premier nombre 19, le second 22, le troisième 51, le quatrième 8, ajoutant encore qu'il ne sait point soudre de semblables questions qu'en y procédant à tâtons. Je treuve par un discours infaillible et fondé en bonne démonstration que cette question ainsi proposée peut recevoir infinies solutions en admettant les fractions, à cause qu'on peut mettre pour le premier nombre tout nombre moindre que 25; mais en nombres entiers, elle reçoit 226 solutions, à cause qu'on peut mettre pour le premier nombre tout nombre plus grand que l'unité et qui ne surpasse pas 24, et mettant pour le premier nombre 24, on peut donner 3 solutions; le mettant 23, on en peut donner 7; le mettant 22, il y a 11 solutions; le mettant 21, il y en a 15; le mettant 20, il y en a 19; le mettant 19, il y en a 18; le mettant 18, il y en a 17; et ainsi consécutivement diminuant toujours d'une, jusques au nombre 2, lequel étant mis pour le premier nombre ne donne qu'une solution.

J'aurais crainte d'ennuyer le lecteur, et encore plus l'imprimeur, si je voulais ici coucher par ordre toutes les susdites 226 solutions; mais pour ne point frustrer entièrement les plus curieux de leur attente, je rapporterai seulement les 18 qui se treuvent mettant le premier nombre 19.

19	19	19	19	19	19	19	19	19
23	22	21	20	19	18	17	16	15
54	51	48	45	42	39	36	33	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36
19	19	19	19	19	19	19	19	19
14	13	12	11	10	9	8	7	6
27	24	21	18	15	12	9	6	3
40	44	48	52	56	60	64	68	72

Voici comment Bachet résout les questions de ce genre dans son commentaire sur la proposition 41 du livre IV de Diophante.

Soit x le premier nombre; son produit par 3 est $3x$; la somme des autres nombres est donc $100 - x$, et la somme de leurs produits par $1, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ est $100 - 3x$, qui doit évidemment être plus grande que $(100 - x) \times \frac{1}{3}$; donc $100 - x$ doit être plus petit que $300 - 9x$, d'où l'on conclut $8x < 200$ ou $x < 25$.

Prenons $x = 24$; la somme des autres nombres sera 76, et la somme de leurs produits par 1, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera 28. Si donc y est le second nombre, la somme des autres sera $76 - y$, et la somme de leurs produits par $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera $28 - y$; cette dernière somme contient par conséquent $\frac{1}{3}$ du troisième nombre et $\frac{1}{2}$ du quatrième; donc, son produit par 6 ou $168 - 6y$ contiendra 2 fois le troisième nombre et 3 fois le quatrième; mais $76 - y$ étant multiplié par 2 donne 2 fois le troisième nombre et 2 fois le quatrième; donc, l'excès de $168 - 6y$ sur $2(76 - y)$, lequel est $16 - 4y$, vaut une fois le quatrième nombre, et par suite l'excès de $76 - y$ sur $16 - 4y$, c'est-à-dire $60 + 3y$, représente une fois le troisième nombre.

Puisque le quatrième nombre est exprimé par $16 - 4y$, il faut qu'on ait $4y < 16$ ou $y < 4$; donc le premier étant 24, le second est 1, 2 ou 3; alors on trouve que le troisième est 63, 66 ou 69, et que le quatrième est 12, 8 ou 4.

On trouvera de même les solutions pour $x = 23$, pour $x = 22$, pour $x = 21$, etc.

Soit encore $x = 19$, dont le produit par 3 est 57. La somme des autres nombres sera 81, et la somme de leurs produits par 1, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera 43. Si donc y est le second nombre, la somme des autres sera $81 - y$, et la somme de leurs produits par $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera $43 - y$. En opérant sur ces deux sommes comme dans le cas précédent, on trouve que le quatrième nombre est exprimé par $96 - 4y$, et le troisième par $3y - 15$. On doit donc avoir $4y < 96$ ou $y < 24$, et $3y > 15$ ou $y > 5$; ainsi y peut recevoir toutes les valeurs entières de 6 à 23, ce qui fait 18 solutions. On calculera au moyen des expressions $3y - 15$ et $96 - 4y$ les valeurs correspondantes du troisième et du quatrième nombre

La seconde question de Tartaglia est : diviser 200 en cinq nombres entiers tellement que, multipliant le premier par 12, le second par 5, le troisième par 1, le quatrième par $\frac{1}{2}$, le cinquième par $\frac{1}{3}$, la somme des produits soit aussi 200; et ledit auteur se tient bien glorieux d'avoir pu trouver une solution, à savoir: mettant le premier 6, le second 12, le troisième 34, le quatrième 52, le cinquième 96. Mais je veux que le lecteur s'étonne quand il verra que j'assure que cette question reçoit 6639 solutions, toutes par nombres entiers, d'autant qu'on peut mettre pour le premier nombre tout nombre moindre que $11\frac{3}{7}$; et mettant ledit premier nombre 11, il y a 3 solutions; le mettant 10, il y en a 60; le mettant 9, il y en a 200; le mettant 8, il y en a 388; le mettant 7, il y en a 571; le mettant 6, il y en a 704; le mettant 5, il y en a 832; le mettant 4, il y en a 914; le mettant 3, il y en a 977; le mettant 2, il y en a 985; le mettant 1, il y en a 1005. Que s'il me fallait rapporter ici toutes lesdites solutions en particulier, elles rempliraient plus d'une vingtaine de pages, ce qui serait ennuyeux. C'est pourquoi je me contenterai de coucher ici toutes celles qui se treuvent en mettant le premier nombre 6 et le second 12, comme fait Tartaglia, lesquelles solutions sont en tout 44, comme l'on peut voir:

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
132	129	126	123	120	117	114	111	108	105	102
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
99	96	93	90	87	84	81	78	75	72	69
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132
66	63	60	57	54	51	48	45	42	39	36
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176
33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3

SUPPLÉMENT

AUX

PROBLÈMES PLAISANTS & DÉLECTABLES

PROBLÈME I

Deux Arabes allaient dîner: l'un avait 5 plats, et l'autre 3, et tous ces plats étaient de même valeur; un troisième Arabe survenant leur proposa de dîner avec eux, les plats étant mis en commun, promettant d'ailleurs de payer sa part du dîner, ce qu'il fit en donnant 8 deniers. On demande comment les deux autres Arabes doivent se partager ces 8 deniers.

D'APRÈS l'énoncé, la dépense de chaque convive est de 8 deniers; la dépense totale est donc de 24 deniers, d'où l'on conclut que la valeur de chaque plat est de 3 deniers; donc, celui qui en a fourni 5 a donné une valeur de 15 deniers, et comme sa consommation est de huit deniers, il lui revient 7 deniers. On voit de même que celui qui a fourni 3 plats a donné la valeur de 9 deniers, et que sa consommation étant de 8 deniers, il lui revient 1 denier.

PROBLÈME II

Un mobile qui doit parcourir une ligne de 173 mètres avance de 9 mètres dans chacune des heures de rang impair et recule de 5 mètres dans chacune des heures du rang pair : on demande quel temps il mettra pour parcourir la ligne.

Il semblerait naturel de résoudre ce problème en raisonnant de la façon suivante :

D'après l'énoncé, en 2 heures le mobile avance de 9 — 5 ou 4 mètres ; or 173 mètres contiennent 43 fois 4 mètres plus 1 mètre; donc, le mobile mettra 43 fois 2 heures plus $\frac{1}{9}$ d'heure pour le dernier mètre, c'est-à-dire 86 heures et $\frac{1}{9}$ pour parcourir les 173 mètres.

Mais on n'obtient pas ainsi la solution de la question, car dans la dernière heure où le mobile arrive à l'extrémité de la ligne, il doit avoir plus de 5 mètres à parcourir, puisqu'il vient de reculer de 5 mètres, et il n'en doit pas rester plus de 9, sans quoi il ne les parcourrait pas dans cette heure-là. Donc, en divisant 173 par 4, il faut prendre le quotient de manière qu'il reste plus de 5 et pas plus de 9, ce qui a lieu en prenant 41 au lieu de 43; et comme alors il reste 9, on en conclut que le mobile mettra 41 fois 2 heures plus 1 heure, ou 83 heures, pour parcourir les 173 mètres.

PROBLÈME III

Une personne ayant 3 jetons dans une main et 6 dans l'autre, deviner, sans lui rien demander, dans quelle main sont les 3 jetons.

Dites à la personne de doubler le nombre qui est dans sa main droite et de tripler celui qui est dans sa main gauche, de faire la somme de ce double et de ce triple, de diviser cette somme en deux parties égales, et de retrancher 11 de l'une des moitiés : si elle exécute ces différents calculs sans faire d'objection, c'est que les 3 jetons sont dans la main droite.

En effet, dans ce cas elle obtint les nombres suivants : 3×2 ou 6, 6×3 ou 18, $6+18$ ou 24, 24 : 2 ou 12, $12-11$ ou 1. Tandis que si les 3 jetons sont dans la main gauche, elle obtiendra ces autres nombres : 6×2 ou 12, 3×3 ou 9, $12+9$ ou 21, 21 : 2 ou $10\frac{1}{2}$ dont elle ne pourra retrancher 11. Alors elle vous dira que c'est impossible ; vous lui répondrez, sans avoir l'air d'y attacher d'importance, qu'il est fort indifférent de retrancher 11 ou 9 ; et vous pourrez terminer en lui faisant faire encore quelques autres opérations inutiles, mais qui ne puissent amener aucune objection, comme de doubler le reste et d'ajouter 5, etc.

En général, avec deux nombres d'objets a et $2a$, le calcul conduit à $4a$ si a est dans la main droite, et à $3a + \frac{a}{2}$ si a est dans la main gauche : si donc on demande à la personne d'en retrancher un nombre compris entre $4a$ et $3a + \frac{a}{2}$, il y aura impossibilité dans le second cas.

PROBLÈME IV

Une carte ayant été choisie par une personne dans un jeu de 32 cartes, faire que cette carte se trouve dans le jeu à un rang assigné d'avance.

Dites à une personne de choisir une carte dans le jeu et d'en retenir le numéro en comptant les cartes à partir de la première carte du dessous du jeu ; et annoncez le rang auquel elle se trouvera à partir de la première carte du dessus : soit le vingtième rang. Prenez alors les cartes, et faites passer sur le jeu 20 cartes du dessous (ce que vous pourrez faire sans qu'on en sache le nombre, en cachant les cartes d'une manière quelconque) ; puis remettez les cartes à la personne, et demandez-lui le numéro de la carte qu'elle a choisie. Si ce numéro est moindre que 20, 15 par exemple, sa carte aura passé sur le jeu, et elle sera précédée de $20 - 15$ cartes ; son rang sera donc $20 - 15 + 1$; donc, si vous lui dites de prendre sous le jeu $15 - 1$ ou 14 cartes et de les mettre dessus, le rang de la carte choisie sera 20, comme vous l'avez annoncé. Si au contraire le numéro de la carte est plus grand que 20, 25 par exemple, comme le rang de la carte à partir du dessus était au commencement $32 - 25 + 1$, il sera alors $20 + 33 - 25$; si donc vous dites à la personne de mettre sous le jeu 33 — 25 ou 8 cartes prises dessus, le rang de la carte choisie sera 20, comme vous l'avez annoncé.

