RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES

PAR

M. ÉDOUARD LUCAS.

> Les mathématiciens sont comme les amants... ; accordez à un mathématicien le moindre principe, il va vous en tirer une conséquence qu'il faudra que vous lui accordiez aussi, et de cette conséquence une autre ; et, malgré vous-même, il vous porte à perte de vue, à peine le pouvez-vous croire. Ces deux sortes de gens, les mathématiciens et les amants, prennent toujours plus qu'on ne leur donne.
>
> FONTENELLE.

IV

Le Calendrier perpétuel. — L'Arithmétique en boules.
L'Arithmétique en bâtons. — Les Mérelles
au XIII^{e} siècle. — Les Carrés magiques de Fermat.
Les Réseaux et les Dominos. — Les Régions
et les quatre Couleurs. — La Machine à marcher.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1894

Presented

to the

Department of Mathematics

University of Toronto

by

Professor Alfred Baker

June, 1940

AVERTISSEMENT

Nous donnons aujourd'hui le quatrième et dernier Volume des *Récréations mathématiques* d'Édouard Lucas.

Les dédicaces placées en tête de cinq des Récréations contenues dans ce Volume figurent sur le manuscrit, tout entier de la main de Lucas. Les trois autres Récréations ne portent pas de dédicaces; nous n'avons pas cru devoir y suppléer, pour les motifs indiqués dans l'Avertissement du Tome III.

Il existait, dans les papiers de Lucas, trois cahiers intitulés : *Arithmétique amusante*, et divisés en quatre Chapitres :

Chapitre I. — *Calculs élémentaires.*

Chapitre II. — *Le calcul rapide.*

Chapitre III. — *Les progressions arithmétiques.*

Chapitre IV. — *Les progressions géométriques.*

Ce manuscrit représente en quelque sorte une Introduction aux *Récréations mathématiques,* auxquelles il sert de préparation.

L'accueil fait à ces dernières par le public scientifique nous permettra de livrer à l'impression ce dernier travail de Lucas, qui a été commencé en 1888 et terminé peu de temps avant sa mort.

Nous espérons que la publication de l'*Arithmétique amusante* pourra avoir lieu dans un assez court délai.

H. DELANNOY, C.-A. LAISANT, E. LEMOINE,

Membres de la Société Mathématique de France.

Paris, Juillet 1894.

PREMIÈRE RÉCRÉATION.

LE CALENDRIER PERPÉTUEL

ET

LE CALCUL AUTOMATIQUE DES RÉSIDUS.

A Son Excellence le Prince Balthazar Boncompagni.

« J'aime! voilà le mot que la nature entière
Crie au vent qui l'emporte, à l'oiseau qui le suit
Sombre et dernier soupir que poussera la Terre,
Quand elle tombera dans l'éternelle nuit.
Oh! vous le murmurez dans vos sphères sacrées,
Étoiles du matin, ce mot triste et charmant!
La plus faible de vous, quand Dieu vous a créées,
A voulu traverser les plaines éthérées
Pour chercher le Soleil, son immortel amant.
Elle s'est élancée au sein des nuits profondes.
Mais une autre l'aimait elle-même; — et les mondes
Se sont mis en voyage autour du firmament. »

(MUSSET. — *Poésies nouvelles.*)

PREMIÈRE RÉCRÉATION.

—

LE CALENDRIER PERPÉTUEL ET LE CALCUL AUTOMATIQUE DES RÉSIDUS.

LE CALENDRIER JULIEN ET GRÉGORIEN.

Nous n'avons l'idée de la succession des instants que par le mouvement. Les divisions du temps ne peuvent être marquées que par des espaces parcourus. Mais, pour que la mesure soit exacte, il faut que le mouvement soit constant et uniforme. Il n'en est point de tel sur la terre. L'âme qui souffre et l'âme qui jouit ne comptent pas de même; et le temps, qui se traîne en vieillard dans les jours de la douleur, a la course rapide du jeune homme pendant les courts instants d'une jouissance agréable et vive. Le seul mouvement constant et uniforme est celui des corps célestes. Ces corps marchent d'un pas égal et tranquille dans l'espace de l'univers avec une constance qui a été refusée à l'homme, avec une durée, peut-être sans limites, qui n'est pas dans sa nature. Il emprunta de l'Astronomie la mesure du temps. L'intervalle d'un lever du soleil à l'autre est une mesure qui fut appelée *jour*. Mais la société a besoin de mesurer de plus longs espaces; on fit donc usage des mouvements du soleil et de la lune. En effet, le retour des mêmes phases de la lune ou des mêmes saisons donnait des intervalles sensiblement égaux. Les peuples s'y réunirent; les uns comptèrent par lunes ou par *mois;* les autres, par les révolutions du soleil ou par *années;* d'autres comptèrent par mois et années. (BAILLY, *Histoire de l'Astronomie.*)

La combinaison de ces mouvements et de leurs révolutions nous a donné la mesure du temps, par le Calendrier, qui devait servir beaucoup plus tard à formuler les lois du mouvement des corps célestes par l'attraction universelle!

DE ROMULUS A JULES CÉSAR.

Depuis Numa jusqu'à Jules César, le *Calendrier romain,* d'où le nôtre dérive, n'avait aucune règle précise. La correspondance de l'année lunaire de 12 lunaisons formant 355 jours, avec l'année solaire qui règle les saisons, avait lieu au moyen d'intercalations fixées arbitrairement. La dernière année de ce Calendrier, que l'on a appelée l'*année de confusion* (46 avant J.-C.), fut de 455 jours.

LA RÉFORME JULIENNE.

Le *Calendrier julien* est dû à Jules César, assisté de Sosigène, célèbre astronome et mathématicien d'Alexandrie. L'année julienne est communément de 365 jours; tous les quatre ans, on ajoute un jour intercalaire après le 28 février, à la date du 29. On forme ainsi l'année *bissextile* de 366 jours; les années bissextiles du Calendrier julien sont toutes celles dont l'ensemble des deux derniers chiffres du millésime se compose de deux zéros, ou forme un nombre exactement divisible par quatre. La durée moyenne est donc de 365 $\frac{1}{4}$ jours solaires moyens. Mais cette durée est un peu trop grande, puisque l'année tropique, intervalle de deux équinoxes de printemps, se compose de 365 jours, 2422042; cette différence fait à peu près 7 jours en neuf siècles. Aussi, dès l'année 1414, on commença à s'apercevoir que les équinoxes du printemps et de l'automne devançaient de plus en plus les époques du 21 mars et du 21 septembre, auxquelles ils se rapportaient primitivement. La réforme du Calendrier fut dès lors constamment réclamée. Cette réforme eut lieu enfin sous le pontificat de Grégoire XIII, qui en ordonna l'exécution par une bulle du 24 février 1582. Elle fut adoptée aussitôt dans tous les pays catholiques, et successivement, mais beaucoup plus tard, chez les nations protestantes. La Russie et la Grèce sont maintenant les seules contrées de l'Europe qui ont conservé le vieux style (Calendrier julien); depuis 1800, la différence des deux Calendriers est de 12 jours, elle sera de 13 jours au mois de mars de l'année 1900.

LA RÉFORME GRÉGORIENNE.

Cette réforme consiste dans l'*omission nominale* des dix jours qui suivirent le 4 octobre 1582, le jour suivant ayant été compté pour le 15 au lieu du 5, et dans la *suppression* du jour intercalaire dans trois années séculaires sur quatre. Dans le *Calendrier grégorien,* l'année séculaire, terminée par deux zéros, est bissextile lorsque le millésime est divisible par quatre, après la suppression des deux zéros. Ainsi 1600 et 2000 sont des années bissextiles; 1700, 1800, 1900, 2100 ne le sont pas.

Pour voir l'approximation de la règle grégorienne, cherchons le nombre de jours contenus dans cent siècles grégoriens; de 1 à 10000, il y a 2500 nombres divisibles par quatre; pour les années séculaires, de 1 à 100, il y a 25 nombres divisibles par quatre, et 75 qui ne le sont pas; par suite, dans 100 siècles grégoriens, il y a 2425 années bissextiles et 3652425 jours; la durée moyenne de l'année grégorienne est donc de 365 jours,2425, valeur encore un peu trop forte, donnant moins d'un jour sur 3000 ans.

BUT DU CALENDRIER.

Notre Calendrier perpétuel (*fig.* 1) a pour objet de donner une méthode pour trouver rapidement le nom du jour de la semaine qui correspond à une date donnée du Calendrier julien ou grégorien. L'application en est simple, puisqu'il suffit de savoir additionner quatre nombres ne dépassant pas six, dont le total ne dépasse jamais vingt-quatre. Quant à la formation du Calendrier, on la comprendra facilement. Une date quelconque se compose de quatre données : le *Quantième*, ou numéro du jour dans le mois; le nom du *Mois;* le numéro de l'*Année* dans le siècle, et le numéro du *Siècle* (julien ou grégorien). Vérifions d'abord l'un ou l'autre des deux Calendriers pour une date quelconque, celle du jour présent, par exemple.

Cela posé, on conçoit que la somme des quatre nombres **Q**, **M**, **G** ou **J**, et **A**, augmente d'une, de deux, de trois, ... unités, quand le Quantième augmente, et que l'on peut supprimer tous les multiples de sept. Aussi la colonne **Q** contient le reste de la division du Quantième par sept, et l'on peut se passer du premier tableau des Quantièmes. De même, en passant de Mars à Avril, le nombre **M** augmente de 3; il est devenu 6; cela tient à ce que Mars a 31 jours, c'est-à-dire quatre semaines plus trois jours; en passant d'Avril à Mai, on doit augmenter **M** de 2 unités, puisqu'Avril a 30 jours, ou quatre semaines et deux jours en plus; **M** devient donc 8, ou en supprimant sept jours, **M** devient 1, et ainsi de suite. On observera d'ailleurs que nous avons reporté à la fin du tableau des Mois, les mois de Janvier et de Février, parce que le jour intercalaire de l'année bissextile se trouve après le 28 Février, et ainsi pour trouver un jour de Janvier ou de Février de l'année 1800, par exemple, on doit se reporter à l'année 1799.

L'Année commune se compose de cinquante-deux semaines et d'un jour en plus; l'Année bissextile, de deux jours en plus; aussi les nombres **A**, en passant d'une année à l'autre, augmentent trois fois d'un, et une fois de deux, en supprimant les multiples de sept. Enfin, pour les Siècles juliens, en y reportant l'Année bissextile séculaire, un Siècle se compose d'un nombre exact de

CALENDRIER PERPÉTUEL

QUANTIÈMES.					Q	JOURS.
1	8	15	22	29	1	Dimanche.
2	9	16	23	30	2	Lundi.
3	10	17	24	31	3	Mardi.
4	11	18	25	—	4	Mercredi.
5	12	19	26	—	5	Jeudi.
6	13	20	27	—	6	Vendredi.
7	14	21	28	—	0	Samedi.

SIÈCLES GRÉGORIENS.					G
15	19	23	27	31	1
16	20	24	28	32	0
17	21	25	29	33	5
18	22	26	30	34	3

Au delà du xxxvᵉ siècle, on doit retrancher 20 autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir l'un des nombres de ce tableau.

MOIS.	M
Mars.	3
Avril.	6
Mai.	1
Juin.	4
Juillet.	6
Août.	2
Septembre.	5
Octobre.	0
Novembre.	3
Décembre.	5
Janvier (1)	1
Février (1)	4

(1) Pour les mois de Janvier et de Février, on doit diminuer de un la date de l'année.

On suppose que l'année

RÈGLE POUR LE CALENDRIER JULIEN.

Ajouter les quatre nombres **Q**, **M**, **J**, **A**, qui correspondent à la date donnée; chercher le total dans le tableau des Quantièmes et prendre le jour correspondant.

Exemple. — Déterminer le jour qui correspond au 12 *Octobre* 1492 (découverte du Nouveau-Monde).

Quantième	12	**Q** = **5**
Mois......	*Octobre*	**M** = **0**
Siècle.....	14	**J** = **5**
Année....	92	**A** = **3**
Réponse..	*Vendredi*	Total = **13**

Ce Calendrier, encore en usage en Russie et en Grèce et chez les Chrétiens d'Orient, est valable à partir du 1er Janvier 45 avant notre ère.

JULIEN ET GRÉGORIEN

ÈCLES LIENS	J
14	5
15	4
16	3
17	2
18	1
19	0
20	6
21	5
22	4
23	3
24	2
25	1
26	0
27	6

ANNÉES				A	ANNÉES				A
00	28	56	84	0	14	42	70	98	3
01	29	57	85	1	15	43	71	99	4
02	30	58	86	2	16	44	72	—	6
03	31	59	87	3	17	45	73	—	0
04	32	60	88	5	18	46	74	—	1
05	33	61	89	6	19	47	75	—	2
06	34	62	90	0	20	48	76	—	4
07	35	63	91	1	21	49	77	—	5
08	36	64	92	3	22	50	78	—	6
09	37	65	93	4	23	51	79	—	0
10	38	66	94	5	24	52	80	—	2
11	39	67	95	6	25	53	81	—	3
12	40	68	96	1	26	54	82	—	4
13	41	69	97	2	27	55	83	—	5

nmence qu'au 1er mars.

RÈGLE POUR LE CALENDRIER GRÉGORIEN.

Ajouter les quatre nombres **Q, M, G, A,** qui correspondent à la date donnée ; chercher le total dans le tableau des Quantièmes et prendre le nom du jour correspondant.

Exemple. — Déterminer le jour qui correspond au 15 *Octobre* 1582 (origine de la réforme grégorienne).

Quantième	15	**Q = 1**
Mois......	*Octobre*	**M = 0**
Siècle.....	15	**G = 1**
Année.. .	82	**A = 4**
Réponse..	*Vendredi*	Total = **6**

Ce Calendrier est indéfiniment valable à partir du 15 Octobre 1582. Pour l'Angleterre, il commence en 1752.

semaines augmenté de 100 jours, plus 25 pour les Années bissextiles; ce qui fait un nombre exact de semaines diminué d'un jour; aussi les nombres **J** décroissent-ils successivement de l'unité, d'un Siècle au suivant, tandis que les nombres **G** décroissent de deux, à partir de 7 ou 0, et de l'unité seulement en passant de 1500 à 1600 ou de 1900 à 2000.

Ainsi, dans notre Calendrier perpétuel, on suppose que l'Année ne commence qu'au 1er Mars. En la faisant commencer au 1er Janvier, on eût obtenu une contexture beaucoup moins simple. Afin de ne pas laisser oublier cette disposition au lecteur, nous lui donnerons cette jolie description poétique du mois de Mars, avec lequel commence ce Calendrier.

> Du pauvre mois de Mars il ne faut pas médire,
> Bien que le laboureur le craigne justement :
> L'univers y renaît; il est vrai que le vent,
> La pluie et le soleil s'y disputent l'empire.
> Qu'y faire? Au temps des fleurs, le monde est un enfant,
> C'est sa première larme et son premier sourire.
>
> (MUSSET. — *Poésies nouvelles.*)

CALCUL MENTAL DES DATES.

Nous donnerons maintenant un moyen de calculer très rapidement, sans le secours de la plume ou du crayon, et par un petit effort de calcul mental, les nombres de notre Tableau.