En général, soient a le numéro de la carte choisie et b le rang que vous avez annoncé ; vous faites passer sur le jeu b cartes du dessous, et vous demandez le numéro a de la carte choisie. Si a est plus petit que b, vous faites mettre sur le jeu $a - 1$ cartes prises sous le jeu ; et si a est plus grand que b, vous faites mettre sous le jeu $33 - a$ cartes prises sur le jeu.

Comptant alors les cartes du dessus jusqu'à celle dont le rang est b, celle-ci sera la carte choisie.

PROBLEME V

Un jour Bacchus ayant vu que Silène
Dormait profondément, prit sa coupe, et sans gêne,
Dans le cellier, à l'aise il s'attabla,
Près d'une amphore pleine
Où reposait un vieux vin, qu'avec peine
Son ami conservait pour des jours de gala.
Il but pendant le triple du dixième
Du temps qu'à boire seul Silène eût employé
Pour vider l'amphore elle-même ;
Mais Silène survient, et son chagrin extrême
Dans le reste du vin est aussitôt noyé.
Quand l'amphore fut vide,
Avec regret Bacchus vit que sa part
Du précieux liquide
N'avait été que tout juste le quart
De celle de Silène.
Si, tout d'abord, d'une commune haleine,
Chacun buvant à sa façon,
Ils s'étaient réunis, ils auraient mis, dit-on,
Huit quarts d'heure de moins pour épuiser l'amphore.
Comment l'a-t-on su ? Je l'ignore.
On veut, d'après cela, trouver exactement

Le temps que chacun d'eux eût mis séparément,
Si, buvant seul, de la même manière,
Il avait mis à sec l'amphore tout entière.

Il résulte de l'énoncé que Bacchus ne but que $\frac{1}{5}$ de l'amphore, et que Silène en eut les $\frac{4}{5}$. L'amphore a donc été vidée en $\frac{3}{10} + \frac{4}{5}$ ou $\frac{11}{10}$ du temps que Silène y aurait mis en buvant seul.

D'un autre côté, s'ils avaient bu ensemble pendant le temps que Bacchus a bu seul, ils auraient retiré de l'amphore $\frac{1}{5} + \frac{3}{10}$ ou $\frac{5}{10}$; ainsi la moitié de l'amphore aurait été bue pendant les $\frac{3}{10}$ du temps que Silène emploierait seul pour la vider; donc toute l'amphore serait bue dans les $\frac{6}{10}$ du temps que Silène y emploierait en buvant seul; ce qui fait $\frac{5}{10}$ de moins que dans le premier cas.

Ces $\frac{5}{10}$ correspondent à une diminution de 2 heures; donc Silène aurait bu la moitié de l'amphore en 2 heures; par conséquent, il l'aurait vidée en 4 heures.

Quant à Bacchus, on voit que nos deux buveurs mettent respectivement, pour boire $\frac{1}{5}$ de l'amphore, des temps exprimés par $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{5}$, dont le rapport est $\frac{3}{2}$; par conséquent, Bacchus aurait mis pour vider l'amphore $4 \times \frac{3}{2}$ ou 6 heures.

PROBLÈME VI

Un bon bourgeois fit faire dans sa cave un casier de neuf cases disposées en carré ; la case du milieu était destinée à recevoir les bouteilles vides provenant de la consommation de 60 *bouteilles pleines qu'il disposa dans les* 8 *autres cases en mettant* 6 *bouteilles dans chaque case des angles, et* 9 *dans chacune des autres cases. Son domestique enleva d'abord* 4 *bouteilles qu'il vendit, et il disposa les bouteilles restantes de manière qu'il y eût toujours* 21 *bouteilles sur chaque côté du carré. Le maître, trompé par cette disposition, pensa que son domestique n'avait fait qu'une transposition de bouteilles, et qu'il y en avait toujours le même nombre. Le domestique profita de la simplicité de son maître pour enlever de nouveau* 4 *bouteilles, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne fût plus possible d'en enlever* 4 *sans que le nombre* 21 *cessât de se trouver sur chaque côté du carré. On demande comment il s'y prit à chaque fois, et de combien de bouteilles il fit tort à son maître.*

En désignant par a le nombre de bouteilles mises dans chacun des angles, et par b le nombre de celles qui se trouvent dans chacune des autres cases, on voit que le nombre total des bouteilles est $$2\,(a + b + a) + 2\,b\,;$$

donc $a+b+a$ restant fixe, le nombre des bouteilles est d'autant moindre que b est plus petit; et si b diminue de 2, le nombre des bouteilles diminuera de 4; par conséquent, à chaque fois le domestique prenait deux bouteilles dans chacune des cases du milieu, ce qui faisait huit bouteilles; il en mettait une dans chacun des angles, et il gardait les quatre autres. Or, il y a primitivement 9 bouteilles dans chacune des cases du milieu; donc, il pourra répéter quatre fois son opération et faire tort à son maître de 16 bouteilles.

DISPOSITION PRIMITIVE.

6	9	6
9		9
6	9	6

PREMIÈRE OPÉRATION.

7	7	7
7		7
7	7	7

DEUXIÈME OPÉRATION.

8	5	8
5		5
8	5	8

TROISIÈME OPÉRATION.

9	3	9
3		3
9	3	9

QUATRIÈME OPÉRATION.

10	1	10
1		1
10	1	10

Nous avons supposé que le domestique conservait la symétrie de la disposition primitive; mais on peut supposer une disposition irrégulière, pourvu que la somme s des bouteilles qui se trouvent sur chaque côté du carré soit toujours la même. Si l'on désigne par m, n, p, q les nombres de bouteilles placées dans les angles, on voit que le nombre total des bouteilles est

$$4s - (m+n+p+q);$$

cette somme diminuera

m	f	n
k		g
p	h	q

si $m+n+p+q$ augmente, s restant constant. Par exemple, ayant pris sur f et k le même nombre x de bouteilles, si l'on en met x avec m, s ne changera pas, et le nombre des bouteilles aura diminué de x; il en serait de même si le nombre x était pris sur f et g et mis avec n, etc. De même si l'on prend x sur chacun des nombres f, g, h, k, et qu'on mette x sur m et q ou sur n et p, ou $\frac{x}{2}$ sur chacun des nombres m, n, p, q, le nombre s n'aura pas changé et le nombre total des bouteilles aura diminué de $2x$. On peut donc à volonté diminuer le nombre des bouteilles de 1, de 2, de 3, de 4, etc.

Pour une somme s assignée, le maximum du nombre des bouteilles a lieu quand on n'en met pas dans les cases angulaires : ce maximum est $4s$; et le minimum a lieu quand on n'en met pas dans les cases du milieu : ce minimum est $2s$.

PROBLÈME VII

Trois cartes sur lesquelles on a inscrit les lettres A, B, C, *ont été prises secrètement par trois personnes auxquelles on avait remis préalablement les nombres* 12, 24 *et* 36. *On dit à la personne qui a reçu le nombre* 12 *d'y ajouter la moitié du nombre de la personne qui a pris la carte* A, *le tiers de celui de la personne qui a pris la carte* B, *et le quart de celui de la personne qui a pris la carte* C; *puis on lui demande la somme qu'elle a obtenue Comment, d'après cette somme, pourra-t-on savoir quelle personne a pris chacune des cartes* A, B, C?

Il peut se présenter six cas différents :

1re PERS.	2e PERS.	3e PERS.
12	24	36
A	B	C
A	C	B
B	A	C
C	A	B
B	C	A
C	B	A.

Comme le multiplicateur moyen $\frac{1}{3}$ n'est pas égal à la demi-somme des deux autres $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, on aura nécessairement six résultats différents (note IV). Ces résultats (que l'on calculera facilement) sont :

35, 36, 37, 39, 40, 41.

Pour les deux premiers, l'objet A est à la première personne, pour les deux suivants, il est à la seconde, et pour les deux derniers, il est à la troisième. On retiendra de plus que, pour les résultats de rang impair, l'ordre est direct entre les deux autres personnes et les deux autres objets, tandis que pour les résultats de rang pair l'ordre est inverse entre ces deux personnes et ces deux objets.

PROBLÈME VIII

Un nombre pensé qui ne surpasse pas 16 *a été multiplié par* 3, *et le produit, augmenté de* 1 *s'il était impair, a été divisé par* 2 ; *le quotient a été soumis aux mêmes opérations; le nouveau quotient l'a été également, ainsi que le troisième quotient qui en est résulté. Comment pourra-t-on déterminer le nombre pensé par la seule connaissance du rang de chaque produit qui a été augmenté d'une unité avant la division par* 2 ?

On remarquera que pour le nombre 16 les quatre moitiés se prennent sans l'addition d'une unité; que pour le nombre 8 la quatrième moitié seulement se prend avec addition d'une unité; que pour le nombre 4, c'est la troisième; que pour le nombre 14, c'est la seconde; et que pour le nombre 5, c'est la première.

Il est ensuite évident que l'on peut ajouter ou retrancher 16 à un nombre sans changer la manière dont les moitiés pourront être prises : par exemple, pour les nombres 5 et 21, la première moitié seulement se prendrait avec addition d'une unité. De plus, si plusieurs nombres sont tels qu'en les soumettant aux calculs assignés les moitiés qui exigent l'addition d'une unité soient de rangs différents pour tous ces nombres, leur somme étant soumise aux mêmes calculs, les moitiés qui exigeaient l'addition d'une unité seront toutes celles qui l'exigeaient dans ces nombres eux-mêmes : par exemple, 5 + 14 ou 19 exigerait l'addition d'une unité à la première et à la seconde moitié seulement.

Il est facile, d'après ces principes, de trouver chaque nombre, connaissant les rangs des moitiés qui exigent l'addition d'une unité. Par exemple, un nombre ayant exigé cette adition à la première et à la troisième division, on en conclura immédiatement que ce nombre est 5 + 4 ou 9. Un autre nombre ayant exigé l'addition de l'unité aux trois premières divisions, on prendra 3 + 14 + 4 ; mais cette somme 23 surpassant 16, on en retranchera 16, et l'on aura le nombre 7. Voici le tableau des 16 combinaisons :

NOMB.	PROVIENT DE	NOMB.	PROVIENT DE
1	5+4+8.	9	5+4.
2	14+4.	10	14+4+8.
3	5+14.	11	5+14+8.
4	4.	12	4+8.
5	5.	13	5+8.
6	14+8.	14	14.
7	5+14+4.	15	5+14+4+8.
8	8.	16	16

PROBLÈME IX

Une personne ayant pensé un nombre, dites-lui d'en penser un second plus grand que le premier, et de prendre le quotient complet de la différence des deux nombres par leur produit augmente de 1 ; qu'elle retranche ensuite ce quotient du plus grand nombre pensé, et qu'elle triple le reste obtenu, ce qui lui fera un certain nombre A ; *puis qu'elle multiplie ce même quotient par le plus grand nombre pensé et qu'elle double le produit augmenté de* 1, *ce qui lui fera un nombre* B; *enfin qu'elle divise le nombre* A *par le nombre* B. *Si elle vous dit le quotient qu'elle obtient alors, comment en déduirez-vous le premier nombre pensé?*

Si l'on désigne le premier nombre pensé par b et l'autre par a, les calculs exécutés seront représentés par

$$\frac{3\left(a - \frac{a-b}{ab+1}\right)}{2\left(\frac{a-b}{ab+1}a + 1\right)}.$$

En simplifiant cette expression, on trouve qu'elle se réduit à $\frac{3b}{2}$; donc on aura le premier nombre pensé en prenant les $\frac{2}{3}$ du résultat obtenu.

Soient, par exemple, 5 le nombre pensé et 7 le nombre choisi supérieur à 5; leur différence est 2, et leur produit augmenté de 1 est 36; le quotient de 2 par 36 est $\frac{2}{36}$ ou $\frac{1}{18}$; ce nombre étant retranché de 7, on a $6\frac{17}{18}$, et son produit par 7 est $\frac{7}{18}$, auquel on ajoute 1, ce qui fait $\frac{25}{18}$; enfin on divise $\left(6\frac{17}{18}\right)\times 3$ par $\frac{25}{18}\times 2$, ce qui donne $\frac{15}{2}$, dont les $\frac{2}{3}$ sont le nombre pensé 5.

PROBLÈME X

Inscrire les cent premiers nombres sur différents cartons de manière que, connaissant les cartons où se trouve un nombre, on puisse deviner ce nombre immédiatement.

Tout nombre entier est une puissance de 2 ou la somme de plusieurs puissances différentes de 2, plus 1 s'il est impair. Car un nombre quelconque étant écrit dans le système de numération dont la base est 2, où les chiffres sont 0 et 1, il sera la somme des valeurs des chiffres significatifs 1 qui entrent dans son écriture, lesquels, à partir du second ordre, expriment des puissances de la base 2, toutes différentes les unes des autres.

Ainsi $110010 = 2^5 + 2^4 + 2,$

et $100111 = 2^5 + 2^2 + 2 + 1.$

Si donc on écrit d'abord sur autant de cartons séparés les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,... puis qu'on inscrive chacun des autres nombres dans chacun des cartons qui contiennent les puissances de 2 dont il est la somme, par exemple 3 dans les cartons qui contiennent 1 et 2, 5 dans ceux qui contiennent 1 et 4, 6 dans ceux qui contiennent 2 et 4, 7 dans ceux qui contiennent 1, 2 et 4, et ainsi de suite, il suffira, pour deviner un nombre qu'une personne a pensé, de lui présenter les cartons, l'un après l'autre, en lui demandant si le carton contient le nombre pensé, et de faire la somme des puissances de 2 inscrites dans les cartons où elle a dit que le nombre se trouve (le nombre 1 est regardé comme une puissance de 2).

Pour varier le jeu, on pourra deviner des noms au lieu de devi ner des nombres; il suffira d'affecter un nom à chacun des nombres précédemment écrits, comme Adolphe, Adèle, Émile, Irma, etc., et d'écrire le nom dans chaque carton à côté du nombre qui lui est assigné. La connaissance des cartons où se trouve le nom fera connaître le nombre qui lui est assigné (comme on l'a expliqué précédemment), et, par suite, il suffira de regarder dans l'un de ces cartons quel est le nom qui se trouve à côté de ce nombre.

On pourrait faire un jeu semblable avec les puissances de 3, mais il serait un peu moins simple.

PROBLÈME XI

On demande de disposer en carré les quatre quatrièmes majeures d'un jeu de cartes de manière que dans chaque bande horizontale, verticale et diagonale, on trouve, dans un ordre quelconque, un as, un roi, une dame et un valet, et en même temps un cœur, un carreau, un pique et un trèfle.

Désignons par A, B, C, D les noms des cartes, abstraction faite de la couleur, et par *a*, *b*, *c*, *d* les noms des couleurs. Le problème revient à faire un carré magique de 16 cases tel, que les lettres A, B, C, D se trouvent toutes les quatre dans chaque ligne horizontale, verticale et diagonale, qu'il en soit de même des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, et que les petites lettres y soient combinées de toutes les manières possibles avec les grandes lettres.

Commençons par disposer les grandes lettres, ce qui n'offre aucune difficulté : mettons-les par ordre dans la première horizontale, et remplissons la diagonale qui descend de gauche à droite, ce qui peut se faire de deux manières, par A, C, D, B, ou par A, D, B, C; en adoptant la première manière, et achevant de remplir le carré, ce qui ne peut se faire que d'une seule façon, nous aurons le carré suivant :

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Pour placer les petites lettres, nous les mettrons d'abord à côté des lettres de même nom dans la diagonale A, C, D, B, qui deviendra A*a*, C *c*, D *d*, B *b*; puis, prenant deux à deux les cases également distantes de cette diagonale et placées parallèlement à l'autre diagonale, nous mettrons à côté de chaque lettre la petite lettre de même nom que l'autre grande lettre ; ainsi pour les deux lettres B et D, nous aurons B *d* et D *b*, et ainsi des autres. Il en résultera le carré magique suivant:

A*a*	B*d*	C*b*	D*c*
D*b*	C*c*	B*a*	A*d*
B*c*	A*b*	D*d*	C*a*
C*d*	D*a*	A*c*	B*b*

Si l'on remplace alors A, B, C, D par *as*, *roi*, *dame*, *valet*, dans un ordre quelconque, et *a*, *b*, *c*, *d* par *cœur*, *carreau*, *pique*, *trèfle*, aussi dans un ordre quelconque, pourvu que la même lettre ait toujours la même signification dans tout le carré, on aura une solution de la question. Par exemple, si nous donnons aux lettres les significations successives écrites précédemment, nous aurons la solution suivante :

AS DE CŒUR	ROI DE TRÈFLE	DAME DE CARREAU	VALET DE PIQUE
VALET DE CARREAU	DAME DE PIQUE	ROI DE CŒUR	AS DE TRÈFLE
ROI DE PIQUE	AS DE CARREAU	VALET DE TRÈFLE	DAME DE CŒUR
DAME DE TRÈFLE	VALET DE CŒUR	AS DE PIQUE	ROI DE CARREAU

On peut remplacer les grandes lettres par *as, roi, dame, valet,* de 24 manières différentes; et il en est de même des petites lettres, par *cœur, carreau, pique, trèfle ;* donc, le carré des lettres pourra fournir 24×24 ou 576 solutions de la question. Il en sera de même si l'on veut faire un carré magique en nombres.

PROBLÈME XII

Une personne prend 27 cartes dont elle fait trois tas en les mettant une à une et successivement dans les trois tas dont chacun contient ainsi 9 cartes. (Les cartes ont la face tournée vers le bas quand elles sont dans la main de la personne, et celle-ci les retourne en les distribuant en trois tas.) Pendant cette répartition, une autre personne choisit par la pensée une carte dans l'un des tas ; cette carte s'appelle la carte pensée. La première personne ramasse ensuite les tas après qu'on lui a fait connaître celui qui contient la carte pensée.

Elle distribue de nouveau et de la même manière les cartes en trois tas ; puis elle ramasse les tas sans déranger l'ordre des cartes de chaque tas, et après qu'on lui a fait connaître celui qui contient alors la carte pensée.

Elle distribue une troisième fois et de la même manière les cartes en trois tas, et elle les ramasse de même après qu'on lui a fait connaître celui qui contient la carte pensée.

On demande comment elle doit placer à chaque fois le tas qui contient la carte pensée pour qu'à la fin cette carte occupe dans le jeu un rang assigné.

DÉSIGNONS par a, b, c les rangs auxquels on met successivement le tas qui contient la carte pensée. Il y a d'abord $a - 1$ tas de 9 cartes à distribuer avant celui qui contient la carte pensée; ils fournissent $3(a-1)$ cartes à chaque tas, puis celui qui contient la carte pensée en fournit 3, en sorte que, dans le tas qui la contient, cette carte est dans les 3 dernières des $3(a-1)+3$ premières cartes.

On fait ensuite précéder ce tas de $b-1$ autres, ce qui fait

$$9(b-1)+3(a-1)+3$$

cartes à distribuer d'abord; chaque tas en reçoit

$$3(b-1)+(a-1)+1,$$

et la carte pensée est la dernière de ces cartes. On les fait ensuite précéder de $c-1$ tas, ce qui donne

$$9(c-1)+3(b-1)+(a-1)+1$$

pour le rang R de la carte pensée dans le jeu.

On a donc la formule

$$R=9(c-1)+3(b-1)+a.$$

Cette formule sert immédiatement à trouver R quand on connaît a, b, c Connaissant R, on trouvera a, b, c par la règle suivante :

Divisez le rang assigné R successivement par 3 et par 3, et de manière que la première division ne donne pas un reste nul; ce reste sera a et indiquera à quel rang il faut mettre la première fois le tas qui contient la carte pensée; le second reste augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la seconde fois, et le second quotient augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la troisième fois.

Exemple I. — On veut que la carte pensée sorte la onzième :

$$\begin{array}{r|l|l}
11 & 3 & \\ \cline{2-3}
2 & 3 & 3 \\ \cline{3-3}
 & 0 & 1
\end{array}$$

Il faudra mettre le tas qui la contient la première fois au second rang, la seconde fois au premier, et la troisième fois au second.

Exemple II. — On veut que la carte pensée sorte la neuvième :

9	3	
3	2	3
	2	0

Il faudra mettre le tas qui la contient la première fois au troisième rang, la seconde fois au troisième rang, et la troisième fois au premier rang.