Calcul mental du nombre **Q** *des Quantièmes.* — Ce nombre est égal au reste de la division par sept du nombre qui exprime le Quantième.

Calcul mental du nombre **M** *des Mois.* — On suppose que l'année ne commence que le 1[er] Mars; ainsi Mars est le premier mois, Avril le second, Septembre le septième, Octobre, Novembre, Décembre, les huitième, neuvième et dixième mois, Janvier le onzième, et Février le douzième.

On prend le double plus deux du numéro du mois augmenté de deux unités, on ajoute à ce nombre le triple de son dixième, le reste de la division par sept de l'entier de ce total donne le nombre **M**.

Calcul mental du nombre **J** *des Siècles juliens.* — On ajoute deux unités au numéro du siècle, on divise le total par sept et l'on retranche le reste de sept.

Calcul mental du nombre **G** *des Siècles grégoriens.* — Ce nombre est zéro, si le reste de la division du numéro du siècle par quatre est zéro; dans le cas contraire, on retranche de sept le double de ce reste.

Calcul mental du nombre **A** *des Années.* — Au numéro de l'année dans le siècle, on ajoute l'entier de son quart et l'on prend le reste de la division par sept.

UTILITÉ DU CALENDRIER PERPÉTUEL.

L'utilité de ce Calendrier se comprend d'elle-même pour les recherches historiques, et nous l'expliquerons par les circonstances mêmes qui lui ont donné naissance. Dans notre voyage à Rome, pour la publication des Œuvres de Fermat, nous avons pu obtenir de la générosité et du désintéressement du prince Boncompagni la communication de deux volumes contenant des lettres inédites de Fermat, de Mersenne, et de plusieurs autres savants. Quelques-unes de ces lettres ne portent pas la date de l'année, mais seulement le mois, le quantième et le jour de la semaine; il fallait les classer; nous avons dû faire un premier travail pour retrouver le chiffre de l'année, à six ou sept années près, ce qui suffit amplement, avec le contenu, pour retrouver la date précise. Telle est l'origine de ce Calendrier.

Grégoire XIII mourut peu de temps après la réforme du Calendrier, le 10 avril 1585; ce fut un pape éclairé, car il confirma l'établissement de la congrégation de l'Oratoire; il fut charitable, car ses aumônes montèrent à deux millions d'écus d'or. Avant son élévation au pontificat, le 13 mai 1572, il était marié et père de famille. C'est donc avec une émotion respectueuse que nous dédions ce modeste travail, comme un faible témoignage de notre reconnaissance, à l'un de ses plus illustres descendants, éclairé et généreux comme lui, à Son Excellence le prince Balthazar Boncompagni.

LE CALCUL AUTOMATIQUE DES RÉSIDUS.

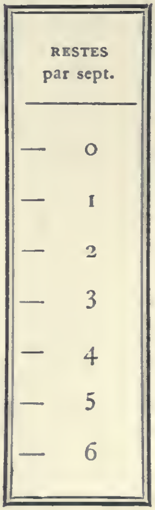
Nous avons publié en 1885 [1] un Calendrier qui ne diffère du précédent que par l'adjonction d'une roulette mobile autour de son axe. Cette roulette porte les noms successifs des jours de

[1] *Calendrier perpétuel à roulette.* — Paris, chez Belin, rue de Vaugirard, 52.

la semaine sur les sept divisions égales formées par des secteurs. On fait apparaître successivement les jours par une lucarne, et l'addition des nombres **Q**, **M**, **G**, **A** est remplacée, dans le mouvement de la roulette, par le passage d'un nombre égal de crans. Le reste de la division par sept s'obtient sans calcul, de telle sorte que, dans ce Calendrier, il ne reste d'autre trace d'opération arithmétique que la lecture même des Tableaux.

Nous donnerons encore une autre disposition du Calendrier, beaucoup plus simple dans son application que la précédente et qui peut s'adapter, non seulement à tous les Calendriers des différents peuples, mais qui constitue un procédé très simple pour le calcul des résidus, c'est-à-dire pour trouver automatiquement les restes de la division d'un nombre quelconque par un nombre qui ne dépasse pas soixante. Nous expliquerons ce procédé sur le calcul des restes de la division par *sept* d'un nombre écrit dans le système décimal; l'appareil se modifie légèrement pour un système de numération dont la base est quelconque, et, par exemple, pour le système duodécimal.

Fig. 2.



Une première tablette fixe (*fig.* 2) contient les nombres plus petits que le diviseur, à savoir : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, sur des lignes horizontales équidistantes. En général, pour un diviseur quelconque, le nombre des lignes de la tablette fixe est égal au nombre des unités du diviseur, quel que soit le système de numération employé.

La *fig.* 3 représente le Tableau des unités; on peut le supposer imprimé des deux côtés et collé sur des feuillets de carton réunis par de petites bandes de toile, de manière à pouvoir les plier selon les lignes de division verticales. On peut aussi découper le Tableau en sept réglettes collées sur carton; on peut aussi le

Fig 3.

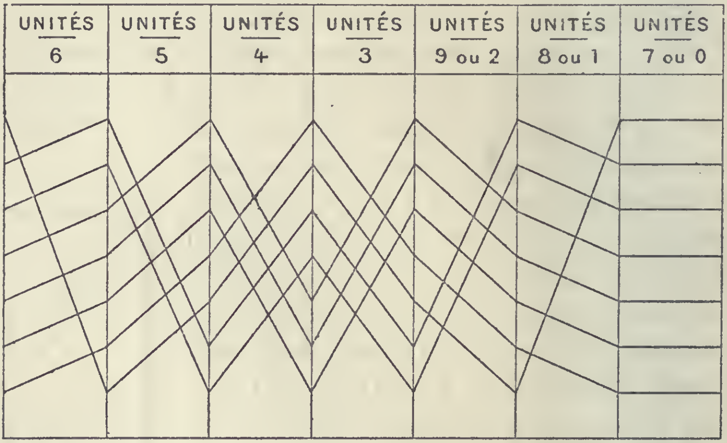


Tableau des unités.

coller sur un rouleau de manière à n'apercevoir par une lucarne que l'une des colonnes de ce Tableau. Pour plus de commodité dans l'explication et dans la construction, nous supposerons le Tableau des unités découpé en sept réglettes. Si l'on place l'une d'elles en avant de la tablette de la *fig.* 2, et si l'on suit le trait le plus élevé à la gauche, son extrémité à droite indique immédiatement le reste de la division par 7.

La disposition des lignes du Tableau des unités s'explique d'elle-même et serait identique pour un système quelconque de numération. Il suffirait, pour le système duodécimal, d'ajouter les chiffres qui représentent dix et onze, dans leurs colonnes respectives, en haut du Tableau, ainsi que nous l'avons fait ; mais, pour les Tableaux qui correspondent aux unités des ordres supé-

Fig. 4.

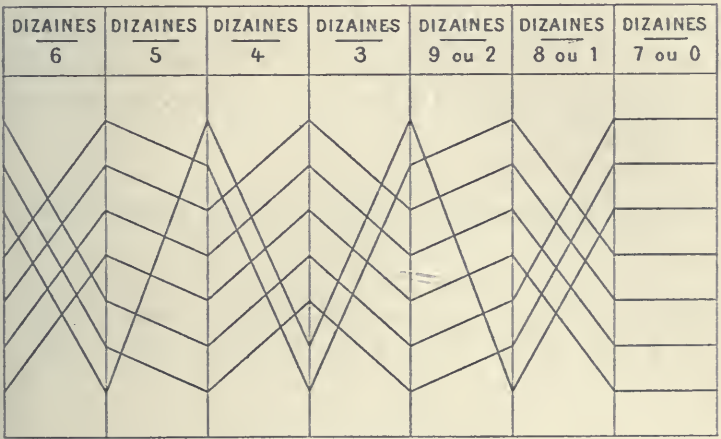


Tableau des dizaines.

rieurs, il suffit de permuter les colonnes du Tableau des unités. Pour les dizaines, nous observons que les restes de la division de

oo ou 70, 10 ou 80, 20 ou 90, 30, 40, 50, 60

par sept sont respectivement

o, 3, 6, 2, 5, 1, 4.

Il nous suffit donc de disposer dans l'ordre o, 3, 6, 2, 5, 1, 4, à partir de la gauche, les colonnes du Tableau des unités portant les chiffres correspondants (*fig.* 4).

Pour obtenir le Tableau des réglettes pour les centaines, nous observons que les restes de la division de

000, 100, 200, 300, 400, 500, 600,

par sept sont respectivement

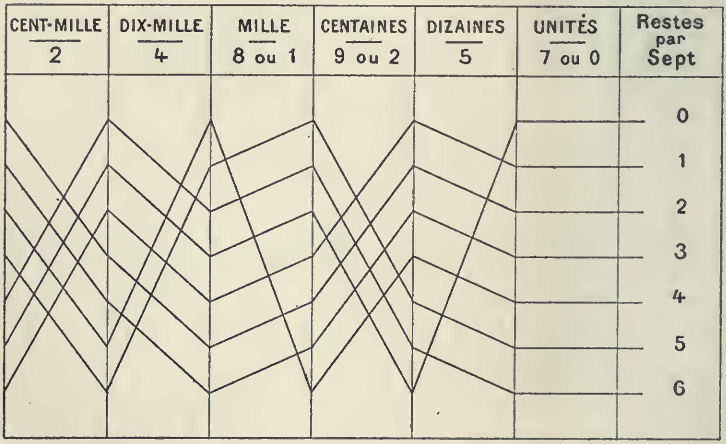
0, 2, 4, 6, 1, 3, 5;

c'est l'ordre des tablettes des unités à partir de la gauche, en y remplaçant les chiffres de la ligne précédente par ceux de la ligne au-dessus.

Et ainsi de suite.

Cela posé, supposons que l'on ait construit le Tableau des ré-

Fig. 5.



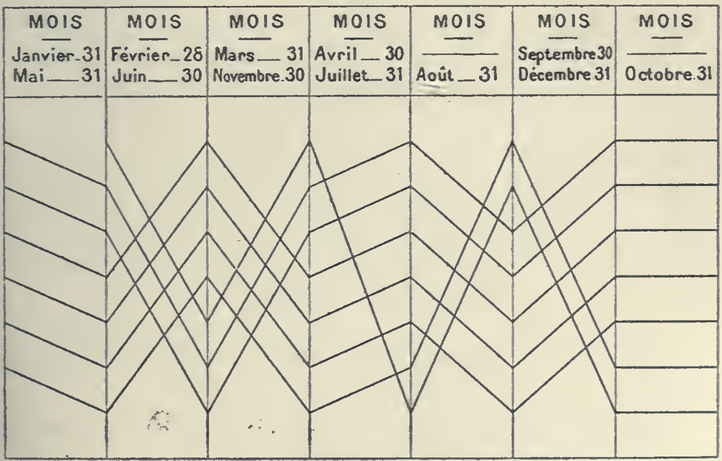
Le reste de la division de 241 257 par 7 est 2.

glettes ou des rouleaux jusqu'aux centaines de mille ; on obtiendra immédiatement, sans aucun calcul, le reste de la division d'un nombre de six chiffres au plus, par le nombre 7. Considérons, par exemple, le nombre 241 257, en plaçant les réglettes correspondantes dans l'ordre convenable (*fig.* 5), et, en suivant le trait supérieur de gauche, on trouve le reste 2.

CALENDRIER PERPÉTUEL A RÉGLETTES.

Il est facile de former un calendrier automatique au moyen de

Fig. 6.



Le rouleau des Mois.

réglettes analogues à celles qui ont servi pour le calcul des résidus.

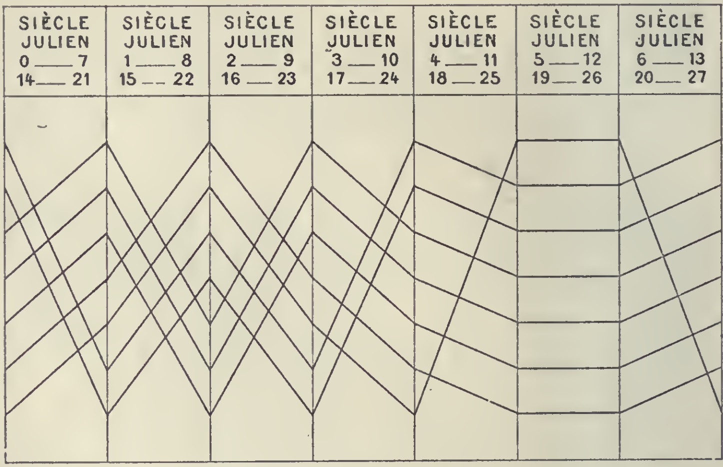
Une première réglette porte l'indication des quantièmes.

Un second groupe de sept réglettes (*fig.* 6) donne les mois.

Un troisième groupe de sept réglettes (*fig.* 7) comprend les siècles juliens.

Un quatrième groupe de quatre réglettes (*fig.* 8) comprend les siècles grégoriens jusqu'au trentième siècle. Les siècles mar-

Fig. 7.



Le rouleau des Siècles juliens.

qués d'un astérisque sont ceux dont le millésime est divisible par quatre.

Un cinquième groupe de sept réglettes (*fig.* 9) renferme les années. L'astérisque désigne les années bissextiles.

Enfin sur une dernière réglette se trouvent inscrits les noms des sept jours de la semaine.

Si l'on demande à quel jour correspond la date du 10 mai 1889, il suffit de disposer les réglettes comme l'indique la *fig.* 10.

A côté de la réglette des quantièmes, on met la réglette du mois

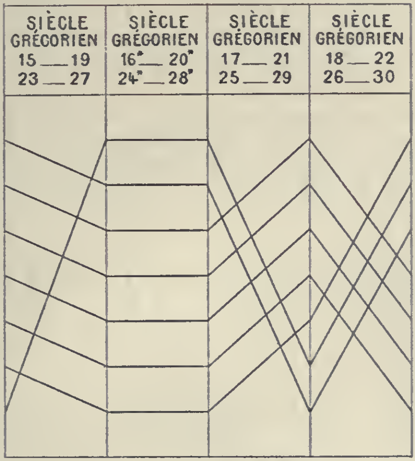


Fig. 8. — Le rouleau des Siècles grégoriens.