Remarque. — Lorsqu'on exécute ce tour plusieurs fois de suite, il est bon d'y apporter quelque variété : par exemple, on peut une première fois chercher dans le jeu la carte pensée, les mains derrière, et la poser ensuite sur la table. On peut une seconde fois annoncer, avant même que la carte soit pensée, le rang qu'elle occupera dans le jeu ; ou bien on demande à l'un des spectateurs de désigner le rang qu'il veut qu'elle y occupe. Enfin on peut faire tenir les cartes par l'un des spectateurs, qui ramassera les tas comme il voudra ; il suffira de remarquer à chaque fois le rang qu'il donne au tas qui contient la carte pensée, et d'appliquer la formule.

Il serait facile de généraliser la question pour un nombre quelconque n^n de cartes ; mais on n'en pourrait tirer une nouvelle récréation, vu le nombre limité de cartes dont un jeu se compose. Voyez pourtant *Annales de Mathématiques de Gergonne*, t. IV.

PROBLÈME XIII

Faire le même jeu avec 48 cartes que l'on distribuera trois fois de suite en quatre tas.

Soient a le rang assigné au tas qui contient la carte pensée la première fois qu'on ramasse les tas, b le rang qu'on lui assigne la seconde fois, et c le rang qu'on lui assigne la troisième fois.

Lorsqu'on a mis au rang b le tas qui contenait la carte pensée, on a fait précéder ce tas de $12(b-1)$ cartes qui, réparties ensuite entre les quatre tas, ont donné d'abord $3(b-1)$ cartes dans chaque tas; donc, la carte pensée se trouve dans son tas à la suite de ces $3(b-1)$ cartes, et si nous appelons r le rang qu'elle occupe après ces cartes-là, nous aurons $3(b-1)+r$ pour le rang de la carte dans le tas qui la contient. Nous ramassons les tas et nous mettons $12(c-1)$ cartes avant le tas qui contient la carte pensée; donc, en désignant par R le rang qu'occupe alors la carte dans le jeu, nous aurons

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + r.$$

Il s'agit maintenant de savoir d'où vient la quantité r.

La première fois qu'on a ramassé les tas, on a fait précéder de $12(a-1)$ cartes celui qui contenait la carte pensée; en faisant alors la distribution des cartes, on a d'abord mis dans chaque tas $3(a-1)$ cartes, puis 3 cartes du tas contenant la carte pensée ; et a la ditribution suivante on a réparti ces $3(a-1)+3$ cartes dans les quatre tas après les $3(b-1)$ cartes qu'on a mises d'abord dans chacun : c'est cette distribution qui a donné le rang r. Or, si $a=1$, on a seulement à distribuer les 3 cartes où se trouve la carte pensée ; elle se trouvera donc au premier rang après les $3(b-1)$ cartes, et l'on a :

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 1 \qquad (1).$$

Si $a=4$, la quantité $3(a-1)+3$ devient égale à 12 ; ces 12 cartes étant distribuées fournissent 3 cartes à chaque tas, et comme la carte pensée est parmi les trois dernières, elle se trouvera la troisième après les $3(b-1)$ cartes, comme le montre cette figure, où x désigne la carte pensée :

I^er^ TAS.	2^e^ TAS.	3^e^ TAS.	4^e^ TAS.
c,	c,	c,	c,
c,	c,	c,	c,
c,	x,	x,	x.

On a donc dans ce cas :

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 3 \qquad (2).$$

Si $a=3$, la quantité $3(a-1)+3$ devient égale à 9, et la distribution de ces 9 cartes à la suite des $3(b-1)$ cartes qui sont déjà placées se fait de la manière suivante :

I^er^ TAS.	2^e^ TAS.	3^e^ TAS.	4^e^ TAS.
c,	c,	c,	c
c,	c,	x,	x,
x.			

Donc, si la carte pensée n'est pas dans le premier tas, elle se trouve la seconde du tas après les $3\,(b-1)$ premières cartes, et l'on a:

$$R = 12\,(c-1) + 3\,(b-1) + 2 \qquad (3).$$

Mais si la carte pensée se trouve dans le premier tas, on aura:

$$R = 12\,(c-1) + 3\,(b-1) + 3 \qquad (4).$$

Quand cette circontance se présentera, il suffira, après avoir ramassé les tas, de faire passer sous le jeu la première carte de dessus pour que l'égalité (4) soit remplacée par l'égalité (3).

Ainsi le problème est résolu par les équations (1), (2), (3); il en résulte la règle suivante:

Divisez le rang assigné R successivement par 3 et par 4 et de manière que la première division ne donne pas un reste nul: si ce reste est 1, vous mettrez la première fois sur le jeu le tas qui contient la carte pensée; si ce reste est 3, vous le mettrez sous le jeu; et si ce reste est 2, vous le mettrez au troisième rang; le second reste augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la seconde fois, et le second quotient augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la troisième fois; mais si la première fois le tas de la carte pensée a été mis le troisième, et que la troisième fois cette carte se trouve dans le premier des quatre tas, il faudra, après avoir ramassé les tas, faire passer sous le jeu la première carte du dessus.

Exemple I. — On veut que la carte pensée sorte la 37ᵉ.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 3 \\ \hline 1 & \begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \end{array}$$

La première fois le tas de la carte pensée sera mis le premier, la seconde fois le premier, et la troisième fois le quatrième.

Exemple II. — On veut que la carte pensée sorte la 20°.

$$\begin{array}{r|ll} 20 & 3 & \\ \cline{2-3} 2 & 6 & \multicolumn{1}{|l}{4} \\ \cline{3-3} & 2 & \multicolumn{1}{|l}{1} \end{array}$$

La première fois le tas de la carte pensée sera mis le troisième, la seconde fois le troisième, et la troisième fois le second.

Exemple III. — On veut que la carte pensée sorte la 24°.

$$\begin{array}{r|ll} 24 & 3 & \\ \cline{2-3} 3 & 7 & \multicolumn{1}{|l}{4} \\ & 3 & \multicolumn{1}{|l}{1} \end{array}$$

Le tas de la carte pensée sera mis la première fois le quatrième, la seconde fois le quatrième, et la troisième fois le second.

PROBLÈME XIV

Disposer les cartes d'un jeu de piquet les unes à côté des autres, sur quatre rangées, dans un ordre qui permette de les retrouver l'une après l'autre.

Pour expliquer ce jeu, nous nommerons les cartes par leurs valeurs, qui sont 7, 8, 9, 10 pour les plus basses, 11 pour le valet, 12 pour la dame, 13 pour le roi et 14 pour l'as.

On dispose d'abord à découvert les quatre *sept* dans une première colonne; puis à la droite de chaque *sept* on place, également à découvert, les cartes de sa couleur les unes à la suite des autres dans l'ordre suivant :

7, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, pour le premier;
7, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 14, pour le second;
7, 12, 11, 10, 9, 8, 14, 13, pour le troisième;
7, 11, 10, 9, 8, 14, 13, 12, pour le quatrième.

On ramasse ensuite les cartes par colonne, les quatre *sept* exceptés, à partir de la gauche, en mettant, dans la première colonne, 14 sur 13, ces deux cartes sur 12, et ces trois cartes sur 11; on porte ces quatre cartes sur 13 de la seconde colonne, ces cinq cartes sur 12 de la même colonne, ces six cartes sur 11, puis celles-ci sur 10, et l'on passe de la même manière à la troisième colonne et à chacune des suivantes, jusqu'à ce que les 28 cartes soient relevées.

On retourne alors le jeu, et, commençant par la carte du dessus, on met les 7 premières cartes en rangée à la droite du premier *sept*, les 7 suivantes à la droite du second *sept*, et ainsi de suite pour le troisième et le quatrième *sept*.

Il s'agit de trouver parmi ces 28 cartes cachées toute carte qui sera demandée par l'un des spectateurs.

Commençons par voir ce que sont devenues les cartes qui étaient primitivement dans la première rangée.

En considérant la manière dont on a ramassé les cartes et faisant attention qu'on a ensuite retourné le jeu, on voit facilement que les cartes en question se trouvent alors dans leur ordre naturel :

8, 9, 10, valet, dame, roi, as,

et qu'elles occupent dans le jeu les rangs :

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.

Si donc on demande l'une de ces cartes, la dame par exemple on comptera les cartes de 4 en 4, à partir de la quatrième, comme si les quatre rangées étaient les unes au bout des autres, en disant successivement 8, 9, 10, valet, dame, et la carte sur laquelle on aura prononcé le mot *dame* sera la carte demandée.

Quant aux cartes qui étaient dans la seconde rangée, on voit de la même manière que les premières :

8, 9, 10, valet, dame, roi,

se succèdent dans le jeu de 4 en 4, la première y occupant le 7e rang, en sorte que leurs rangs sont :

7, 11, 15, 19, 23, 27.

Quant à l'as, il occupe le 3e rang; mais cela revient à dire qu'il occupe le 31e rang, si après 27 on continue à compter 4 cartes en revenant à la première rangée lorsqu'on a compté la 28e carte. Ainsi, pour retrouver dans l'ordre naturel les cartes qui occupaient primitivement la seconde rangée, il suffit de compter les cartes de 4 en 4 à partir de la 7e, comme si toutes les rangées étaient les unes au bout des autres, et en revenant à la première rangée quand on est obligé de compter au delà de la 28e carte.

Le même examen fera voir qu'on retrouve dans leur ordre naturel les cartes qui occupaient primitivement la troisième et la quatrième rangée, en comptant aussi les cartes de 4 en 4, à partir de la 10e pour celles de la troisième rangée primitive, et à partir de la 13e pour celles de la quatrième rangée, en revenant toujours à la première rangée quand on est obligé de compter au delà de la 28e carte.

Les quatre *sept* qui restent à découvert pendant tout le temps que dure le jeu servent à rappeler constamment quelles étaient les cartes qui occupaient primitivement chaque rangée.

En général, si l'on désigne par n la valeur d'une carte qui était primitivement dans la rangée r, son rang R sera donné par la formule

$$R = 4\,(n-7) + 3\,(r-1).$$

Réciproquement, étant donné le rang R, on pourra nommer la carte.

Si R est multiple de 4, on aura

$$R = 4\,(n-7), \text{ d'où } n = \frac{R}{4} + 7,$$

et ce sera une carte qui était primitivement dans la première rangée.

Si R est multiple de 4 plus 3, on aura

$$R = 4(n - 7) + 3, \text{ d'où } n = \frac{R - 3}{4} + 7,$$

et ce sera une carte qui était primitivement dans la seconde rangée.

On voit de même que $\frac{R - 6}{4} + 7$ et $\frac{R - 9}{4} + 7$ donneront les cartes qui étaient primitivement dans la troisième et dans la quatrième rangée.

Quand on aura pour R l'un des nombres 1, 2, 3, 5, 6, 9, on y ajoutera 28 avant de faire le calcul

PROBLÈME XV

Une personne ayant choisi une carte, puis l'ayant remise dans le jeu, on se propose de faire sortir cette carte à tel rang qu'on voudra, après avoir mêlé les cartes plusieurs fois.

Il y a plusieurs manières de faire ce jeu; mais dans toutes on mêle les cartes de la même façon, et tout le secret du jeu consiste dans ce mélange; toutefois on le présente aux spectateurs comme ayant pour objet de mieux mêler les cartes, puisqu'en effet il les dispose à chaque fois de manière que deux cartes qui étaient ensemble se trouvent ensuite séparées.

Ce mélange consiste à placer la seconde carte sur la première, puis la troisième dessous, la quatrième dessus, la cinquième dessous, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

Pour la commodité des explications qui vont suivre, nous représenterons ces divers mélanges en plaçant les cartes sur une même ligne, comme on le voit ci-dessous pour 12 cartes.

PREMIÈRE DISPOSITION.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

PREMIER MÉLANGE.

12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, 11.

DEUXIÈME MÉLANGE.

11, 7, 3, 2, 6, 10, 12, 8, 4, 1, 5, 9.

TROISIÈME MÉLANGE.

9, 1, 8, 10, 2, 7, 11, 3, 6, 12, 4, 5.

Et ainsi des autres.

Cette sorte de mélange jouit de plusieurs propriétés dont chacune peut donner naissance à une façon particulière de faire le jeu.

La plus simple consiste en ce que si l'on a pris un nombre impair de cartes, la dernière ne change pas de place, comme on le voit par les 9 cartes suivantes :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9.

Si donc on a fait mettre sous le jeu la carte tirée par la personne, on saura qu'elle est toujours à la fin de la rangée, quel que soit le nombre de mélanges opérés ; par conséquent, en faisant passer sous le jeu un certain nombre de cartes de dessus, on donnera à la carte tirée tel rang qu'on aura assigné ou qui l'aura été par l'un des spectateurs. Si m est le nombre des cartes et r le rang de la carte, on fera passer sous le jeu $m-r$ cartes.

Les autres cartes se plaçant indépendamment de la dernière quand il y a un nombre impair de cartes, nous supposerons dans tout ce qui va suivre qu'on opère avec un nombre pair.

Examinons d'abord comment se succèdent les cartes primitives dans les différentes colonnes des dispositions successives :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12;
12,	10,	8,	6,	4,	2,	1,	3,	5,	7,	9,	11;
11,	7,	3,	2,	6,	10,	12,	8,	4,	1,	5,	9;
9,	1,	8,	10,	2,	7,	11,	3,	6,	12,	4,	5;
5,	12,	3,	7,	10,	1,	9,	8,	2,	11,	6,	4;
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Dans le premier mélange, les cartes de rang impair sont à droite, et les cartes de rang pair à gauche; en sorte qu'en désignant par $2n$ le nombre des cartes employées, on voit que sous les cartes

$$1, \quad 2, \ldots (n-1), n, (n+1), (n+2), (n+3), \ldots 2n,$$

se trouvent placées les cartes

$$2n, 2(n-1), \ldots 4, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 5, \ldots (2n-1);$$

en général, sous la carte $n+k$ de la première disposition, se trouve la carte $1+2(k-1)$ ou $2k-1$ de la seconde disposition : et sous la carte $n-k$ de la première disposition se trouve la carte $2+2k$ ou $2(k+1)$ de la seconde disposition. Si $k=o$, la seconde carte est 2.

En second lieu, deux cartes qui occupent le même rang dans deux dispositions successives occupent toujours le même rang et dans le même ordre dans deux autres dispositions successives. Par exemple, la carte 10 et la carte 7 sont au dixième rang dans les deux premières dispositions, au second dans la seconde et la troisième, au sixième dans la troisième et la quatrième, etc. C'est qu'en effet, si la carte 10 de la première disposition est venue au second rang dans la seconde disposition, la carte 7 de celle-ci doit venir au second rang dans la troisième; et ainsi des autres.

On peut conclure de là :

1° Qu'une carte ne peut se reproduire au même rang dans deux dispositions successives que si elle se reproduit ainsi dès le commencement ; car si b se trouve sous a dans la deuxième disposition, b se trouvera aussi sous a dans la troisième, puis dans la quatrième, etc. ; par conséquent, b ne se trouverait jamais sous b.

2° Que si plusieurs cartes se reproduisent périodiquement à un même rang, cette reproduction aura lieu à partir de la carte a qui occupe ce rang dans la première disposition. Car si b, c, d sont les cartes placées successivement au-dessous de cette carte a, comme chacune d'elles est pour ainsi dire enchaînée à celle qui la précède, d ne revient que quand c est revenu, c a dû être précédé de b, et b de a ; donc la périodicité commence à la première carte.

On voit, par ces explications, qu'une même carte peut se reproduire au même rang dans toutes les dispositions : c'est la seconde propriété du mélange. Soit la carte dont le rang primitif est $n-k$; comme la carte qui est au-dessous dans la seconde disposition est marquée par $2\,(k+1)$, il faut qu'on ait

$$n-k=2\,(k+1),$$

d'où l'on tire $k=\frac{n-2}{3}$, égalité qui exige que $n-2$ soit multiple de 3.

Soit, par exemple, $n-2=12$, d'où $n=14$; il en résulte $k=4$ et $n-k=10$, c'est-à-dire qu'en employant 28 cartes la 10e restera constamment au 10e rang. Si donc on sait que la carte tirée a été mise au 10e rang, elle s'y trouvera constamment, et l'on pourra la faire sortir ensuite à tel autre rang qu'on voudra, en faisant passer sous le jeu ou dessus un certain nombre de cartes prises dessus ou dessous.

Si l'on employait 22 cartes, on trouverait que la 8e carte reste constamment au 8e rang.

Il n'y a jamais qu'une seule carte jouissant de cette propriété, car on n'en trouve pas pour $n+k$, à moins qu'on n'emploie un nombre impair de cartes.

La troisième propriété du mélange consiste en ce que deux ou plusieurs cartes peuvent se succéder au même rang dans les diverses dispositions.

Soient, par exemple, les cartes dont les rangs sont $n-k$ et $n+l$ dans la première disposition.

On sait que sous $n-k$ de la première disposition se trouve $2(k+1)$ dans la seconde, et que sous $n+l$ de la première se trouve $2l-1$ dans la seconde; donc, pour que les cartes $n-k$ et $n+l$ se succèdent, il faut qu'on ait

$$2(k+1)=n+l \text{ et } 2l-1=n-k;$$

on tire de ces équations

$$k=\frac{3(n-1)}{5} \text{ et } l=\frac{n+4}{5}.$$

On voit qu'il suffit que $n-1$ soit multiple de 5. Si, par exemple, $n-1=10$, on aura $n=11$, $k=6$, $l=3$, $n-k=5$, $n+l=14$, c'est-à-dire qu'en employant 22 cartes la 5e et la 14e se succéderont alternativement au 5e rang, et en ordre inverse au 14e rang.

Avec 32 cartes on trouve que la 7e et la 20e se succèdent alternativement.

Si donc la carte tirée a été mise à l'un de ces rangs, on saura où elle se trouve après un nombre quelconque de mélanges, et par conséquent on pourra, comme on l'a déjà expliqué, lui faire occuper le rang qui aura été assigné.

On pourrait poursuivre cette recherche par un plus grand nombre de cartes : on trouverait par exemple qu'en employant 22 cartes, il y a succession des trois cartes 3, 18 et 13, ainsi que des quatre cartes 2, 20, 17, 11 ; mais ce que nous en avons dit nous semble bien suffisant pour un amusement (*a*).

La quatrième propriété du mélange consiste en ce que, après un certain nombre de mélanges égal au plus au nombre de cartes employées, les cartes se retrouvent dans l'ordre primitif.

Supposons qu'on ait écrit l'ordre primitif et les mélanges successifs les uns sous les autres comme nous l'avons fait précédemment pour 12 cartes. Dans la première colonne verticale de gauche, on trouvera les cartes :

$$\begin{aligned}&1,\\&2n,\\&2n-1,\\&2n-3,\\&2n-7,\text{ etc.},\end{aligned}$$

qui sont chacune, à partir de la seconde, la dernière carte du mélange précédent. Comme après la carte 1, nous ne disposons que de $2n-1$ cartes; si nous faisons $2n$ mélanges, il faudra que l'une au moins des cartes se trouve deux fois dans cette première colonne; il y aura donc périodicité; mais nous savons que la périodicité commence toujours à la première carte de chaque colonne; donc la carte 1 sera revenue dans la première colonne. Si ce retour s'est fait avec le $(2n)^e$ mélange, il en sera de même dans chaque colonne, car toutes les cartes se trouvant dans la première verticale

(*a*) Voir, pour plus de détails, un mémoire de Monge, dans le Recueil des Mémoires de l'Académie des sciences (*Savants étrangers*, t. VII, année 1773).

avec un retour périodique de $2n$ en $2n$, chacune d'elles ramène dans les autres colonnes les mêmes cartes que dans la première, en vertu de la dépendance reconnue précédemment. Donc l'ordre primitif sera rétabli après $2n$ mélanges; c'est ce qui arrive, par exemple, avec 14 cartes.

S'il y a des périodes particulières dans les autres colonnes, les cartes qui forment ces périodes ne se trouvant pas dans la première verticale, celle-ci contient un nombre de cartes moindre que $2n$; mais il sera tel que chacune des autres périodes s'accomplira une ou plusieurs fois exactement pendant la période de la première verticale; ainsi avec 22 cartes il y a quatre périodes contenant respectivement 1, 2, 3 et 4 cartes, en sorte qu'il reste 12 cartes pour la première verticale; par conséquent, quand la carte 1 y sera revenue, ces quatre périodes recommenceront, et les cartes seront revenues dans l'ordre primitif.

Il suffit donc de calculer le retour de la carte 1 dans la première verticale pour savoir après combien de mélanges l'ordre primitit est rétabli, ce qui peut se faire au moyen des formules :

$$2(k+1) \text{ qui succède à } n-k,$$

et

$$2k-1 \text{ qui succède à } n+k.$$

Soit, par exemple, à trouver combien il faudra de mélanges pour amener 32 cartes dans l'ordre primitif.

On a :

$$\begin{array}{ll}
32 = 16 + 16; & 2.16 - 1 = 31; \\
31 = 16 + 15; & 2.15 - 1 = 29; \\
29 = 16 + 13; & 2.13 - 1 = 25; \\
25 = 16 + 9; & 2.9 - 1 = 17; \\
17 = 16 + 1; & 2.1 - 1 = 1;
\end{array}$$

donc il faudra 6 mélanges.