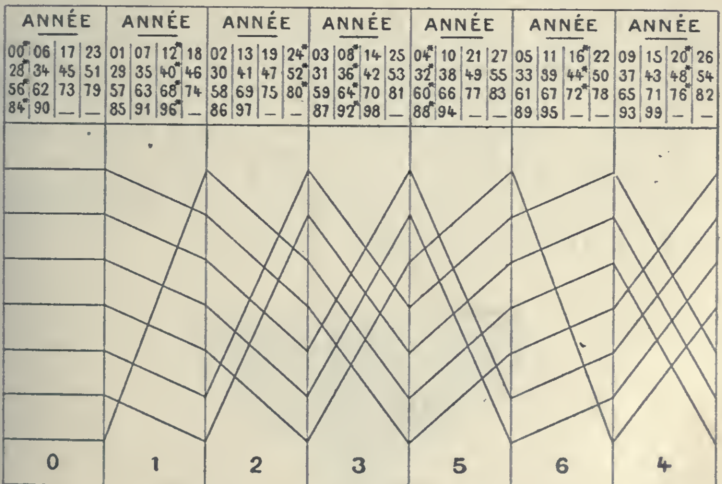
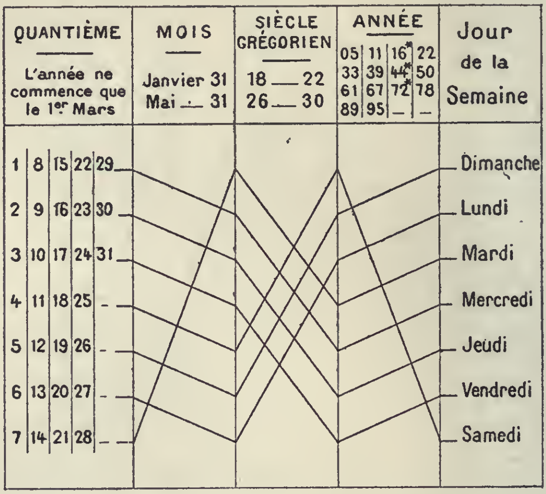


Fig. 9. — Le rouleau des Années.

de mai, puis celle du siècle grégorien 18, ensuite la réglette cor-

Fig. 10.



Calendrier du mois de mai 1889 et de janvier 1890.

respondant à l'année 89, et enfin celle des jours de la semaine.

En partant de la ligne où est inscrit le quantième 10 et en suivant le tracé jusqu'à la colonne des jours, on voit immédiatement que le 10 mai 1889 était un vendredi.

DEUXIÈME RÉCRÉATION.

—

L'ARITHMÉTIQUE EN BOULES.

A Monsieur Paul Mansion, professeur à l'Université de Gand.

« Je forme un triangle, ô merveille!
Le peuple des lois endormi
S'agite avec lenteur, s'éveille
Et se déroule à l'infini.

« Avec trois lignes sur le sable,
Je connais, je ne doute plus!
Un triangle est donc préférable
Aux mots sonores que j'ai lus? »

SULLY PRUD'HOMME.

DEUXIÈME RÉCRÉATION.

—

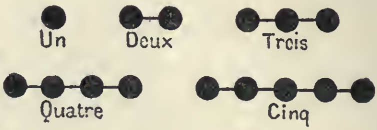
L'ARITHMÉTIQUE EN BOULES.

Cette récréation a pour but l'exposition de quelques principes de Calcul, et même d'Arithmétique supérieure, par des procédés de démonstration qui ne supposent au lecteur d'autres connaissances mathématiques que les quatre premières règles et les définitions de la Géométrie élémentaire. C'est encore un essai de restauration des méthodes dont se servaient peut-être les ancêtres de la Science, dans la Chine et dans l'Inde, pour arriver à la découverte des propriétés et des lois du nombre et de l'étendue. Nous n'ignorons pas que les savants qui s'occupent des origines de l'Arithmétique et de la Géométrie sont divisés sur la question de savoir si les solutions des problèmes relatifs à la mesure des surfaces et des volumes ont ou n'ont pas précédé celles des problèmes de même ordre dans le calcul des nombres polygonaux et des nombres figurés que nous définissons plus loin; nous devons dire que cette Récréation et la suivante viennent apporter un nouvel appoint à ceux qui prétendent que l'étude de l'Arithmétique a précédé celle de la Géométrie; mais nous n'y reviendrons que plus tard, pour demeurer fidèle à notre méthode d'enseignement et de vulgarisation qui consiste toujours à passer du simple au composé ; nous commencerons par les questions les plus élémentaires.

L'ADDITION.

Avec des boules, des billes, des noix, ou mieux encore avec les pions d'un ou de plusieurs jeux de dames, nous pouvons suc-

Fig. 11.

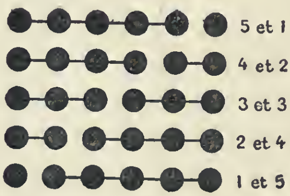


Les cinq premiers nombres.

cessivement représenter les nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, ..., ainsi que nous indiquons ci-dessus (*fig.* 11).

L'Arithmétique et, par suite, toutes les Mathématiques repo-

Fig. 12.



L'addition.

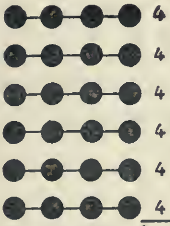
sent sur cet axiome, que le nombre est toujours égal à la somme de ses unités, quelle que soit la manière de les assembler ou de les grouper. Ainsi, en partageant le nombre 6 en deux parties, on peut obtenir les dispositions représentées sur la *fig.* 12.

Donc le nombre 6 est la somme de 5 et de 1, par définition, mais aussi de 4 et 2, de 3 et 3, de 2 et 4, et enfin de 1 et 5. Par suite, la somme de deux nombres ne change pas lorsque l'on intervertit l'ordre des nombres ajoutés; il en est de même pour la somme d'autant de nombres que l'on voudra.

LA MULTIPLICATION.

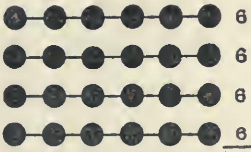
La multiplication de 4 par 6 est l'addition de six nombres égaux à 4; nous l'avons représentée (*fig.* 13); le résultat s'appelle

Fig. 13.



Le produit. 4×6

Fig. 14.



Le produit renversé. 6×4

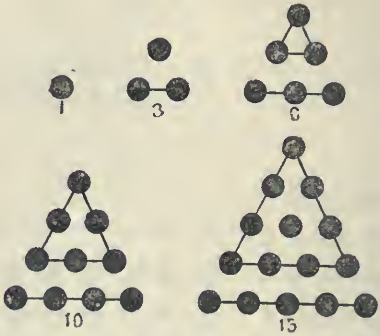
le *produit* de la multiplication ou le nombre *rectangulaire* de côtés 4 et 6. Si l'on fait tourner la figure d'un quart de tour, le nombre des unités ne change pas; on obtient alors le rectangle (*fig.* 14) provenant de la multiplication de 6 par 4.

La comparaison des *fig.* 13 et 14 démontre cette proposition, que le produit de deux nombres ne change pas lorsque l'on intervertit l'ordre des facteurs, ainsi qu'on peut le constater sur la Table de multiplication. Cette démonstration est classique.

LES NOMBRES TRIANGULAIRES.

Supposons toujours les nombres représentés par des boules juxtaposées en ligne droite et plaçons successivement (*fig.* 15) le

Fig. 15.



Les triangulaires.

premier nombre sur le second, les deux premiers sur le troisième, les trois premiers sur le quatrième, les quatre premiers sur le cinquième, et ainsi de suite. Nous formons ainsi successivement ce que l'on appelle les *nombres triangulaires*.

Si l'on veut construire la Table des nombres triangulaires, et la conduire aussi loin qu'on voudra, on écrit sur une première ligne les unités 1, 1, 1, ...; sur une seconde ligne les nombres successifs

1, 2, 3, ..., de telle sorte que chaque nombre de cette ligne soit la somme de celui qui le précède dans la ligne et de l'unité 1 qui est au-dessus de lui; c'est la loi même de formation des nombres entiers.

Unités........	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Entiers.......	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangulaires.	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Sur une troisième ligne, on forme la suite des nombres triangulaires en ajoutant au dernier nombre obtenu celui qui se trouve au-dessus dans la colonne suivante; ainsi, par exemple, $28 = 21 + 7$, et de même pour tous les autres. Pour avoir les cent premiers triangulaires, on a donc à faire cent additions successives de deux nombres.

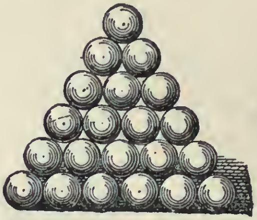
LA PILE D'OBUS.

Mais il vient se placer ici tout naturellement une question importante. Comment peut-on déterminer directement le centième triangulaire, ou plus généralement, comment peut-on calculer un triangulaire de rang donné?

On sait que, dans les arsenaux, les projectiles emmagasinés sont de deux espèces : les uns sont des boulets destinés aux pièces lisses; les autres, qui servent à la charge des pièces rayées, ont une forme cylindro-conique. Nous ne nous occuperons pour l'instant que de ces derniers. Une première tranche verticale représente un nombre triangulaire dont le profil est représenté *fig.* 16. Pour donner plus de solidité à la pile, on place plusieurs rangées verticales semblables; et le nombre total des obus est le produit du nombre des tranches par le triangulaire correspondant qu'il s'agit donc de calculer.

Pour cela, considérons, par exemple, le cinquième triangu-

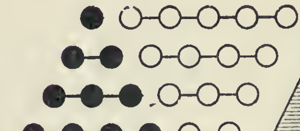
Fig. 16.



La pile d'obus.

laire et plaçons à côté, en sens inverse (*fig.* 17), le même triangulaire représenté par des boules blanches; nous formons ainsi

Fig. 17 Fig. 18.



un parallélogramme; chaque ligne contient $(5 + 1)$ boules et, puisqu'il y a cinq lignes, le nombre total des boules qui représente le double du cinquième triangulaire est le produit de 5 par $5 + 1$ ou 6; ainsi le cinquième triangulaire est la moitié du produit de 5 par 6.

CALCUL DIRECT DES TRIANGULAIRES.

Par cette démonstration absolument pareille à celle qui prouve (*fig.* 18) que l'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme de même base et de même hauteur, on voit que: *Le double d'un nombre triangulaire de rang quelconque est le produit du nombre qui indique son rang par le nombre suivant.*

Le rang est d'ailleurs égal au nombre de boules sur le côté, et nous considérons ces deux expressions comme équivalentes.

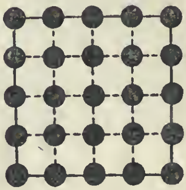
Ainsi, en résumé, on peut calculer les nombres triangulaires par additions successives, de manière à les obtenir tous; mais aussi on peut les calculer isolément par une seule multiplication, ainsi que nous venons de le voir. Le second procédé sert de vérification au premier en calculant directement les triangulaires de dix en dix.

Le Tableau précédent peut être allongé indéfiniment dans le sens de la longueur, en ajoutant autant de colonnes que l'on veut; mais on peut aussi l'allonger dans le sens de la largeur en ajoutant des lignes. Il existe deux procédés d'extension absolument différents : le premier donne la théorie des *nombres polygonaux ;* c'est, pour ainsi dire, l'*Arithmétique de Diophante;* nous l'exposerons dans cette Récréation. Le second procédé donne la théorie des *nombres figurés;* c'est plus spécialement l'*Arithmétique de Fermat;* nous l'exposerons dans la Récréation suivante intitulée : *l'Arithmétique en bâtons.*

LES NOMBRES CARRÉS.

Plaçons des boules aux sommets de carrés égaux distribués comme ceux des cases d'un échiquier. Nous avons représenté dans la *fig.* 19 le carré de 5; ce carré est un nombre rectangulaire dont les côtés sont égaux; par conséquent, le nombre des unités qu'il renferme est 5×5 ou 25. Nous savons donc calculer, par multiplications successives, tous les carrés; ainsi le nombre des cases de l'échiquier de 8 cases de côté est 64; le nombre des cases du damier de 10 cases de côté est 100; mais, pour le nombre des sommets de toutes les cases, on doit augmenter le côté d'une unité. Ainsi, dans la *fig.* 19, il y a 16 cases et 25 sommets; de même, le nombre des sommets de l'échiquier est 81, et le nombre des sommets du damier est 121.

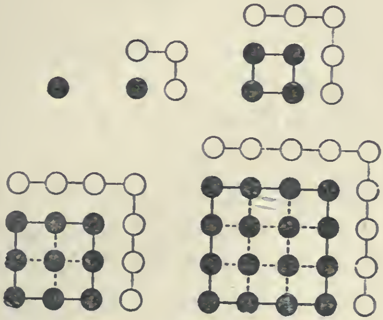
Fig. 19.



Le carré de cinq.

Contrairement à ce que nous avons fait pour les nombres triangulaires, nous trouvons ici tout d'abord le procédé de calcul pour chaque carré pris isolément; nous allons chercher le procédé par lequel on peut les obtenir par additions successives. Dans ce but, nous déterminerons ce qu'il faut ajouter à un carré pour obtenir le carré suivant; nous avons représenté par des boules blanches, dans la *fig.* 20, le nombre qu'il faut ajouter à chacun des carrés pour obtenir le carré suivant. Ce nombre, que l'on appelle *accroissement, excès* ou *différence,* est formé d'une ligne brisée à angle droit et renferme successivement 3, 5, 7, 9 unités, c'est-à-dire continuellement 2 en plus; il en sera toujours de

Fig. 20.



Les accroissements des carrés.

même, comme il est facile de s'en convaincre. Ainsi les accroissements des carrés sont représentés par les nombres impairs, et l'on voit alors d'une manière évidente que le second carré est la somme des deux premiers impairs 1 et 3; que le troisième carré est la somme des trois premiers impairs; que le quatrième carré est la somme des quatre premiers impairs, et ainsi de suite. On a donc cette proposition : *La somme des premiers impairs à partir de 1 est égale au carré de leur nombre.* On la trouve dans l'Arithmétique de *Nicomaque,* de Gérase, qui vivait vers la fin du Ier siècle de l'ère chrétienne.

LA TABLE DES CARRÉS.

	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Impairs.........	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Carrés..........	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Nous profiterons du théorème précédent pour construire rapidement la Table des carrés. Sur une première ligne, on écrit constamment le nombre 2 ; sur une deuxième ligne, on forme successivement les impairs en ajoutant 2 au dernier impair obtenu ; sur une troisième ligne, on forme les carrés en ajoutant au dernier carré obtenu le nombre placé au-dessus dans la colonne suivante ; ainsi, par exemple, $49 = 36 + 13$. On vérifie d'ailleurs le calcul en plaçant à l'avance les carrés des nombres terminés par des zéros, et l'on doit les retrouver dans le courant de l'opération.

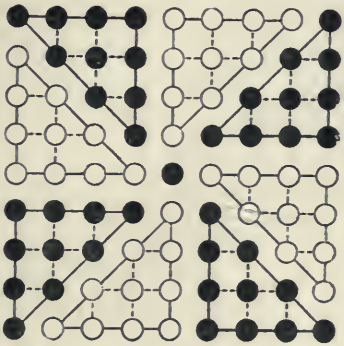
La Table des carrés est d'une extrême importance pour l'Arithmétique théorique et pratique, et nous pensons que son emploi est beaucoup plus utile et plus étendu que celui de la Table des logarithmes. Nous y reviendrons plus d'une fois dans le courant de cet Ouvrage. Nous supposerons donc que l'on possède une telle Table, que l'on peut rapidement construire soi-même d'après les indications précédentes. Il n'est pas douteux que c'est par son secours que Fermat a obtenu et démontré la plupart de ses inventions arithmétiques.

Nous nous servirons de cette Table pour résoudre diverses questions. On reconnaîtra tout d'abord si un nombre est carré en le cherchant dans la Table, puisque les carrés sont rangés par ordre de grandeur, et nous supposerons d'ailleurs que ce nombre ne dépasse pas les limites de cette Table, et, par exemple, cent millions, si l'on a calculé la Table des dix mille premiers carrés.