Prenons encore 28 cartes :

On a

$$
\begin{aligned}
28 &= 14 + 14; & 2.14 - 1 &= 27;\\
27 &= 14 + 13; & 2.13 - 1 &= 25;\\
25 &= 14 + 11; & 2.11 - 1 &= 21;\\
21 &= 14 + 7; & 2.\ 7 - 1 &= 13;\\
13 &= 14 - 1; & 2\ (1 + 1) &= 4;\\
4 &= 14 - 10; & 2(10 + 1) &= 22;\\
22 &= 14 + 8; & 2.\ 8 - 1 &= 15;\\
15 &= 14 + 1; & 2.\ 1 - 1 &= 1;
\end{aligned}
$$

ainsi il faudra 9 mélanges.

On peut aussi résoudre la question sans calcul, au moyen des deux premières dispositions ; soient 12 cartes.

PREMIÈRE DISPOSITION.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

PREMIER MÉLANGE.

12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Au-dessous de 12 on a 11 ; au-dessous de 11, 9; au dessous de 9 on a 5 ; au-dessous de 5, 4 ; au-dessous de 4 on a 6 ; au-dessous de 6, 2; au-dessous de 2 on a 10; au-dessous de 10, 7 ; au-dessous de 7 on a 1. On a ainsi parcouru 10 nombres depuis 12 jusqu'à 1; donc il faudra 10 mélanges.

D'après cela, ayant fait tirer une carte dans un jeu de 32, par exemple, on la fait remettre dans le jeu, et l'on compte rapidement le rang où elle se trouve, ce qui peut se faire de diverses manières que chacun imaginera facilement, comme de présenter le jeu en éventail avec des cartes un peu saillantes de 8 en 8, de retarder d'une manière quelconque l'introduction de la carte pour se donner le temps de compter, etc. D'ailleurs, si l'on n'a pas réussi dans cette préparation, on donnera le jeu à la personne en la priant de voir à quel rang se trouve la carte qu'elle a tirée, et d'en garder le souvenir.

On annonce alors le rang auquel on fera sortir la carte, et l'on fait les 6 mélanges. Si l'on n'a pas pu savoir le rang de la carte tirée, on le demandera à la personne après avoir fait deux ou trois mélanges; puis, après le sixième, on fera passer le nombre de cartes nécessaire pour que la carte tirée sorte au rang qu'on lui a assigné.

Si l'on trouve qu'il soit trop long de faire 6 mélanges de 32 cartes, on n'en prendra que 16, et 5 mélanges suffiront; on remarquera de plus que la 6e carte restera constamment au 6e rang.

NOTES

NOTE I

SUR LES MULTIPLES COMMUNS

1. *Le plus petit commun multiple de deux nombres* A *et* B *est égal à leur produit divisé par leur plus grand commun diviseur* D, *c'est-à-dire* $\frac{AB}{D}$.

Soient, en effet, A' et B' les quotients de A et B par leur plus grand commun diviseur D. Un multiple mA de A est égal à $mA'D$; pour qu'il soit aussi multiple de B ou $B'D$, il faut qu'il soit divisible successivement par D et par B', c'est-à-dire que mA' soit divisible par B'; et comme A' et B' sont premiers entre eux, il faut que m soit divisible par B'; d'ailleurs cette condition est suffisante; donc n étant le quotient de m par B', les multiples communs aux deux nombres A et B sont tous les nombres compris dans la formule

$$nA'B'D\,;$$

le plus petit est donc $A'B'D$, c'est-à-dire $A'B$ ou AB', ou encore $\frac{AB}{D}$. Les autres sont les multiples de ce plus petit commun multiple.

Si l'on a trois nombres A, B, C, on prendra le plus grand commun diviseur D' de AB' et C, et en désignant par C' le quotient $\frac{C}{D'}$, on aura $AB'C'$ pour le plus petit commun multiple des trois nombres A, B, C.

On opère de la même manière pour trouver de proche en proche le plus petit commun multiple de tant de nombres qu'on voudra.

Quand les nombres sont premiers entre eux deux à deux, leur plus petit commun multiple est leur produit.

2. *Deux nombres* A *et* B *premiers entre eux étant donnés, si l'on divise par* B *les multiples successifs de* A *moindres que leur produit,*

$$A,\ 2A,\ 3A,\ 4A,\ldots\ (B-1)A,$$

tous les restes qu'on obtiendra seront différents.

On voit d'abord qu'aucun d'eux n'est divisible par B, car B étant premier avec A, il ne peut diviser mA qu'à la condition de diviser m, ce qui ne peut avoir lieu dans la série précédente, où m est toujours moindre que B. De plus, deux de ces multiples ne peuvent donner le même reste quand on les divise par B, car alors leur différence serait divisible par B, c'est-à-dire qu'il y aurait dans la série un multiple de A divisible par B, ce qu'on vient de reconnaître impossible.

Il résulte de là qu'en divisant par B ces $B-1$ multiples de A on obtiendra pour restes, dans un ordre quelconque, tous les nombres, depuis 1 jusqu'à $B-1$, ce qu'on énonce encore en disant qu'il y a toujours un multiple de A, moindre que AB, surpassant un multiple de B d'un nombre quelconque R moindre que B, et qu'il n'y en a qu'un. On remarquera d'ailleurs que le multiple de B peut être zéro ; ainsi, par extension, on dit que 3 est un multiple de 7 plus 3, ou que 3 divisé par 7 donne pour reste 3.

3. Le produit BA est le premier multiple de A divisible par B ; les multiples suivants

$$(B+1)A,\ (B+2)A,\ (B+3)A,\ldots\ (2B-1)A$$

donnent les mêmes restes que

$$A,\qquad 2A,\qquad 3A,\ldots\ (B-1)A\,;$$

on voit de même que les restes se reproduiront dans le même ordre entre 2BA et 3BA, puis entre 3BA et 4BA, et ainsi de suite indéfiniment.

4. Si les deux nombres A et B n'étaient pas premiers entre eux, on ne pourrait satisfaire à l'égalité $\dot{A} = \dot{B} + R$ qu'à la condition que R fût divisible par le plus grand commun diviseur de A et B, car quand un nombre en divise deux autres, il divise leurs multiples, et par suite la différence de leurs multiples. On voit qu'alors si l'on divise par B les différents multiples de A inférieurs à leur plus petit commun multiple $B'A$,

$$A,\ 2A,\ 3A, \ldots.\ (B'-1)A,$$

on aura pour restes, dans un ordre quelconque, les différents multiples de leur plus grand commun diviseur D jusqu'à $(B'-1)D$, et que ces restes se reproduiront dans le même ordre avec les multiples de A supérieurs à $B'A$.

5. *Si l'on divise par plusieurs nombres chacun des nombres moindres que leur plus petit commun multiple, les systèmes de restes qu'on obtiendra seront tous différents les uns des autres.*

Soit M le plus petit commun multiple de plusieurs nombres A, B, C, et prenons deux nombres G et H moindres que M : si l'on divise les nombres G et H par A, par B, par C, les restes fournis par le dividende G ne seront pas tous égaux aux restes correspondants fournis par le dividende H.

Car si l'on avait

$$G = \dot{A} + a, \qquad H = \dot{A} + a,$$
$$G = \dot{B} + b, \qquad H = \dot{B} + b,$$
$$G = \dot{C} + c, \qquad H = \dot{C} + c,$$

il en résulterait

$$G - H = \dot{A}, \quad G - H = \dot{B}, \quad G - H = \dot{C},$$

c'est-à-dire que $G - H$, nombre moindre que M, serait un commun multiple de A, B et C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

6. Si les nombres A, B, C sont premiers entre eux deux à deux, en prenant pour dividendes les nombres depuis 1 jusqu'à ABC, qui est leur plus petit commun multiple, on obtiendra tous les systèmes de

restes qu'on peut imaginer : car ceux-ci sont précisément au nombre de ABC, les A restes que peut fournir A pouvant se combiner avec chacun des B restes que peut fournir B, ce qui fait AB systèmes de deux restes, lesquels se combinant avec chacun des C restes que peut fournir C forment ABC systèmes de trois restes.

7. Puisque M divisé par chacun des nombres A, B, C ne donne pas de reste, les nombres G et KM + G divisés par les nombres A, B, C donneront les mêmes restes ; donc les systèmes de restes qu'on a obtenus avec les dividendes moindres que M se reproduiront dans le même ordre avec les dividendes compris entre M et 2M, puis avec les dividendes compris entre 2M et 3M, et en général avec les dividendes compris entre KM et (K + 1) M.

NOTE II

Deux nombres A *et* B *étant donnés, trouver le plus petit multiple de l'un surpassant d'un nombre donné* R *un multiple de l'autre.*

AVANT d'exposer la solution du problème, nous ferons deux remarques importantes :

La première, c'est que si l'on a résolu la question pour

$$mA = nB + R,$$

on la résoudra pour

$$m'B = n'A + R$$

en retranchant nB et mA du plus petit commun multiple de A et B ; car ce plus petit commun multiple étant $B'A$ ou $A'B$, et mA étant, par hypothèse, moindre que $B'A$, la première égalité donne

$$B'A - mA = A'B - nB - R$$

ou

$$(A' - n)B = (B' - m)A + R,$$

égalité qui résout la question, puisque $(A' - n)B$ est moindre que $A'B$.

La seconde remarque, c'est qu'ayant trouvé, par un procédé quelconque,

$$mA = nB + R,$$

les nombres A et B ayant pour plus petit commun multiple $A'B = B'A$, on verra immédiatement si l'on a obtenu la solution la plus simple, c'est-à-dire celle où mA est moindre que $B'A$, ce qui revient à voir si m est moindre que B', ou n moindre que A'. S'il n'en est pas ainsi, on supprimera de part et d'autre le plus grand multiple de B'A qui se trouve contenu dans les deux nombres mA et nB, ce qui se fera en divisant m par B' et remplaçant m par le reste p de la division ; on aura ainsi la plus simple solution

$$pA = \dot{B} + R.$$

On peut de même opérer sur n en le divisant par A' et en mettant le reste q à la place de n, ce qui donne

$$\dot{A} = qB + R.$$

Revenons maintenant à la question principale. Faisons le calcul par lequel on cherche le plus grand commun diviseur des deux nombres A et B, et supposons que le reste R se trouve parmi ceux que donne l'opération.

La première division donnera $A = qB + C$, d'où l'on conclut

$$mA = mqB + mC.$$

Si donc on a $mA = \dot{B} \pm R$, on aura aussi $mC = \dot{B} \pm R$, et réciproquement ; et si mC est le premier multiple de C égal à $\dot{B} \pm R$, il en sera de même de mA.