Comment reconnaître maintenant, avec la Table des carrés, si un nombre donné est triangulaire; on se servira pour cela du théorème suivant que l'on trouve dans l'Arithmétique de *Diophante :*

L'octuple d'un triangulaire augmenté de l'unité est toujours

Fig. 21.



Théorème de Diophante.

un carré. La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de la vue de la *fig.* 21 ci-dessus.

Inversement, *tout carré impair diminué de l'unité est l'octuple d'un triangulaire.*

Par conséquent, pour savoir si 55 est un triangulaire, on le multiplie par 8 et l'on ajoute 1, ce qui fait 441 ou le carré de 21; donc 55 est un triangulaire; pour avoir son côté, on prend la moitié du côté de carré diminué préalablement de 1 et l'on trouve 10. Ainsi 55 est le dixième triangulaire.

LES RESTES DES CARRÉS.

A la seule inspection de la Table des carrés, on reconnaît immédiatement que ceux-ci sont terminés par l'un des chiffres 0, 5, 1, 4, 6, 9 et ne sont jamais terminés par l'un des quatre chiffres 2, 3, 7, 8 ; cela résulte de ce que le dernier chiffre d'un produit est le même que celui du produit de ses deux derniers chiffres. On peut donc affirmer que si un nombre est terminé par 2, 3, 7, 8, il ne peut être un carré parfait. On dit que les nombres 0, 5, 1, 4, 6, 9 sont les restes des carrés par 10, et que les autres sont des non-restes ou des non-résidus.

De même, les triangulaires ne sont jamais terminés par l'un des chiffres 2, 4, 9, 7, parce que leur octuple augmenté de l'unité donnerait pour dernier chiffre un non-reste de carré; ces observations permettent de simplifier dans beaucoup de cas les recherches pour savoir si un nombre est triangulaire ou carré.

LES DÉCOMPOSITIONS D'UN CARRÉ.

Si nous plaçons au-dessous du Tableau des triangulaires la ligne des carrés, nous obtenons ainsi la nouvelle Table :

Unités........	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Entiers........	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangulaires...	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Carrés.........	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

On reconnaît immédiatement que *tout carré est la somme du* *triangulaire de même rang et du triangulaire précédent.* Cette propriété est visible sur la *fig.* 22 ; de même la *fig.* 23 nous

Fig. 22.

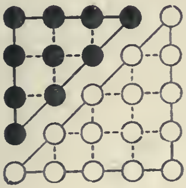
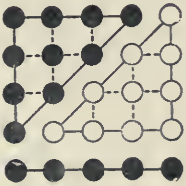


Fig. 23.



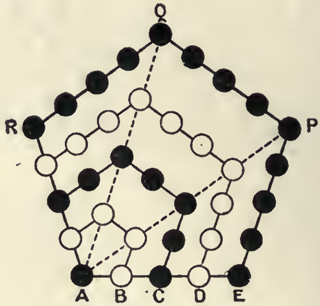
montre que *tout nombre carré est égal à son côté augmenté de deux fois le triangulaire de rang précédent.*

LES NOMBRES PENTAGONAUX.

La *fig.* 24 représente le cinquième *nombre pentagonal;* on formerait le sixième nombre pentagonal en ajoutant des boules au delà du contour EPQR. Ainsi les nombres pentagonaux sont formés par des boules placées sur des enceintes ou contours successifs d'un pentagone régulier ; le premier pentagonal est représenté par la boule A ; le second pentagonal par cette boule et les quatre boules blanches aux sommets du pentagone régulier de côté AB ; le troisième pentagonal par les boules précédentes et celles qui se trouvent sur le pentagone de côté AC, et ainsi de suite.

Puisque le contour extérieur EPQR a trois côtés, EP, PQ, QR, on voit que, d'un contour au suivant, le nombre des boules augmente de *trois* unités. Par suite, le Tableau des pentagonaux se fait comme celui des carrés, mais en remplaçant la première

Fig. 24.



Le cinquième pentagonal.

ligne des nombres tous égaux à 2, par des nombres tous égaux à 3.

LA TABLE DES PENTAGONAUX.

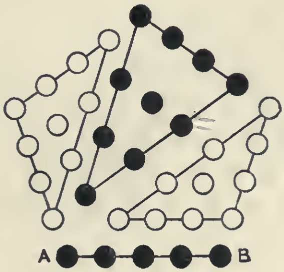
		3	3	3	3	3	3	3	3	3
Triples moins 2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
Pentagonaux....	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145

Ainsi, en continuant le Tableau précédent, on peut calculer tous les pentagonaux par additions successives; mais, si l'on veut calculer isolément un pentagonal de rang donné, il suffit de consulter la *fig.* 25, qui nous montre immédiatement l'exactitude de cette proposition :

Tout pentagonal est égal à son côté AB *augmenté de trois fois le triangulaire de rang précédent.*

Cette proposition correspond à celle qui résulte, pour le carré, de la vue de la *fig.* 23, mais si l'on ajoute le côté AB de la *fig.* 25 au triangle placé au-dessus et formé de boules blanches, on en déduit la propriété correspondante à celle de la *fig.* 22 pour le carré et que l'on énonce ainsi : *Tout pentagonal est la somme du*

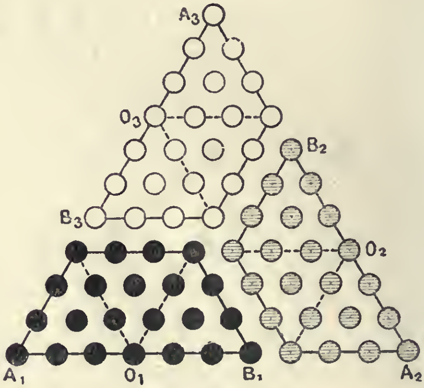
Fig. 25.



triangulaire de même rang et du double du triangulaire précédent.

Il nous reste maintenant à résoudre la question suivante : Comment reconnaître qu'un nombre donné est pentagonal? Mais il résulte immédiatement de l'étude de la *fig.* 26 que : *Le triple de tout nombre pentagonal est un nombre triangulaire dont le rang est le triple moins un du rang du pentagonal.* Inversement, tout triangulaire dont le rang est un triple moins un est le triple d'un pentagonal. Ainsi, un nombre étant donné, pour savoir si ce nombre est un pentagonal, on le multiplie par 3, et le produit doit être un nombre triangulaire. Par conséquent, en appliquant le théorème de Diophante : *Le produit par* 24 *d'un nombre pentagonal étant augmenté de l'unité donne un carré dont le côté est le sextuple moins un du côté du pentagonal.* Inversement, tout triangulaire dont le rang est un sextuple

Fig. 26.



Le triple pentagonal.

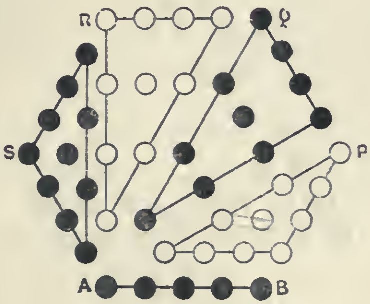
moins un est le produit plus un d'un nombre pentagonal par 24.

On reconnaît encore facilement qu'un nombre pentagonal ne peut être terminé par l'un des chiffres 4, 8, 3, 9, parce que, s'il en était ainsi, le triple de ce nombre serait terminé par 2, 4, 9, 7 et que l'un de ces chiffres ne peut être le dernier chiffre d'un nombre triangulaire.

LES NOMBRES HEXAGONAUX.

La *fig.* 27 représente le cinquième *nombre hexagonal;* il est formé en plaçant des boules à égale distance sur les contours suc-

Fig. 27.



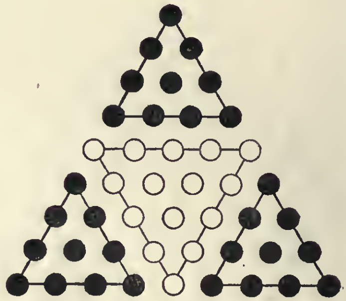
Le cinquième hexagonal.

cessifs d'hexagones réguliers ayant pour sommets communs le sommet A, et dont les côtés sont respectivement 1, 2, 3, 4; on pourrait construire la Table des nombres hexagonaux en remplaçant, dans la première ligne de la Table des carrés ou des pentagonaux, les nombres 2 ou les nombres 3 par le nombre 4; on peut aussi calculer directement un nombre hexagonal de rang quelconque en observant (*fig.* 27) que : *Tout nombre hexagonal est égal à son côté* AB *augmenté de quatre fois le triangulaire de rang précédent.*

Si l'on réunit les boules blanches du triangle P à celles du côté AB, on a encore cette proposition : *Tout hexagonal est la somme du triangulaire de même rang et du triple du triangulaire précédent.*

Mais le calcul de la Table des nombres hexagonaux est inutile, et les résultats se déduisent de la Table des triangulaires, car il résulte de la proposition précédente et de la vue de la *fig.* 28 que :

Fig. 28.



Tout hexagonal est un triangulaire de côté impair et réciproquement.

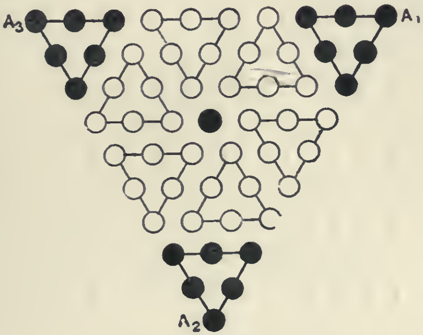
LES NOMBRES POLYGONAUX.

En continuant le mode de construction des nombres pentagonaux et hexagonaux, on apprend à construire tous les nombres polygonaux. Pour cela, on figure un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés en plaçant une boule à tous les sommets. Si l'on joint un sommet déterminé à tous les autres et si l'on place des boules à une distance double, triple, quadruple de ce sommet, on obtient des sommets de polygones de côtés doubles, triples, quadruples. Puis l'on place sur les côtés de ces polygones des boules dont la distance est toujours égale au côté du polygone primitif. On a les deux propositions suivantes analogues à celles qui ont été indiquées plus haut :

Tout polygonal est égal à son rang augmenté d'autant de fois le triangulaire précédent qu'il y a d'unités dans son rang diminué de deux.

Tout polygonal est égal au triangulaire de même rang augmenté d'autant de fois le triangulaire précédent qu'il y a d'unités dans son rang diminué de trois.

Fig. 29.



Le nonuple triangulaire.

D'ailleurs, pour construire tous les polygonaux dont le nombre des côtés est donné, il suffit de remplacer dans la Table des carrés ou des pentagonaux la première ligne contenant les nombres 2 ou les nombres 3, par des nombres tous égaux au nombre des côtés diminué de deux unités.

Nous donnons ci-après la Table des dix premiers nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, hexagonaux, heptagonaux, octogonaux, nonagonaux et décagonaux.

TABLE DES NOMBRES POLYGONAUX.

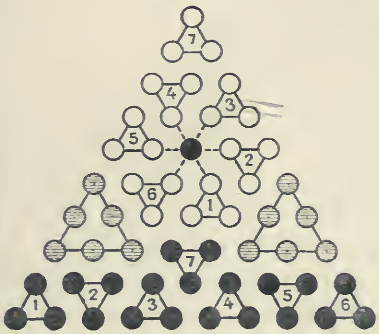
NOMBRE	1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
Triangulaire..	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal...	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagonal....	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal...	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octogonal....	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Nonagonal ...	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Décagonal....	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Les nombres *octogonaux* donnent lieu à la proposition suivante : *Le triple plus un d'un octogonal est un carré dont le côté est le triple moins un du côté de l'octogonal.*

Mais, pour démontrer ce théorème, nous remarquerons d'abord que tout octogonal est égal au pentagonal de même rang augmenté du triple du triangulaire de rang précédent; cette propriété résulte de la décomposition d'un pentagonal par une diagonale menée du sommet qui correspond à l'unité. Cela posé, la *fig.* 29 nous montre que : *Le nonuple plus un d'un triangulaire est un* *triangulaire dont le côté est le triple plus un du côté du premier.* Si l'on superpose le côté A_2A_3 de cette figure sur le côté A_2A_3 de la *fig.* 26, en tenant compte de la décomposition de l'octogonal en un pentagonal et trois triangulaires de rang précédent, on démontre l'avant-dernière proposition, car on forme ainsi un losange dont le nombre des boules est un carré.

Par suite, un octogonal ne peut être terminé par l'un des

Fig. 30.



Le double décagonal.

chiffres 7, 4, 2, 9; car, s'il en était autrement, son triple plus un qui est un carré serait terminé par 2, 3, 7, 8; ce que nous avons reconnu impossible.

Les nombres *décagonaux* donnent lieu à la propriété suivante : *Le double plus un d'un décagonal est un triangulaire dont le rang est le quadruple moins deux de celui du décagonal.*

En effet, tout décagonal vaut un triangulaire de même rang augmenté de *sept* triangulaires de rang précédent; or, en ajoutant (*fig.* 30) l'un des triangulaires ombrés aux *sept* triangulaires en boules blanches ou noires, on forme le décagonal. Il résulte de cette proposition qu'un décagonal ne saurait être terminé par l'un des chiffres 3, 4, 8, 9.

DEUX PROBLÈMES DE FERMAT.

La théorie des nombres polygonaux se trouve dans l'*Arithmétique* de Diophante, et les formules qui servent à les calculer sont reproduites dans la *Géométrie* de Boèce, et dans un recueil encyclopédique du xv^e siècle, ayant pour titre : *Margarita philosophica*. Cette théorie semble avoir été abandonnée à cause de son peu d'application pratique; mais elle a occupé les plus grands géomètres et, en particulier, Fermat. Nous indiquerons la solution de deux problèmes fondamentaux; cette solution est beaucoup plus simple que toutes celles qui ont paru jusqu'ici dans les essais de restauration d'un passage obscur de Diophante. Ces deux problèmes sont les suivants : 1° *Étant donné un nombre, trouver de combien de manières ce nombre peut être polygonal; 2° Trouver un nombre qui soit polygonal autant de fois qu'on voudra et trouver le plus petit de ceux qui satisfont à la question.*

Pour résoudre ces deux problèmes, nous aurons recours à la Table des nombres polygonaux (p. 42), que l'on consulte comme la Table de Pythagore.

A l'inspection de ce Tableau, on reconnaît facilement qu'il est plus simple de le calculer par colonnes, car, en passant dans chacune d'elles d'une ligne à la suivante, tous les nombres augmentent d'une même quantité, à savoir le triangulaire de la colonne précédente. Par suite, pour savoir de combien de manières un nombre donné est polygonal, il suffit de le diviser par les triangulaires successifs en ne conservant que les divisions dans lesquelles le reste représente le triangulaire qui précède le diviseur. Le second problème se ramène de même à déterminer un nombre qui, divisé par des nombres donnés, fournisse des restes donnés; la solution en est connue.

LA TABLE DES QUARTS DE CARRÉS.

Les Tables des carrés et des *Quarts de carrés* sont fort importantes pour les calculs exacts de l'Arithmétique théorique et de l'Arithmétique pratique. Dans la pratique, on trouve un procédé rapide de calcul qui remplace, comme dans le système des logarithmes, la multiplication par une addition. Dans la théorie, on trouve un procédé plus rapide encore pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers; ce procédé fort expéditif était connu de Fermat.

En 1690, Ludolf publiait une Table des carrés des cent mille premiers nombres et expliquait, dans son introduction, que cette Table pouvait donner les produits de deux nombres a et b par la formule des quarts de carrés

$$ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2;$$

on a donc pour la multiplication une Table à *simple entrée*, tandis que celle de Pythagore est à *double entrée*. La première Table des quarts de carrés, que l'on construit comme celle des carrés, par additions successives, a été publiée par Voisin, sous le titre : *Tables des multiplications, ou logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 20000, au moyen desquelles on peut multiplier tous les nombres qui n'excèdent pas 20 000* (Paris, 1817). Par le mot logarithme, Voisin entend un quart de carré, et ainsi $\frac{1}{4}a^2$ est le logarithme de a ; par suite, la formule précédente s'énonce ainsi :

Le logarithme d'un produit est égal à la différence des logarithmes de la somme et de la différence des facteurs.

Il existe une Table des quarts de carrés jusqu'à 100 000, publiée par Laundy, en Angleterre, et une Table manuscrite jusqu'à 200 000 par le général Shortrede [1].

Sylvester a donné, dans le *Philosophical Magazine* de 1854, la généralisation de la formule des quarts de carrés en exprimant le produit de n quantités par une somme de puissances d'exposant n.

Lorsque la somme $(a+b)$ des deux facteurs à multiplier dépasse les limites de la Table, on peut encore effectuer le produit, lorsque les facteurs a et b sont contenus dans la Table, par la formule

$$ab = 2\left[\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2\right];$$

mais alors il faut entrer trois fois dans la Table, et doubler ensuite le résultat.

Nous terminerons cette Récréation en indiquant quelques exercices de calcul qui se rapportent à notre sujet.

[1] J.-W.-L. Glaisher. *On multiplication by a table of single entry.* (*Philos. Mag.*, nov. 1878).

EXERCICE 1. — Le chiffre des dizaines d'un carré terminé par 1 ou par 9 est un nombre pair.

Le chiffre des dizaines d'un carré terminé par 5 est 2.

Le chiffre des dizaines d'un carré terminé par 4 est un nombre pair.

Le chiffre des dizaines d'un carré terminé par 6 est un nombre impair.

Un nombre n'est pas un carré parfait, si l'ensemble de ses deux derniers chiffres n'est pas l'un des vingt-deux nombres

00; 01, 21, 41, 61, 81; 09, 29, 49, 69, 89;
25; 04, 24, 44, 64, 84; 16, 36, 56, 76, 96.

EXERCICE 2. — Étendre les résultats précédents à un système quelconque de numération, et en particulier au système duodécimal.

Combien y a-t-il de nombres de deux, trois, ... chiffres qui terminent les carrés des nombres écrits dans un système de numération de base donnée ?

EXERCICE 3.— Toute somme de deux carrés a un nombre pair de dizaines. si elle est terminée par 1, par 5 ou par 9, et un nombre impair, si elle est terminée par 3 ou par 7.

Lorsqu'un carré est terminé par 1 ou par 9, la moitié du nombre de ses dizaines est de même parité que le nombre des centaines.

EXERCICE 4. — Le carré d'un nombre terminé par 8 212 890 625 se termine de la même façon, ainsi que toutes ses puissances; et il n'y a qu'un seul autre nombre de dix chiffres, en exceptant dix zéros ou neuf zéros suivis de un, qui possède la même propriété : c'est le nombre 1 787 109 376.

Les nombres de dix chiffres du système de base six, dont toutes les puissances se terminent par les mêmes dix chiffres, sont

3 221 350 213 et 2 334 205 344.

De même, dans le système duodécimal où l'on désigne dix par *a* et onze par *b*, ce sont les nombres

2 1*b*6 1*b*3 854 et 9 *a*05 *a*08 369

EXERCICE 5. — Trouver les n derniers chiffres d'un nombre, connaissant les n derniers chiffres de son carré.

Par exemple, si les n derniers chiffres du carré d'un nombre sont

224 466 889, les neuf derniers chiffres de ce nombre sont parmi les suivants :

265 810 083, 765 810 083, 363 466 333, 863 466 333,
734 189 917, 234 189 917, 636 533 667, 136 533 667.

Exercice 6. — Connaissant le produit d'un nombre par le nombre renversé, retrouver les facteurs du produit.

Exercice 7. — Former les puissances successives de 2. — En doublant continuellement, on forme la suite des nombres

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. ....

On vérifie les calculs par les résultats suivants :

$$2^{16} = 65\,536$$
$$2^{32} = 42\,949\ \ 67\,296$$
$$2^{64} = 18\,446\ \ 74\,407\ \ 37\,095\ \ 51\,616.$$

La puissance de 2 d'exposant 196, égale à seize fois le cube de la précédente, se compose des soixante chiffres suivants :

10043 36277 66186 89222 13726 30771
32266 26576 37687 11142 45522 06336.

La notation des exposants est due à Nicolas Chuquet ; on la trouve dans son Ouvrage intitulé *Triparty en la Science des nombres,* écrit en 1484 et publié pour la première fois par M. Aristide Marre, en 1880, dans le *Bullettino di Bibliografia* (t. XIII) du prince B. Boncompagni.

Exercice 8. — Former les puissances successives de 5. — Le lecteur les trouvera dans l'intéressante préface de la *Table des Logarithmes* de Callet. — Démontrer que le chiffre des dizaines de mille d'une puissance quelconque de 5 ne peut être ni un 3, ni un 8. (Laisant.)

Exercice 9. — On considère le tableau des neuf quantités

$$\begin{array}{ccc} p^2+q^2-r^2-s^2, & 2(qr+ps), & 2(qs-pr), \\ 2(qr-ps), & p^2+r^2-q^2-s^2, & 2(rs+pq), \\ 2(qs+pr), & 2(rs-pq), & p^2+s^2-q^2-r^2. \end{array}$$

Vérifier que la somme des carrés des nombres contenus dans une même ligne ou dans une même colonne est égale au carré de $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$.

Exercice 10. — Trouver quatre nombres tels que leurs produits deux à deux, augmentés de l'unité, soient des carrés. (Diophante, Liv. IV, Prob. XXI.) — Si l'on pose

$$\begin{aligned}
&a = r,\\
&b = s(rs + 2),\\
&c = (s + 1)(rs + r + 2),\\
&d = 4(rs + 1)(rs + r + 1)(rs^2 + rs + 2s + 1),
\end{aligned}$$

les carrés des six expressions

$$\begin{aligned}
&rs + 1,\\
&rs + r + 1,\\
&2r^2s^2 + 2r^2s + 4rs + 2r + 1,\\
&rs^2 + rs + 2s + 1,\\
&2r^2s^3 + 2r^2s^2 + 6rs^2 + 4rs + 4s + 1,\\
&2r^2s^2 + 4r^2s^3 + 6rs^2 + 2r^2s + 8rs + 4s + 2r + 3
\end{aligned}$$

sont respectivement égaux aux six quantités

$$\begin{aligned}
&ab + 1, \qquad ac + 1, \qquad ad + 1,\\
&bc + 1, \qquad bd + 1, \qquad cd + 1.
\end{aligned}$$

TROISIÈME RÉCRÉATION.

—

L'ARITHMÉTIQUE EN BATONS.

A Monsieur Léon Rodet, ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Manufactures de l'État.

« Les questions aisées doivent être traitées par des moyens également faciles ; il faut réserver l'analyse savante pour les questions qui exigent les grands moyens et il ne faut pas ressembler à ce personnage de la Fable, qui, pour se délivrer d'une puce, voulait emprunter à Jupiter sa foudre ou à Hercule sa massue. »

(DELAMBRE.)

TROISIÈME RÉCRÉATION.

—

L'ARITHMÉTIQUE EN BATONS.

DANS L'INDE, AU TEMPS DE CLOVIS.

Ayant rendu hommage à Brahma, à la Terre, à la Lune, à Mercure, à Vénus, au Soleil, à Mars, à Jupiter, à Saturne, et aux Constellations, Aryabhata, en la *Cité des fleurs,* expose la science très vénérable.

Les lignes qui précèdent sont, d'après M. Léon Rodet (1), ingénieur des Manufactures de l'État, la traduction du premier distique des *Leçons de Calcul* d'Aryabhata, mathématicien, né en l'année 475 ou 476 de notre ère, qui enseignait l'Arithmétique et l'Astronomie de 500 à 550, à Pâtaliputra, l'antique capitale des premiers monarques historiques de l'Inde. Ces leçons se composent de diverses règles de calcul condensées dans trente-trois distiques qui forment pour ainsi dire le programme de son cours. En particulier, les distiques XXI et XXII contiennent les règles que l'on démontre actuellement dans les cours de Mathématiques

(1) *Leçons de Calcul d'Aryabhata,* par M. Léon Rodet. (Extrait du *Journal Asiatique*). Paris, Imprimerie nationale; 1879.

pour la préparation à nos Écoles du gouvernement et dont on se sert couramment dans les arsenaux pour calculer le nombre des boulets d'une pile à base triangulaire ou à base carrée. De plus, le second vers du distique XXII est traduit ainsi : *Le carré de la pile des nombres simples est le volume de la pile des cubes.*

L'Ouvrage en question ne contient aucune méthode, aucune démonstration, aucun indice permettant de faire une restauration ; mais nous devons dire que l'on trouve deux démonstrations de cette dernière proposition dans un Ouvrage de la fin du dixième siècle [1].

LE FAKHRÎ D'ALKARKHÎ,

Il est intitulé : *Al Fakhrî,* traité d'Algèbre composé par Aboû Beqr Mohammed ben Alhaçan, surnommé Alkarkhî, *le Calculateur ;* il est dédié à Aboû Ghâlib Mohammed ben Khalaf, surnommé Fakhr Almoulq, *la Gloire du gouvernement*, vizir de Behâ Aldaoulah, qui mourut le 3 septembre 1016 de notre ère. Le manuscrit qui contient le Fakhrî, et coté 952 au supplément arabe de la Bibliothèque nationale, a été traduit par Wœpcke ; il se termine ainsi : « J'ai exclu de mon présent ouvrage ce qui ne s'y rapporte pas. J'avais désiré y ajouter quelque chose en fait des particularités des figures, du cercle et des testaments. Mais je ne l'ai pas fait pour deux raisons dont l'une est mon aversion pour la prolixité ; la seconde est que j'ai déjà composé sur chacun

(1) D'autre part, M. Maurice Cantor, professeur à l'Université de Heidelberg, a récemment retrouvé cette formule de la sommation des cubes dans l'Ouvrage d'Epaphroditus, qui devait vivre sous l'Empire romain, et peut-être au temps de Trajan (*die römischen Agrimensoren*, p. 117. Leipzig, 1875).

de ces sujets un ouvrage étendu embrassant leurs théories exactes, et la solution des problèmes les plus subtils avec leur méthode. Louanges sans bornes et sans fin à Celui qui donne l'intelligence et qui nous délivre de l'erreur ! Que sa bénédiction soit sur notre Seigneur, Mohammed, le prophète, son élu parmi ses créatures, et sur sa famille et ses compagnons les purs, les saints !

» Ceci fut écrit et achevé par Sâliq le Pauvre. Fin. »

L'étude de la figure renfermée dans ce manuscrit nous a permis de perfectionner la démonstration et de retrouver des procédés probablement fort analogues à ceux dont se sont servis les anciens pour obtenir les règles du calcul concernant le volume des pyramides.

LES NOMBRES EN BAGUETTES.

Prenons des règles d'écolier, de même grosseur, et supposons, pour fixer les idées, que la largeur et l'épaisseur aient un centi-

Fig. 31.

Les nombres simples.

mètre ; portons successivement sur une règle des longueurs égales à 1, 2, 3, 4, 5, ... centimètres et, par quelques traits de scie, coupons cette règle en petits morceaux ; nous figurons ainsi les premiers nombres par ce que l'on appelle des *parallélépipèdes rectangles* (*fig.* 31) ; l'addition de plusieurs nombres se fait en les plaçant bout à bout, et l'on peut ainsi expliquer aux enfants les diverses propriétés de l'addition.

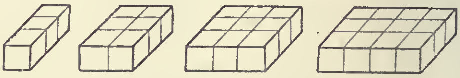
Prenons maintenant deux règles de même longueur, plaçons-les à côté l'une de l'autre et avec de la colle forte réunissons-les, comme ferait un ébéniste, de manière à former une règle plate dont la largeur est double de la hauteur ; portons encore sur cette règle des longueurs égales à 1, 2, 3, 4, ... centimètres, et, par quelques traits de scie, coupons cette règle en petits morceaux ; nous figurons ainsi les *nombres doubles* 2, 4, 6, 8, ... (*fig.* 32).

Fig. 32.

Les nombres doubles.

Avec trois règles accolées et découpées comme nous l'avons fait précédemment, nous représentons les *nombres triples* 3, 6, 9, 12, ... (*fig.* 33).

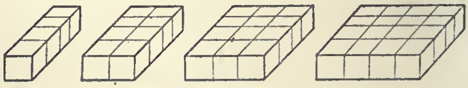
Fig. 33.



Les nombres triples.

Et en accolant 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 règles et découpant comme précédemment nous représenterons les nombres *quadruples, quintuples, sextuples, septuples, octuples, nonuples* et *décuples* (*fig.* 34).

Fig. 34.



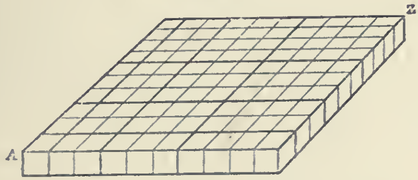
Les nombres quadruples.

TABLE DE MULTIPLICATION DES ARABES.

Par conséquent, nous représentons ainsi les produits des nombres 1, 2, 3, 4, 5. ... respectivement par 1, 2, 3, 4, 5. ..., c'est-à-dire que nous formons la Table de Pythagore. En effet, réunissons bout à bout les nombres simples; plaçons à côté les nombres doubles, et ainsi de suite, nous obtenons pour les quatre premiers nombres la *fig.* 35; c'est la Table de Pythagore rendue matérielle; mais nous pouvons aussi la disséquer, et pour ainsi dire en disloquer tous le éléments. Par suite, en combinant et en assemblant tous les morceaux de diverses manières, nous pouvons obtenir les démonstrations d'un très grand nombre de théorèmes d'Arithmétique élémentaire.

Au lieu de se servir de règles d'écolier, on peut découper une

Fig. 35.



La Table de Pythagore en briquettes.

planchette dont l'épaisseur est égale au côté du petit carré A (*fig.* 35), par des traits de scie représentés par les lignes de l'intérieur du carré. Cette figure est, avec quelques différences peu notables, la reproduction de celle dont nous avons parlé plus haut et que l'on trouve dans le Fakhrî d'Alkarkhî (*fig.* 36). M. le colonel Laussedat a fait construire, sur nos indications, une Table de cette nature, pour les démonstrations des cours publics et

Fig. 36.

5	10	15	20	25
4	8	12	16	20
3	6	9	12	15
2	4	6	8	10
1	2	3	4	5

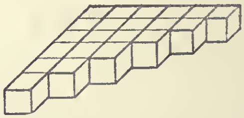
Tirée du Fakhrî.

que l'on trouvera dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers.