Or, si l'on considère trois restes successifs X, Y, Z, et qu'on ait déjà trouvé

$$mZ = sY \pm R,$$

en y ajoutant la relation

$$qY + Z = X$$

qui existe entre les trois restes, on obtient, comme on le voit facilement :

$$(mq + s)\,Y = mX \mp R \qquad (1).$$

On sait donc passer de

$$\dot{Z} = \dot{Y} \pm R$$

à

$$\dot{Y} = \dot{X} \mp R\,;$$

donc, en remontant de proche en proche, on trouvera

$$\dot{A} = \dot{B} \pm R\,;$$

et comme la dernière division donnera

$$mZ = Y - R,$$

c'est-à-dire le plus petit multiple de Z égal à $\dot{Y} - R$, on aura ensuite par la formule (1) le plus petit multiple de Y égal à $\dot{X} + R$ et ainsi de suite jusqu'à

$$\dot{A} = \dot{B} \pm R.$$

Pour en faire l'application, prenons $A = 6259$, $B = 2773$ et $R = 1$.

A	B	C	D	E	F
	2	3	1	8	39
6259	2773	713	634	79	2
713	634	79	2	19	
				1	

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons les derniers diviseurs par C, D, E, F.

Les deux dernières divisions donnent

$$39F = 1E - 1$$

et

$$8E + F = D;$$

donc

$$(39.8 + 1)E = 39D + 1$$

ou

$$313E = 39D + 1;$$

on a ensuite

$$1D + E = C,$$

et par suite

$$(313.1 + 39)D = 313C - 1$$

ou

$$352D = 313C - 1;$$

puis

$$3C + D = B,$$

d'où

$$(352.3 + 313)C = 352B + 1$$

ou

$$1369C = 352B + 1;$$

enfin

$$2B + C = A;$$

d'où

$$(1369.2 + 352)B = 1369A - 1$$

ou

$$3090B = 1369A - 1,$$

c'est-à-dire

$$1369A = 3090B + 1.$$

Ainsi c'est le 1369ième multiple de 6259 qui jouit de la propriété de surpasser de 1 un multiple de 2773.

Si l'on veut maintenant le premier multiple de B qui surpasse de 1 un multiple de A, on l'obtiendra par la première remarque faite au commencement de cette note; elle donne

$$(6259 - 3090)B = (2773 - 1369)A + 1$$

ou

$$3169B = 1404A + 1.$$

Prenons encore $A = 1007$, $B = 211$ et $R = 10$.

A	B	C	D	E
	4	1	3	2
1007	211	163	48	19
163	48	19	10	

Les deux dernières divisions donnent

$$2E = 1D - 10,$$

$$3D + E = C;$$

donc

$$(2.3 + 1)D = 2C + 10$$

ou

$$7D = 2C + 10;$$

on a ensuite

$$1C + D = B;$$

donc

$$(7.1 + 2)C = 7B - 10$$

ou

$$9C = 7B - 10;$$

on a enfin

$$4B + C = A,$$

et par suite

$$(9.4 + 7)B = 9A + 10$$

ou

$$43B = 9A + 10;$$

on en conclut

$$(211 - 9)A = (1007 - 43)B + 10$$

ou

$$202A = 964B + 10.$$

Les calculs que nous venons de faire sur les quotients donnés par la série des divisions qui amènent le reste R peuvent être reproduits en suivant une règle fort simple qui dispense de repasser par les diverses égalités qui en forment la démonstration : *on écrit les quotients sur une* *première ligne, comme on le voit ci-dessous; puis on en forme une seconde commençant par* 1 *qu'on écrit sur cette ligne à droite du dernier quotient, et dont chaque nombre de droite à gauche s'obtient en multipliant le nombre correspondant de la première ligne par celui qui est à sa droite dans la seconde et ajoutant au produit le nombre qui est à la droite du multiplicateur.*

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 1, & 8, & 39, & \\ 3090, & 1369, & 352, & 313, & 39, & 1. \end{array}$$

Ainsi on multiplie d'abord 39 par 1, et il n'y a rien à ajouter, ce qui donne 39; puis on multiplie 8 par 39 et on ajoute 1, ce qui fait 313; ensuite on multiplie 1 par 313 et on ajoute 39, ce qui fait 352; puis on multiplie 3 par 352 et on ajoute 313, ce qui donne 1369; enfin on multiplie 2 par 1369 et on ajoute 352, ce qui donne 3090. *Le premier nombre* 3090 *est le multiplicateur de* B, *et le second nombre* 1369 *est le multiplicateur de* A *dans l'égalité*

$$\dot{A} = \dot{B} + 1 \quad \text{ou dans} \quad \dot{A} = \dot{B} - 1.$$

La première égalité a lieu quand il y a un nombre impair de divisions, comme dans le premier exemple, et la seconde quand il y a un nombre pair de divisions, comme dans le second exemple.

Voici d'autres exemples :

1° Trouver le premier multiple de 4954 qui surpasse de 1 un multiple de 7.

	707	1	2
4954	7	5	2
54	2	1	
5			

$$\begin{array}{llll} \text{Quotients} \quad 707, & 1, & 2 & \\ 2123, & 3, & 2, & 1; \end{array}$$

donc $3.4954 = 2123.7 + 1.$

2° Trouver le premier multiple de 3741 qui surpasse de 6 un multiple de 1530.

	2	2	4	18
3741	1530	681	168	9
681	168	9	78	
			6	

Quotients 2, 2, 4, 18,

401, 164, 73, 18, 1.

Comme il y a un nombre pair de divisions,

$$164.3741 = 401.1530 - 6;$$

donc, le plus petit commun multiple de 3741 et 1530 étant 1247.1530 ou 510.3741, on aura

$$(510 - 164)3741 = (1247 - 401)\ 1530 + 6$$

ou

$$346.3741 = 846.1530 + 6.$$

3° Trouver le premier multiple de 3907853 qui surpasse de 1 un multiple de 331087.

On trouvera

$$61224.3907853 = 722633.331087 + 1.$$

Le cas où R ne se trouve point parmi les restes se ramène facilement au précédent; car d'abord si l'on trouve un reste r qui soit diviseur de R, on pourra calculer $mA = nB + r$,

et en multipliant par le quotient q de R par r, on aura

$$mqA = nqB + R,$$

égalité que l'on simplifiera si mqA n'est pas moindre que le plus petit commun multiple de A et B.

Ex. On demande le premier multiple de 609 qui surpasse de 24 un multiple de 402.

	1	1	1
609	402	207	195
207	195	12	

1, 1, 1

3, 2, 1, 1.

On a $2.609 = 3.402 + 12$;
donc $4.609 = 6.402 + 24$.

Quand les nombres sont premiers entre eux, il peut se faire qu'il faille poursuivre l'opération jusqu'au reste 1.

Ex. On demande le premier multiple de 673 qui surpasse de 23 un multiple de 43.

	15	1	1	1	6
673	43	28	15	13	2
243	15	13	2	1	
28					

15, 1, 1, 1, 6,
313, 20, 13, 7, 6, 1.

Ainsi $20.673 = 313.43 + 1$;
donc $23.20.673 = 23.313.43 + 23$
ou $460.673 = 7199.43 + 23$;
mais $460 = \overline{\dot{43}} + 30$,
et $7199 = \overline{\dot{673}} + 469$;
donc on peut réduire la dernière égalité à

$$30.673 = 469.43 + 23.$$

Remarque. On sait que M étant le plus petit commun multiple de plusieurs nombres A, B, C, on a $\overline{A, \dot{B}, C} = \dot{M}$; on saura donc satisfaire aux égalités de la forme

$$\dot{N} = \overline{A, \dot{B}, C} + R,$$
$$\overline{A, \dot{B}, C} = \dot{N} + R,$$
$$\overline{A, \dot{B}, C} = \overline{N, \dot{P}, Q} + R.$$

NOTE III

Trouver un nombre qui, divisé par des nombres donnés, laisse des restes assignés.

Supposons d'abord qu'il n'y ait que deux diviseurs a et b et que les restes doivent être p et q. Le nombre cherché est également représenté par $\dot{a}+p$ et par $\dot{b}+q$; on doit donc avoir $\dot{b}+q=\dot{a}+p$; et par suite

$$\dot{b}=\dot{a}+(p-q) \quad \text{ou} \quad \dot{b}=\dot{a}-(q-p),$$

suivant que p sera plus grand ou plus petit que q. Ainsi la question est ramenée à trouver un multiple de b égal à un multiple de a augmenté de $p-q$ ou diminué de $q-p$, problème résolu dans la Note II.

Soit, par exemple, à trouver un nombre qui, divisé par 117, donne pour reste 29, et qui, divisé par 83, donne pour reste 33

On doit avoir $\dot{\overline{83}}+33=\dot{\overline{117}}+29$ ou $\dot{\overline{83}}=\dot{\overline{117}}-4$.

Voici les calculs :

	1	2	2
117	83	34	15
34	15	4	

Comme l'opération amène le reste 4, il suffira d'employer les diviseurs 1, 2, 2 (Note II) :

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 2 & \\ & 5, & 2, & 1. \end{array}$$

Ainsi $\quad 5.117 = \dot{\overline{83}} + 4$ ou $\dot{\overline{83}} = 5.117 - 4$;

le nombre cherché est donc $5.117 + 29$ ou 614.

Considérons maintenant trois diviseurs a, b, c, les restes étant p, q, r. Nous chercherons d'abord le nombre qui satisfait à l'égalité

$$\dot{b} + q = \dot{a} + p,$$

comme dans le cas de deux diviseurs. Soit $ma + p$ ce nombre ; si étant divisé par c il ne donne pas le reste r, il faut le modifier de manière qu'il satisfasse à cette condition sans cesser de donner pour restes p et q quand on le divise par a et par b, c'est-à-dire qu'il faut l'augmenter d'un multiple commun de a et b : on prendra donc le plus petit commun multiple M de a et b, puis on fera les calculs nécessaires pour satisfaire à l'égalité

$$\dot{c} + r = \dot{\mathrm{M}} + ma + p$$

ou

$$\dot{c} = \dot{\mathrm{M}} + ma + p - r.$$

Soit, par exemple, à trouver le plus petit nombre qui, divisé par 67, 15 et 7, donne les restes 10, 13 et 5. Prenons d'abord l'égalité

$$\dot{\overline{15}} + 13 = \dot{\overline{67}} + 10 \qquad (1)$$

ou

$$\dot{\overline{15}} = \dot{\overline{67}} - 3$$

$$\begin{array}{r|c|c}
 & 4 & 2 \\
\hline
67 & 15 & 7 \\
7 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
4, & 2 & \\
 & 2, & 1
\end{array}$$

on a $\quad 2.67 = \dot{\overline{15}} - 1$;

donc $\quad 13.67 = \dot{\overline{15}} + 1$,

et $\quad 39.67 = \dot{\overline{15}} + 3$;

le plus petit commun multiple de 67 et 15 est 67×15 ou 1005, et l'on a $39 = \dot{\overline{15}} + 9$; donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$9.67 = \dot{\overline{15}} + 3;$$

et l'on en conclut que le premier nombre résultant de l'égalité (1) est $9.67+10$ ou 613; les autres sont compris dans la formule $\overline{\dot{1005}}+613$.