LES NOMBRES PYRAMIDAUX A BASE TRIANGULAIRE.

Avec les nombres simples de la première ligne de la Table de

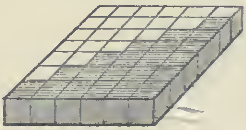
Fig. 37.



Le sixième triangulaire.

multiplication, on peut représenter un nombre triangulaire; ainsi la *fig.* 37 représente le sixième triangulaire; on peut démontrer encore que le double d'un triangulaire (*fig.* 38) est égal à son rang multiplié par le nombre suivant. Mais l'emploi de nos briquettes nous permet d'obtenir des démonstrations nouvelles qu'il serait plus difficile de figurer avec des boules. Nous commencerons par établir la formule qui permet de calculer la somme des triangulaires à partir de l'unité ; c'est aussi le nombre des boulets d'une pile triangulaire. En effet, une telle pile est formée, à la base, de boulets tangents entre eux et dont les cen-

Fig. 38.



Le double triangulaire.

tres sont aux sommets de triangles équilatéraux tous égaux ; par suite, le nombre des boulets de cette base est représenté par le triangulaire dont le rang est égal au nombre des boulets sur chaque côté.

Le second étage est formé de boulets placés dans les interstices des boulets de la base inférieure et forme le triangulaire précédent, et ainsi de suite, de telle sorte que l'étage supérieur est formé par un seul boulet représentant le premier triangulaire.

On appelle *nombre pyramidal* triangulaire le nombre égal à la somme des unités contenues dans tous les triangulaires à partir du premier, qui vaut un, et le rang du pyramidal est égal au rang du dernier des triangulaires dont on a fait la somme. Par suite, il est facile de construire la Table des pyramidaux successifs.

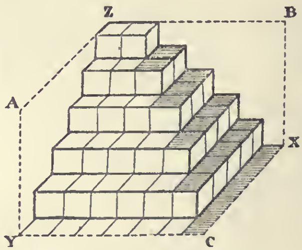
TABLE DES PYRAMIDAUX TRIANGULAIRES.

Unités............	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
Entiers...........	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Triangulaires.....	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
Pyramidaux......	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	...

La ligne qui correspond aux pyramidaux se calcule par additions successives en ajoutant chaque pyramidal au triangulaire placé au-dessus et à droite dans la colonne suivante; ainsi, par exemple, $165 = 120 + 45$. On peut donc, par ce moyen, continuer cette Table aussi loin qu'on le voudra.

Mais comment déterminer directement, sans calculer tous les précédents, un pyramidal triangulaire dont le rang est donné? Pour cela, nous commencerons par doubler tous les triangulaires, en les remplaçant par des rectangulaires (*fig.* 38); plaçons-les par étages successifs, ainsi que nous l'avons fait (*fig.* 39), nous

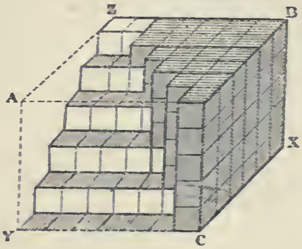
Fig. 39.



Le cinquième pyramidal.

obtenons le double pyramidal qui se trouve ainsi adossé à deux des faces OZAY et OZBX d'un parallélépipède (*fig.* 41). Construisons à côté et dans une même orientation un second double pyramidal égal au précédent; faisons-le tourner d'un quart de tour autour d'une verticale, dans le sens XCY, puis faisons-le basculer d'un quart de tour autour d'une droite parallèle à CX, nous l'amènerons sur le premier. La *fig.* 40 représente l'accolement de ces doubles pyramidaux; on voit tout de suite que le

Fig. 40.



Le sextuple pyramidal.

vide ZAYC du parallélépipède rectangle peut être rempli par un troisième double pyramidal identique.

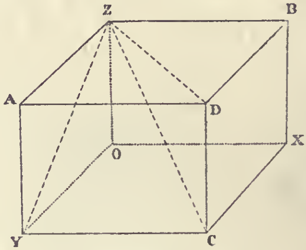
On forme donc ainsi une sorte de tas de pavés, dont il est facile de déterminer le nombre des pavés; la hauteur AY est égale au rang du pyramidal; la largeur CX est égale à ce rang augmenté de l'unité, et la longueur ZB est égale à ce rang plus deux ; on a donc cette propriété :

Le sextuple d'un pyramidal triangulaire est le produit de trois nombres entiers consécutifs et croissants dont le premier est le rang du pyramidal.

Veut-on, par exemple, obtenir le nombre des boulets d'une pile triangulaire dont la base contient 100 boulets sur le côté : il suffit de prendre le $\frac{1}{6}$ de $100 \times 101 \times 102$, ce qui fait 171700 boulets.

La méthode géométrique pour trouver le volume de la pyramide résulte (*fig.* 41) de l'équivalence des trois pyramides ayant

Fig. 41.



Le parallélépipède.

pour sommet commun le point Z et pour bases respectives les trois rectangles ayant pour sommet commun le point C, à savoir CXOY, CXBD, CDAY.

LES PYRAMIDAUX QUADRANGULAIRES.

Une pile de boulets à base carrée est formée, à la base, de boulets tangents entre eux dont les centres sont aux sommets de carrés égaux; par suite, le nombre des boulets de cette base est le carré du côté, le second étage est formé de boulets placés dans les interstices des boulets de la base inférieure et forme le carré précédent, et ainsi de suite, de telle sorte que l'étage supérieur est formé par un seul boulet représentant le premier carré.

On peut former la Table des pyramidaux quadrangulaires comme celle des pyramidaux triangulaires, en ajoutant une ligne à la Table des carrés (*voir* p. 32); mais si l'on veut calculer directement le pyramidal quadrangulaire de rang donné, il suffit de se rappeler que tout carré est égal au triangulaire de même rang augmenté du triangulaire précédent; par suite, on aura cette proposition : *Le pyramidal quadrangulaire est égal au pyramidal triangulaire de même rang, augmenté du pyramidal triangulaire de rang précédent.*

En multipliant par 6 et en se rappelant la formule du triangulaire, et en observant que les parallélépipèdes qui représentent deux sextuples pyramidaux triangulaires consécutifs ont deux dimensions communes qui permettent de les placer bout à bout, on a cette nouvelle proposition :

Le sextuple d'un pyramidal quadrangulaire est le produit de son rang par le nombre suivant, puis par le double de son rang plus un.

Il est facile d'avoir des résultats analogues pour les pyramides polygonales obtenues en étageant successivement les polygonaux d'un même nombre de côtés.

LES PILES DE BOULETS.

Dans les arsenaux, les boulets sont rangés suivant trois sortes de piles. Les *piles triangulaires* ne sont employées que rarement, et seulement pour un petit nombre de projectiles, à cause de l'espace qu'elles exigent; les *piles carrées* ou *quadrangulaires* sont aussi peu usitées, et le plus souvent on emploie les *piles rectangulaires*. Dans ces dernières, la base est un rectangle allongé; l'étage au-dessus est formé de boulets en rectangle dont les côtés sont plus petits d'une unité que les côtés du rectangle de base, et ainsi de suite, de telle sorte que l'étage supérieur est formé d'une seule file de boulets.

Pour déterminer le nombre des boulets de cette pile, on la décompose facilement en deux autres, une pile à base carrée, et un prisme dont les boulets sont disposés comme dans la pile d'obus.

Il est facile de retenir les diverses formules qui servent à calculer les boulets des quatre piles que nous avons considérées, en les condensant dans une formule simple qui s'applique à toutes :

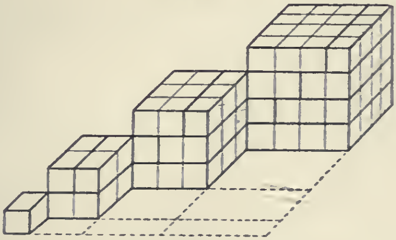
Le nombre des projectiles d'une pile d'obus, d'une pile triangulaire, d'une pile quadrangulaire ou d'une pile rectangulaire, est égal au nombre triangulaire qui représente le nombre des boulets d'une face triangulaire par le tiers du nombre des projectiles contenus dans l'ensemble de trois files parallèles partant des sommets de la face considérée.

En Géométrie, on retrouve le théorème correspondant pour le volume du prisme triangulaire, de la pyramide à base triangulaire ou carrée, et du prisme tronqué. C'est encore un exemple de l'analogie des formules concernant simultanément la science des nombres et la science de l'étendue.

LA PILE DES CUBES.

Nous démontrerons maintenant le théorème d'Aryabhata, dont il est parlé au commencement de cette Récréation, sur la pile des cubes. Reprenons la Table de Pythagore (*fig.* 35) et rangeons les briquettes par étages successifs, sur les nombres carrés de la Table qui sont placés sur la diagonale AZ. En prenant pour chaque carré de base les briquettes placées à la gauche dans la même rangée, et au-dessous dans la même colonne, on reconnaît facilement que l'on forme ainsi les cubes successifs de 1, 2, 3, 4, ...

Fig. 42.



La pile des cubes.

de côté (*fig.* 42); mais, d'autre part, le côté de la Table renferme un nombre d'unités égal au triangulaire; par suite, et en conservant la forme de l'énoncé d'Aryabhata, *la pile des cubes est le carré de la pile des nombres.*

QUATRIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DES MÉRELLES AU XIII^E SIÈCLE.

« En ce moyen entra en affection d'icelle science numérale, et tous les jours après disner et souper y passoit temps aussi plaisantement qu'il souloit es dez ou es chartes. »

(RABELAIS. — *Gargantua.*)

QUATRIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DES MÉRELLES AU XIII^e SIÈCLE.

La Bibliothèque de l'École de Médecine de Montpellier possède un curieux manuscrit in-8° sur vélin, qui a pour titre [1]:

Livre du jeu d'Escheis, tables et des merelles et sapelle le dict liure Bacot inuenté par Nembrot qui fonda la tour de Babylone.

M. de Fontenay, receveur principal des postes en retraite, a bien voulu nous adresser une copie de ce manuscrit pour ce qui concerne les parties de *merelles;* c'est d'après ce travail que nous présenterons à nos lecteurs l'un des jeux favoris de nos ancêtres.

Ce manuscrit du XIII^e siècle, sans nom d'auteur, débute ainsi :

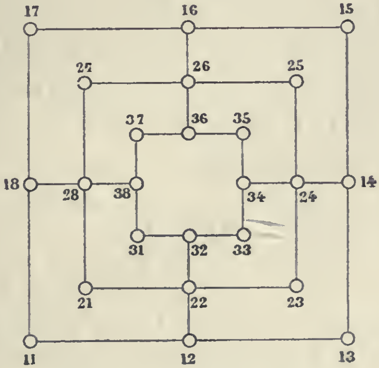
(1) *Récréations mathématiques*, t. II, p. 99.

CHI COMMENCHE
li liures de par
tures des Esches. et de
Tables et de Merelles
et se claime cis liures
Bakot et le trouva
Nebron le ioiant qui fist premiers en Babylone
la tour qu'on claime Babel. ou li langage furent
mue par la volente nostre Segneur. qui vit lor
outre cuidanche. et de la fu Bakot aportés a
troie la grant. et de troie en gresse. Après
la destruction de
troie et de gresse
vint en franche
et encore i est.
∞ ∞ ∞ ∞ ∞
∞ ∞ ∞ ∞ ∞

Ce volume contient 206 parties d'échecs, 48 parties de Tables (tric-trac) et 28 parties de marelles, avec autant de figures. Nous ne nous occuperons que de ces dernières qui se rapportent à l'une des dispositions que nous avons appelée *Marelle triple*.

Elle est représentée dans la *fig*. 43; elle se compose de vingt-quatre cases réunies trois à trois par des lignes droites. Chacun des joueurs prend neuf pions, les uns blancs, les autres noirs, et les place alternativement sur les cases. Quand tous les pions sont posés, chacun des joueurs, à tour de rôle, peut les faire glisser sur une case immédiatement voisine, à la condition de suivre l'une des lignes tracées sur la figure. Le but est de faire un *terne*, c'est-à-dire d'amener, soit en posant, soit en poussant, trois pions sur une même ligne droite. Lorsque l'un des joueurs y parvient,

Fig. 43.



Notation de la Marelle triple.

il prend un pion à son choix dans le jeu de son adversaire qui continue la partie à son tour. Lorsque l'un des joueurs n'a plus que quatre pions, il peut leur faire franchir, sur une même ligne droite, la station intermédiaire inoccupée; il peut aussi, suivant convention, sauter sur une case vide quelconque.

Nous donnons ci-dessous les diverses parties de l'auteur. Toutes les parties du manuscrit sont figurées en deux couleurs; les pions (ou *mérelles*) sont représentés par des signes différents, tels que la *Croix*, l'*Étoile*, la *Lune* ou *Croissant*, l'*Écu*, le *Carré*, la *Ronde*, etc. C'est probablement à cause de ces dénominations diverses que les commentateurs ont pensé que les règles de ce jeu étaient différentes des règles actuelles; mais on pourra se convaincre qu'il n'en est rien. Nous engageons le lecteur à étudier chaque partie, la *mérelle* à la main, ainsi que je l'ai fait moi-même avec mon ami Delannoy.

Nous désignerons chacune des cases par deux chiffres, le premier chiffre distingue par 1, 2, 3, les trois carrés de l'extérieur à l'intérieur; le second chiffre indique pour chaque carré, de 1 à 8, à partir d'un coin, le rang de chaque case sur le périmètre du carré, en tournant toujours dans le même sens. Avec un peu d'habitude, on peut retenir de mémoire la place et le numéro de chacune des vingt-quatre stations.

Problème I. — *Blancs :* 11, 16, 17, 22, 23, 32.
Noirs : 25, 27, 34, 36, 38.

Les blancs jouent en premier et, par convention, leur pion 11 *est seul mobile, et s'il est enfermé, ils ont perdu. — Partie nulle.*

Les blancs jouent 11 en 12, font terne et prennent 36; les noirs, de 38 en 37. — Blancs, de 12 en 13; noirs, de 34 en 35, sinon ils perdraient la partie. — Si les blancs revenaient de 13 en 12 pour former un terne, ils prendraient l'un des quatre pions noirs 25, 27, 35, 37, mais perdraient la partie, attendu que les noirs feraient terne en deux coups; mais les blancs jouent 13 en 14. Un joueur inhabile pourrait penser que les noirs ont perdu; ceux-ci perdraient, en effet, en jouant sur 36, car les blancs feraient terne de 14 en 15, enlèveraient le pion noir 36 et reformeraient le même terne en deux coups; mais les noirs jouent 25 en 24. — Si les blancs faisaient terne de 14 en 15, ils seraient obligés de prendre le pion 24, sinon ils seraient enfermés; alors les noirs feraient un terne en deux coups par 27 en 26 et 36, et gagneraient la partie; mais les blancs reviennent en 13. Pour annuler la partie, les noirs jouent 24 en 25 et l'on retrouve une position précédente.