Nous aurons donc, en prenant le troisième diviseur,

$$\dot{7}+5=\overline{\dot{1005}}+613 \qquad (2)$$

ou

$$\dot{7}=\overline{\dot{1005}}+608.$$

$$\begin{array}{r|l} & \underline{143} \\ 1005 & 7 \\ 30 & \\ 25 & \\ 4 & \end{array}$$

La première division donnant le reste 4 qui divise 608, il est inutile d'aller plus loin

$$1005=\dot{7}+4;$$

donc

$$\dot{7}=6.1005+4$$

et

$$\dot{7}=152.6.1005+608;$$

le plus petit commun multiple de 1005 et 7 est 1005×7, et l'on a 152×6 ou $912=\dot{7}+2$; donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\dot{7}=2.1005+608,$$

et l'on en conclut que le nombre cherché est

$$2.1005+613 \text{ ou } 2623.$$

La même méthode s'appliquera évidemment, quel que soit le nombre des diviseurs.

Soit, par exemple, à trouver le plus petit nombre qui, divisé par 47, 102, 140 et 183, donne les restes 30, 63, 99 et 9.

Prenons d'abord les deux diviseurs 47 et 102 dont le plus petit commun multiple est 47×102 ou 4794. On doit avoir

$$\overline{\dot{47}}+30=\overline{\dot{102}}+63 \qquad (1)$$

ou

$$\overline{\dot{47}}=\overline{\dot{102}}+33.$$

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 2 & 5 & 1 \\ \cline{2-4} 102 & 47 & 8 & 7 \\ 8 & 7 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2, & 5, & 1 & \\ & 6, & 1, & 1 \end{array}$$

Ainsi $$6.102 = \overset{\cdot}{\overline{47}} + 1\,;$$

donc $$\overset{\cdot}{\overline{47}} = 41.102 + 1,$$

et $$\overset{\cdot}{\overline{47}} = 33.41.102 + 33\,;$$

mais on a $$33.41 \quad \text{ou} \quad 1353 = \overset{\cdot}{\overline{47}} + 37\,;$$

donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\overset{\cdot}{\overline{47}} = 37.102 + 33\,;$$

on en conclut que le premier nombre qui résulte de l'égalité (1) est $37.102 + 63$ ou 3837; les autres sont compris dans la formule

$$\overset{\cdot}{\overline{4794}} + 3837.$$

En prenant le troisième diviseur 140, on devra avoir

$$\overset{\cdot}{\overline{140}} + 99 = \overset{\cdot}{\overline{4794}} + 3837 \qquad (2)$$

ou $$\overset{\cdot}{\overline{140}} = \overset{\cdot}{\overline{4794}} + 3738$$

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 34 & 4 & 8 \\ \cline{2-4} 4794 & 140 & 34 & 4 \\ 594 & 4 & 2 & \\ 34 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 34, & 4, & 8 & \\ & 33, & 8, & 1 \end{array}$$

Ainsi $$33.4794 = \overset{\cdot}{\overline{140}} + 2\,;$$

donc $$\overset{\cdot}{\overline{140}} = 107.4794 + 2$$

et $$\overset{\cdot}{\overline{140}} = 1869.107.4794 + 3738\,;$$

le plus petit commun multiple de 140 et 4794 est 70×4794 ou 335580, et l'on a

$$1869.107 \quad \text{ou} \quad 199983 = \overset{\cdot}{\overline{70}} + 63\,;$$

donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\overset{\cdot}{\overline{140}} = 63.4794 + 3738,$$

et l'on en conclut que le premier nombre résultant de l'égalité (2) est

$$63.4794 + 3837 \quad \text{ou} \quad 305859;$$

les autres sont compris dans la formule

$$\dot{\overline{335580}} + 305859.$$

On aura donc, en prenant le quatrième diviseur 183,

$$\dot{\overline{183}} + 9 = \dot{\overline{335580}} + 305859 \qquad (3)$$

ou

$$\dot{\overline{183}} = \dot{\overline{335580}} + 305850$$

	1833	1	3				
335580	183	141	42	1833,	1,	3,	
1525	42	15			4,	3,	1,
618							
690							
141							

Ainsi $$4.335580 = \dot{\overline{183}} + 15;$$

donc $$\dot{\overline{183}} = 179.335580 + 15$$

et $$\dot{\overline{183}} = 20390.179.335580 + 305850.$$

Le plus petit commun multiple de 183 et 335580 est 61.335580; et l'on a

$$20390.179 \quad \text{ou} \quad 3649810 = \dot{\overline{61}} + 58;$$

donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\dot{\overline{183}} = 58.335580 + 305850;$$

d'où l'on conclut que le nombre cherché est

$$58.335580 + 305859 \quad \text{ou} \quad 19769499.$$

NOTE IV

1\. *Si au-dessous des nombres* 1, 2, 3, *on écrit des nombres inégaux* a, b, c *de toutes les manières possibles*

1, 2, 3 ;	1, 2, 3 ;	1, 2, 3 ;
a, b, c ;	a, c, b ;	b, a, c ;
1, 2, 3 ;	1, 2, 3 ;	1, 2, 3 ;
c, a, b ;	b, c, a ;	c, b, a ;

puis qu'à chaque fois on fasse la somme des produits qu'on obtient en multipliant les nombres a, b, c *respectivement par les nombres placés au-dessus d'eux, les six sommes obtenues de cette manière*

$$\begin{aligned} &a + 2b + 3c,\\ &a + 2c + 3b,\\ &b + 2a + 3c,\\ &c + 2a + 3b,\\ &b + 2c + 3a,\\ &c + 2b + 3a, \end{aligned}$$

seront toutes différentes si le nombre moyen b *n'est pas égal à la demi-somme des deux autres.*

D'abord, si $b = \frac{a+c}{2}$, on constate que les deux sommes $a + 2c + 3b$ et $b + 2a + 3c$ sont égales, et qu'il en est de même des deux sommes

$$c + 2a + 3b \quad \text{et} \quad b + 2c + 3a.$$

On constate ensuite que si a est le plus petit nombre et c le plus grand, les six sommes écrites précédemment sont décroissantes si l'on a $b > \frac{a+c}{2}$; mais que si l'on a $b < \frac{a+c}{2}$, les sommes se rangent dans l'ordre décroissant de cette autre manière :

$$\begin{gathered} a + 2b + 3c, \\ b + 2a + 3c, \\ a + 2c + 3b, \\ b + 2c + 3a, \\ c + 2a + 3b, \\ c + 2b + 3a. \end{gathered}$$

Remarque. En général, si l'on veut trouver quels nombres m, n, p.... il faut placer sous des nombres a, b, c,... pour obtenir des sommes différentes :

$$\begin{gathered} am + bn + cp + \ldots \\ an + bm + cp + \ldots \\ am + bp + cn + \ldots, \text{ etc.} \end{gathered}$$

lorsqu'on permute les nombres m, n, p, ... de toutes les manières possibles sous les nombres a, b, c, ..., il faut former ces diverses sommes, puis les égaler deux à deux, ce qui fournit un certain nombre de relations entre m, n, p, ..., et choisir ensuite ces nombres de manière qu'ils ne satisfassent pas aux relations obtenues. Il y aura toujours un ou plusieurs des nombres m, n, p, ... qui pourront recevoir des valeurs arbitraires.

Par exemple, si les nombres a, b, c,.. sont 1, 2, 3, 4, et qu'on prenne 1, 2, p, q pour les nombres de la seconde série, on trouvera qu'il faut qu'on ait $p > 4$; et si l'on prend $p = 5$, les autres relations aboutiront à $q > 14$: on pourra donc prendre 1, 2, 5, 15 pour les nombres de la seconde série.

Tous ces calculs sont assez laborieux (*a*); mais il y a une solution générale qui dispense d'y avoir recours : elle est donnée par le théorème suivant :

(*a*) V. *Correspondance de l'École polytechnique*, t. III.

2. *Étant donnés les nombres*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ l,$$

dont le plus grand est l, *si l'on place sous ces nombres des puissances différentes d'un nombre* N *égal ou supérieur à* l,

$$N^p,\ldots N^q,\ldots N^r,\ldots N^s,\ldots$$

puis qu'on multiplie chacune d'elles par le nombre sous lequel elle est placée, et qu'on fasse la somme des produits, telle que

$$bN^p + dN^q + gN^r + iN^s + \ldots,$$

cette somme prendra des valeurs différentes pour toutes les dispositions que l'on pourra donner aux puissances de N *sous les nombres* $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ l$.

Soit une somme provenant d'une disposition différente de la précédente,

$$b'N^p + d'N^q + g'N^r + i'N^s + \ldots,$$

et pour fixer les idées, supposons que les exposants soient disposés dans l'ordre décroissant.

Si nous prenons la différence des deux sommes, nous aurons une expression de la forme

$$b''N^p \pm d''N^q \pm g''N^r \pm i''N^s \ldots;$$

si tous les termes qui suivent le premier sont précédés du signe —, elle est égale à

$$b''N^p - d''N^q - g''N^r - i''N^s - \ldots,$$

et dans le cas contraire elle est supérieure à cette dernière quantité. Or, je dis que cette quantité est positive.

En effet, l'ensemble des deux premiers termes revient à

$$(b''N^{p-q} - d'')\,N^q,$$

quantité positive, parce que d'', différence de deux coefficients d et d' dont le plus grand est au plus égal à l, est moindre que l et par suite moindre que N ; l'ensemble de ces deux premiers termes se réduit donc à une quantité positive $\delta\, N^q$. En y ajoutant le terme suivant $- g''\,N^r$, on prouvera de même que l'on a une quantité positive γN^r; et ainsi de suite pour tous les autres. La différence de deux sommes quelconques ne pouvant pas être nulle, on en conclut que toutes les sommes obtenues sont différentes les unes des autres.

Remarque. S'il y a m nombres 1, 2, 3,... et n puissances de N, on pourra placer celles-ci sous les premiers nombres, d'autant de manières qu'il y a d'arrangements de m objets pris de n à n; et s'il y a aussi m puis sances de N, le nombre des dispositions sera égal au nombre des permutations de m objets.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

Paris. — Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.