Cependant si le pion blanc 23 n'existait pas au début de la partie, les noirs gagneraient. En effet, ils remplacent alors leur dernier coup par 24 en 14. Les blancs, obligés de faire un terne, prennent nécessairement 27, car autrement les noirs feraient terne en deux coups. — Les noirs jouent 14 en 13 et font reculer le seul pion blanc mobile en 11, et finissent par l'enfermer sur l'une des cases du carré intérieur. Mais cette tactique ne vaudrait rien pour les noirs, si le pion 23 existait, car les blancs viendraient faire un terne en 21 en passant par 18 et 28.

PROBLÈME II. — *Blancs :* 14, 16, 25, 36.
Noirs : 11, 13, 22, 27, 31, 33.

Le trait aux blancs; par convention, le pion 14 *ne peut être déplacé qu'une seule fois. — Partie nulle, si les deux adversaires jouent correctement.*

Les blancs jouent 25 en 26 et prennent 22; noirs, 27 en 28. — Blancs, 26 en 25; noirs, 31 en 32. — Blancs, 25 en 26 et prennent 32; noirs, 28 en 21.

Si les blancs jouaient le pion 26, ils perdraient, car le pion noir 33 viendrait en 32 et, quelque pion que prissent les blancs, les noirs feraient ensuite terne les premiers. Les blancs joueront donc 16 en 17, et les noirs 33 en 32.— Blancs, 14 en 15, ce pion ne pourra plus se mouvoir; noirs, 21 en 22. — Blancs, 26 en 16 et prennent 22 ; noirs, 32 en 22. — Blancs, 36 en 26, sinon ils perdraient; si les noirs prennent, ils ont perdu; il en est de même s'ils jouent le pion 13. Ils joueront donc 11 en 18. — Blancs, de 26 sur une case voisine; noirs, 22 en 12. Ces deux coups doivent être joués indéfiniment. Celui des joueurs qui prendrait perdrait la partie.

Il y a beaucoup de joueurs qui font cette partie sans le pion blanc 14, et alors les noirs gagnent.

Problème III. — *Blancs :* 35, 36, 38.
Noirs : 16, 17, 18, 21, 23, 32.

Les blancs jouent et gagnent.

Les blancs jouent 38 en 37, font terne et prennent 23 ; noirs, de 16 en 26.— Blancs, de 37 à 38; noirs, de 22 à 21. — Les blancs jouent 38 en 37, font terne et prennent 21. — Puis les blancs font la navette de 35 à 34 et de 34 à 35 et gagnent la partie.

L'auteur fait observer que « cette parture est commune et soutive ». En effet, si les blancs prenaient un pion autre que 23 et 21, ils perdraient.

Problème IV. — *Blancs :* 35, 36, 38.
Noirs : 12, 16, 17, 18, 21, 23.

La position initiale de cette partie ne diffère de la précédente que par le déplacement d'un pion noir de 32 en 12. — Les blancs jouent et perdent.

Les blancs jouent 38 en 37, font terne et prennent 12; noirs, de

23 à 24. — Les blancs jouent un coup quelconque; les noirs, de 21 à 22. — Les blancs font terne et sont obligés de prendre 17, sinon les noirs feraient terne en deux coups par 11 et 17 ou 15 et 17; noirs, de 24 à 14. — Les blancs jouent un coup quelconque; les noirs jouent de 22 à 12 et occupent les milieux des quatre côtés 12, 14, 16, 18 du carré extérieur. — Les blancs font terne, mais perdent la partie.

Problème V. — *Blancs :* 12, 22, 31, 33.
Noirs : 16, 26, 35, 37.

Les noirs ont le trait; mais le pion 35 est supposé immobile. — Partie nulle.

Les noirs jouent de 26 à 36, font terne et prennent 22; blancs, de 12 à 22. — Noirs, de 16 à 26, sinon les blancs feraient terne et gagneraient; blancs, de 31 à 38, car s'ils faisaient terne, ils perdraient en deux coups. — Noirs, de 26 à une case voisine; blancs, de 38 à 31; on retrouve une position précédente et la partie est nulle.

Si le pion 35 était mobile, les noirs gagneraient la partie.

Problème VI. — *Blancs :* 12, 22, 31, 32, 33,
Noirs : 16, 26, 35, 36, 37.

Les noirs ont le trait; mais le pion 35 est supposé immobile. — Partie nulle.

Les noirs jouent de 26 à 25; les blancs, de 22 à 23. — Les noirs, de 25 à 26, font terne et prennent 23; blancs, de 32 à 22. — Noirs, coup quelconque; les blancs, de 22 à 32, font terne et prennent un pion noir autre que 35. — On est ramené à la partie précédente.

Problème VII. — *Blancs :* 31, 32, 33.
Noirs : 16, 25, 26, 27, 36, 37.

Par convention, la partie est gagnée par le joueur qui fait terne le premier, et les blancs et les noirs peuvent sauter sur une case vide quelconque. — Les blancs jouent et gagnent.

Les blancs jouent de 31 en 35; les noirs, en 34 ou 31. — Les blancs de 35 en 31 ou 34 font terne, et par conséquent, gagnent.

« Cette partie est de peu de valeur, dit l'auteur; toutefois, elle pourrait bien, par hasard, valoir contre quelques-uns. »

Problème VIII. — *Blancs :* 12, 21, 22, 23, 32.
Noirs : 16, 25, 27, 36.

Les noirs ont le trait et perdent la partie, même en supposant que les pions blancs 21 et 23 sont immobiles.

Noirs, de 16 en 26, font terne et prennent 22; blancs, de 12 ou de 32 en 22 et prennent 16. — Noirs, de 36 en 26, font terne et ont perdu, quel que soit le pion qu'ils prennent.

Problème IX. — *Mêmes positions que dans la partie précédente; les pions blancs 12 et 32 sont immobiles. Les noirs ont le trait et gagnent.*

Noirs, de 25 en 24; blancs, de 21 à 28. — Noirs, de 27 à 26, font terne et prennent 23 ; blancs, de 28 à 21 ou de 22 à 23. — Dans le premier cas, noirs de 24 à 23, et gagnent la partie. Dans le second cas, noirs de 26 à 27; les blancs font terne et prennent l'un des quatre pions noirs, ou bien jouent de 28 à 21. — Noirs font terne, prennent l'un des pions blancs immobiles et gagnent la partie.

PROBLÈME X. — *Blancs :* 11, 22, 32.
Noirs : 15, 16, 17, 26.

Les pions noirs 15 et 17 sont supposés immobiles. Les blancs ont le trait et gagnent la partie.

Si les blancs faisaient terne avec le pion 11, ils perdraient, quelque pion qu'ils prissent. Ils joueront de 22 à 21 ; noirs, de 26 à 36. — Blancs, de 11 à 12 ; noirs, de 36 à 26.

Les noirs sont obligés de jouer indéfiniment ces deux mêmes coups, sinon ils perdraient immédiatement. Les blancs jouent successivement de 32 à 22, de 22 à 23, de 21 à 28, de 12 à 22, de 28 à 27, de 27 à 26 ; ils finissent par enfermer le pion noir 16, ils font terne et gagnent la partie.

PROBLÈME XI. — *Blancs :* 12, 22, 31, 33.
Noirs : 16, 25, 26, 27, 36.

Les blancs ont le trait. Les noirs gagnent la partie, même en supposant que leurs pions 25 et 27 sont immobiles.

Blancs, de 22 à 32, font terne et prennent 26 ; noirs, de 16 à 17.

Quel que soit alors le coup joué par les blancs, les noirs font terne en portant 36 en 26 et prennent un pion tel qu'ils puissent, sans remuer 26, ramener 17 en 16 au moment où les blancs sont sur le point de faire terne. Quel que soit le pion que prennent alors ces derniers, ils perdent la partie.

Si, au début, les blancs avaient joué de 31 à 32 et pris 26, les noirs auraient fait terne et pris 31. Les blancs auraient fait terne de nouveau, pris un pion quelconque et perdu la partie.

Problème XII. — *Blancs :* 12, 21, 23, 32.
Noirs : 16, 25, 26, 27, 36.

Le joueur qui a le trait perd la partie.

L'auteur engage à dire à l'adversaire : « Choisis la couleur que tu veux et joue le premier, ou bien laisse-moi choisir et jouer (bien qu'on ne désire pas qu'il accepte cette dernière offre); il choisira plus hardiment et perdra la partie, comme tu peux le voir par toi-même. »

Problème XIII. — *Blancs :* 12, 21, 22, 32.
Noirs : 31, 33, 34, 36, 38.

Comme dans le problème précédent, le joueur qui a le trait perd la partie; il est facile de le vérifier.

Problème XIV. — *Blancs :* 12, 21, 23, 32.
Noirs : 26, 31, 33, 34, 36, 38.

Les blancs ont le trait et gagnent la partie.

Les blancs, de 21 à 22, font terne et prennent 26. On retombe sur la partie précédente, et les noirs perdent parce qu'ils sont forcés de jouer les premiers.

Les blancs auraient perdu s'ils avaient pris 36, car les noirs auraient joué 26 en 36. Les blancs auraient été obligés de ramener 22 en 21 ; les noirs auraient fait terne, pris 32 et gagné la partie.

PROBLÈME XV. — *Blancs :* 21, 22, 23.
Noirs : 15, 16, 17, 26, 27, 36.

Les pions peuvent sauter où ils veulent, et le joueur qui fait terne le premier gagne la partie. Les blancs ont le trait et gagnent.

Blancs jouent de 21 à 25 et font forcément terne au coup suivant.

Ce problème ne diffère du septième que par la position des pions. La solution est la même dans les deux cas.

PROBLÈME XVI. — *Blancs :* 11, 12, 18, 26, 35, 36.
Noirs : 14, 25, 34.

Les noirs ont le trait et perdent la partie.

Noirs, de 25 à 24, font terne et prennent 26; blancs, de 12 à 13. — Noirs, de 24 à 25; blancs, de 36 à 26. — Noirs, de 25 à 24, font terne et prennent 11 ou 18; blancs, de 26 à 25. — Les noirs jouent un pion quelconque; les blancs prennent la case abandonnée par les noirs, assemblent leurs pions, font terne et gagnent la partie.

Problème XVII. — *Blancs :* 11, 12, 13, 22, 28.
Noirs : 14, 17, 26, 36.

Les noirs ont le trait. — Partie nulle.

Noirs, de 14 à 24; blancs, de 28 à 27. — Noirs, de 24 à 21; blancs, de 27 à 28, et ainsi indéfiniment.

Le joueur qui joue autrement perd la partie. Si, par exemple, les blancs jouaient de 28 à 21, les noirs joueraient de 24 à 25, puis feraient terne et gagneraient en prenant convenablement. « Étudie cette partie par toi-même, dit l'auteur, car elle est forte et belle. » Elle présente, en effet, un grand nombre de combinaisons, quand l'un des joueurs cesse de jouer les deux coups primitifs, et la moindre faute suffira pour faire perdre le joueur qui aurait dû gagner.

Problème XVIII. — *Blancs :* 12, 14, 16, 18, 36.
Noirs : 21, 22, 32, 34.

Les noirs ont le trait. — Partie nulle.

Noirs, de 32 en 33; blancs, de 36 en 35. Si les noirs retournent à leur place primitive, les blancs font de même, et ainsi de suite indéfiniment.

Si les blancs avaient joué de 36 à 37, les noirs joueraient 34 en 35. — Les blancs n'auraient rien de mieux à faire que de ramener 35 en 34. Les noirs feraient terne et gagneraient la partie.

La position des pions doit être erronée. Nous ne nous expliquons pas la manière de jouer indiquée par l'auteur. Il nous semble que les blancs auraient dû faire terne en deux coups sur une des lignes extérieures et auraient gagné la partie.

PROBLÈME XIX. — *Blancs :* 12, 21, 23, 32.
Noirs : 11, 13, 15, 17, 26, 31, 26.

Les blancs ont le trait et gagnent la partie.

Il faut pour cela que, après avoir fait terne avec 13, ils prennent 15 ou 17.

Si les blancs prenaient 26, les noirs gagneraient, car ils joueraient 36 en 26; les blancs reviendraient de 32 à 33. Les noirs feraient terne et prendraient 12; les blancs feraient terne en allant de 32 à 22 et prendraient 16. Alors les noirs iraient de 15 à 14, puis de 31 à 38 et gagneraient en deux coups, quel que fût le pion pris par les blancs.

PROBLÈME XX. — *Blancs :* 12, 14, 22, 23, 32, 34.
Noirs : 16, 25, 27, 36.

Les noirs ont le trait et perdent la partie.

Noirs, de 27 à 26, font terne et prennent 23; blancs, de 34 à 33. — Noirs, de 26 à 27; blancs, de 14 à 13.

Noirs, de 27 à 26, font terne, prennent un pion quelconque et perdent la partie.

PROBLÈME XXI. — *Blancs :* 13, 14, 16, 26, 36.
Noirs : 11, 12, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Les blancs ont le trait et gagnent la partie.

Blancs, de 16 à 15, font terne et prennent 11; noirs, de 12 à 11. — Blancs, de 13 à 12; noirs, un coup quelconque. Les blancs ramènent 12 en 13, font terne et prennent un pion tel que les noirs ne puissent faire terne en un coup; noirs, un pion quelconque. Blancs, de 15 à 16, font terne, prennent un pion convenable et finissent par gagner en prenant un pion à chaque coup.

Si, au commencement, il y avait eu un pion blanc en 15 au lieu de 16, les blancs auraient perdu.

Problème XXII. — *Blancs :* 16, 25, 36.
Noirs : 22, 23, 27.

Les noirs ont le trait. — Partie nulle.

Noirs, de 27 à 26; blancs, de 25 à 24. — Noirs reviennent de 26 à 27; blancs, de 24 à 25, et ainsi indéfiniment.

Si les noirs, après le premier coup, avaient cherché à faire marcher 22, puis 23 vers le pion 27 pour faire terne, les blancs l'auraient fait avant eux et auraient gagné la partie.

Problème XXIII. — *Blancs :* 16, 33, 34, 36.
Noirs : 11, 12, 13, 32.

Les blancs ont le trait et gagnent la partie.

Blancs, de 16 à 15; noirs, de 12 ou de 32 à 22. — Blancs, de 36 à 35, font terne et prennent 22; les noirs jouent en 22. — Blancs, de 15 à 14; noirs font terne, prennent un pion quelconque et perdent la partie, les blancs faisant terne en deux coups.

La manière de jouer eût été analogue si, au début, il y avait eu un pion blanc en 26 au lieu de 16.

PROBLÈME XXIV. — *Blancs :* 13, 23, 33,
Noirs : 14, 24, 34.

Les noirs ont le trait et perdent la partie.

Quel que soit le pion joué par les noirs, le pion blanc correspondant le suit. Ainsi, les noirs allant de 34 à 35, les blancs jouent de 33 à 34. Quoi que fassent les noirs, les blancs iront de 23 à 22, puis de 13 à 12 et gagneront la partie.

Si, au début, il y avait eu un pion blanc en 25 au lieu de 23, les blancs auraient encore gagné. Ils auraient occupé la case abandonnée par les noirs, puis amené leurs deux autres pions en 35 et en 15 et auraient gagné avant que les noirs fussent parvenus à faire terne.

PROBLÈME XXV. — *Blancs :* 15, 17, 25, 26, 27,
Noirs : 12, 21, 22, 23, 32.

Les blancs ont le trait, et, par convention, leur pion 26 est seul mobile. Ils gagnent la partie.

Blancs, de 26 à 36; noirs, de 21 à 28. — Blancs, de 36 à 26, font terne et prennent 23. Après quoi le pion blanc qui est en 26 prendra à tout coup et les blancs gagneront.

Si les noirs avaient joué le pion 32 au lieu du pion 21, les blancs auraient pris 12 et auraient encore gagné.

PROBLÈME XXVI. — *Blancs :* 16, 25, 36,
Noirs : 11, 13, 22, 27, 31, 33.

Les blancs ont le trait et perdent la partie.

Blancs, de 25 à 26, font terne et prennent 22; noirs, de 27 à 28. — Blancs, de 26 à 25; noirs, de 31 à 32. — Blancs font terne et prennent 32; noirs, de 28 à 21. — Blancs, de 26 à 25; noirs, de 33 à 32. — Blancs font terne, prennent un pion quelconque et perdent la partie, les noirs faisant terne en deux coups.

Problème XXVII. — *Blancs :* 11, 22, 32,
Noirs : 15, 17, 26, 35, 37.

Les blancs ont le trait. Les pions blancs 22, 32 et les pions noirs 35 et 37 sont supposés immobiles. Les noirs gagnent la partie.

Blancs, de 11 à 12, font terne et prennent 26; noirs, de 15 en 14. — Blancs, de 12 à 11; noirs, de 17 à 18.

Les blancs font terne et prennent un pion quelconque.

Les noirs jouent en 11 ou en 13 et finissent par faire terne ou par enfermer en 36 le pion blanc mobile.

Problème XXVIII. — *Huit pions de même couleur sont placés sur les cases 11, 13, 15, 17, 22, 24, 26, 28. Faire six ternes en six coups et enlever un pion après chaque terne, de manière qu'il ne reste plus que deux pions.*

De 28 à 18, on prend 18. — De 26 à 16, on prend 17.

De 24 à 14, on prend 15. — De 16 à 15, on prend 15.

De 22 à 12, on prend 13. — De 14 à 13, et l'on prend un quelconque des trois derniers pions.

Pour donner une idée de la manière assez obscure de l'auteur, nous reproduirons le dernier problème selon le manuscrit.

Après la figure qui indique les positions des huit pions, on trouve ce qui suit :

Ceste pture est tele q tu vois et samble q'li ait mout petit a faire. Mais cex le cuideroit faire q'i faudroit, fai por une VI *fois et en prent cascun coq une pq°* I, *il ne demeure q deuz. pren celi de qoi tu fais por une au p'mier cop. apres pren selonc ce q tu jues. car ie ne quier plus deviser.*

Explicit des pt'ures des Merelles.

CINQUIÈME RÉCRÉATION.

—

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT.

« Les géomètres, sans s'épuiser en principes sur la logique et n'ayant que le sens naturel pour guide, parviennent, par une marche toujours sûre, aux vérités les plus détournées et les plus abstraites; tandis que tant de philosophes, ou plutôt d'écrivains en philosophie, paraissent n'avoir mis à la tête de leurs ouvrages de grands traités sur l'art du raisonnement que pour s'égarer ensuite avec plus de méthode, semblables à des joueurs malheureux qui calculent longtemps et finissent par perdre. »

(D'ALEMBERT.)

CINQUIÈME RÉCRÉATION.

—

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT.

On appelle *carré magique* l'ensemble de nombres égaux ou inégaux placés dans les cases d'un carré de telle sorte que la somme des nombres renfermés dans chacune des lignes, des colonnes et des diagonales soit toujours la même et égale à un nombre fixe appelé la *constante* du carré.

Autrefois, on ne considérait que les carrés magiques formés par la suite des nombres entiers consécutifs ; mais on a dû amplifier cette définition à cause de la question des carrés dits à *enceintes*. Dans une lettre bien connue de Fermat à Mersenne, on trouve un carré incomplet de ce genre avec 144 cases remplies par Fermat ; mais « parce que le temps me manque, écrit-il, je diffère à vous envoyer les cinq enceintes qui manquent, pour parfaire le carré entier de 22, jusqu'au départ du prochain courrier. Après cela, vous devez croire que, dès que j'aurai le loisir, j'irai aussi avant sur ce sujet qu'il est possible. » Nous donnerons plus tard la restauration complète de ce carré ; cette restitution, qui portait sur la recherche de 340 nombres, a été faite d'une manière fort remarquable par M. V. Coccoz, commandant d'artillerie en retraite; mais nous espérons plus et donner le nombre des solutions du problème d'après les indications de Fermat.

Nous ferons observer que la plupart des auteurs qui ont écrit sur les carrés magiques, et ils sont nombreux, paraissent s'être trompés en ne considérant la question qu'au point de vue arithmétique; c'est, avant tout, une question d'algèbre pure. Il s'agit de trouver pour le carré de quatre, par exemple, seize nombres assujettis à dix conditions: quatre pour les lignes, quatre pour les colonnes, et deux pour les diagonales. On pourrait donc appliquer les méthodes ordinaires de la discussion d'un système d'équations du premier degré et exprimer les inconnues en fonction de six d'entre elles. Mais on voit immédiatement que les conditions du problème ne sont pas distinctes, et que l'une d'elles est la conséquence des neuf autres. En effet, lorsque l'on a imposé aux seize nombres les conditions telles que la somme des quatre lignes et des trois premières colonnes soit la même, il est bien évident qu'il en est ainsi de la quatrième colonne. Mais, si l'on supprime cette condition, le problème devient dissymétrique, pour ainsi dire, et fort difficile à résoudre par les procédés ordinaires. Si l'on traite la question des carrés magiques par la théorie des déterminants ou par la résolution algébrique des équations suivant la méthode ordinaire, on est conduit à d'énormes calculs. C'est peut-être la première marche suivie par Fermat lorsqu'il écrit dans une autre lettre à Mersenne que les inventions de Frénicle le ravissent, et qu'il désirerait connaître quelques-unes de ses méthodes, en avouant que les siennes, pour le sujet des carrés magiques, comme pour d'autres, conduisent à de grands calculs.

Quoi qu'il en soit, la théorie complète des carrés magiques paraissait une énigme dont on devait attendre longtemps encore la solution, lorsque nous avons eu le bonheur de mettre la main sur des manuscrits originaux et inédits de Fermat; ces manuscrits se composent de quatorze cahiers et de feuillets détachés. La présente Récréation a pour but de montrer la marche suivie par Fermat dans la formation des carrés pairs, d'après l'étude des dessins et des carrés du manuscrit. La méthode est loin d'être développée; chaque page contient quelques dessins faits d'un trait de plume et des carrés magiques avec des lettres, presque toujours, et quelquefois des chiffres. Au-dessous, une ou deux lignes indiquant par le signe ∞ ou *æq* l'égalité de nombres compris dans les cases indiquées et réunies par un trait sur le dessin; puis le nombre des solutions pour chaque dessin et pour chaque carré. Nous avons cherché à reproduire aussi fidèlement que possible la pensée de notre auteur favori; mais, pour la rendre intelligible à tous ceux qui s'occupent, aux heures de loisir, des questions de cette nature, nous l'avons rendue aussi élémentaire que possible, puisqu'il suffit, pour la comprendre, de connaître les quatre premières règles de l'Arithmétique. Le lecteur admirera l'art merveilleux et incomparable avec lequel l'illustre génie qui surpassa tous les géomètres de l'antiquité et que nul n'a surpassé depuis, a su se débarrasser de tous les calculs.

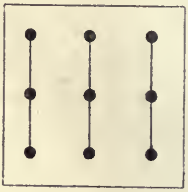
LES CARRÉS MAGIQUES DE TROIS.

On peut placer les neuf premiers nombres dans les cases d'un carré conformément au tableau (*fig.* 44); cette figure possède les propriétés suivantes :

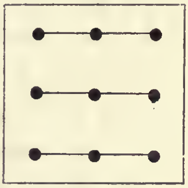
Fig. 44.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

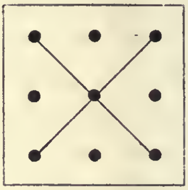
Carré de trois.



Colonnes.



Lignes.



Diagonales.

Les carrés de trois.

1° La somme des nombres renfermés dans une même colonne est égale à quinze pour chacune des trois colonnes;

2° La somme des nombres renfermés dans une même ligne est encore égale à quinze pour chacune des trois lignes ;

3° La somme des nombres renfermés dans chacune des deux diagonales est encore égale à quinze.

On dit que cette figure est un *carré magique de trois;* on peut réaliser cette figure avec les neuf premières boules du jeu de loto ou encore avec les dés d'un jeu de dominos dont les ensembles de points représentent successivement les neuf premiers nombres, ou encore avec les cartes de même couleur, depuis l'as jusqu'au neuf d'un jeu de whist.

LA ROTATION ET LA SYMÉTRIE.

Si l'on fait tourner le carré magique (*fig.* 44) d'un quart de tour autour de son centre, il reste magique : car les lignes de-

Fig. 45.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

La rotation des carrés magiques.

viennent les colonnes, les colonnes deviennent les lignes et les deux diagonales s'échangent l'une dans l'autre. On se rend mieux compte encore de cette propriété en faisant tourner les figures. En continuant le mouvement, il en est de même; par suite, la rotation d'un carré magique en donne trois autres. Nous avons représenté (*fig.* 45) les quatre carrés qui se déduisent les uns des autres par rotation.

Séparons les lignes horizontales de l'un quelconque des quatre

Fig. 46.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

La symétrie des carrés magiques.

carrés que nous venons d'obtenir et, au lieu de les supposer dans l'ordre de haut en bas, plaçons-les dans l'ordre de bas en haut, nous obtenons encore (*fig.* 46) quatre carrés magiques.

Ainsi tout carré magique donne huit solutions distinctes, parce que tous les nombres du carré sont inégaux entre eux deux à deux. Mais on a amplifié la définition des carrés, et, dans cette définition plus générale, on ne suppose pas qu'il soit nécessaire de prendre des nombres consécutifs à partir de un, ni des nombres tous distincts. Nous représentons (*fig.* 47) des carrés magiques contenant plusieurs nombres égaux ; les principes de rotation et de symétrie ne donnent plus que quatre solutions distinctes au lieu de huit.

Enfin, si tous les nombres du carré sont égaux, il n'y a plus

Fig. 47.

4	1	4
3	3	3
2	5	2

4	3	2
1	3	5
4	3	2

2	5	2
3	3	3
4	1	4

2	3	4
5	3	1
2	3	4

Carrés magiques à nombres égaux.

qu'une seule solution ; il est d'ailleurs facile de voir que tout carré de trois donne 1, 4 ou 8 solutions, et jamais plus.

LES CARRÉS MAGIQUES DE QUATRE.

Écrivons les seize premiers nombres suivant l'ordre naturel, dans les seize cases d'un carré de quatre (*fig.* 48) ; lorsque nous désignerons plus tard une case par un numéro, ce sera toujours par le nombre correspondant de cette figure.

Échangeons entre eux les huit nombres qui se trouvent placés deux par deux sur les cases représentées par les boules noires opposées (*fig.* 49), nous obtenons ainsi le carré magique de la *fig.* 50. On trouve ce carré dans Fermat et dans le Mémoire de Frénicle dont il est parlé plus loin, avec l'indication du pro-

Fig. 48.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 49.

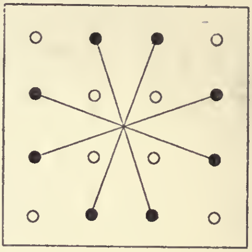


Fig. 50.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

cédé qui sert à le construire. Mais, si l'on place toutes les lignes dans l'ordre inverse, on obtient, par symétrie, le carré magique qui se trouve représenté sur la célèbre gravure *Melencholia* d'Albert Dürer, burinée en 1514; la date de cette gravure est d'ailleurs indiquée par les deux nombres 15 et 14 de la ligne inférieure.

DE L'ADDITION ET DE LA MULTIPLICATION DES CARRÉS.

Les carrés magiques se prêtent à diverses transformations générales évidentes :

1° Un carré reste magique si l'on augmente ou si l'on diminue tous les éléments d'une même quantité; en les diminuant de leur moyenne arithmétique, c'est-à-dire du quotient de leur somme par leur nombre, on peut supposer la constante nulle ; on introduit ainsi des éléments négatifs, mais cet inconvénient est compensé par la simplification des calculs ;

2° Un carré reste magique lorsque l'on multiplie ou que l'on divise tous les nombres par une même quantité ;

3° En ajoutant les nombres des cases correspondantes de deux carrés magiques, on obtient encore un carré magique; dans le cas où les carrés ne sont pas de même grandeur, mais de même parité, on peut border le plus petit de quatre, huit, douze, ... rangées en plaçant des zéros ou des nombres égaux dans les cases ajoutées.

Mais ces transformations altèrent, dans le cas général, les éléments du carré; voici une transformation qui conserve les mêmes nombres lorsque ceux-ci sont complémentaires deux à deux, c'est-à-dire tels que si on les range par ordre de grandeur et si on les désigne par

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ d',\ c',\ b',\ a',$$

somme des nombres placés à égale distance des extrêmes soit constamment la même. Ainsi, l'on suppose

$$a + a' = b + b' = c + c' = d + d' = \ldots = s.$$

En effet, considérons un carré magique quelconque formé avec de tels nombres, et remplaçons l'un par l'autre chaque nombre complémentaire. Les éléments d'une même ligne, d'une même colonne ou d'une même diagonale se trouvent remplacés par leurs compléments, et ainsi

$$o,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots$$

par

$$s-o,\quad s-p,\quad s-q,\quad s-r,\quad \ldots;$$

la somme de chaque rangée n'est donc pas altérée.

Nous devons faire observer que cette méthode de transformation, que nous appellerons méthode par complément, ne donne pas toujours de nouveaux carrés; ainsi, en l'appliquant à la *fig.* 50, on retrouve un carré que l'on pourrait obtenir par rotation et par symétrie. On se rendra facilement compte du résultat pour tout carré en joignant par des droites les centres des cases contenant les nombres complémentaires et en regardant si le dessin obtenu est ou n'est pas symétrique par rapport au centre ou aux médianes du carré.

En prenant quatre nombres a, b, c, d tels que

$$a+d=b+c.$$

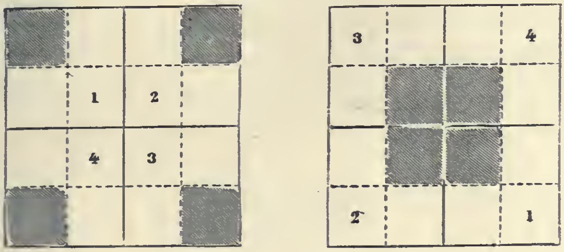
on dit que ces nombres forment une *équidifférence,* et lorsque l'on prend au hasard les deux premiers a et b, on obtient toujours une *équidifférence* en les augmentant tous deux d'un même nombre quelconque; si l'on augmente maintenant les quatre nombres a, b, c, d d'une même quantité, on forme une nouvelle équidifférence e, f, g, h.

Les méthodes de Fermat pour le carré de quatre s'appliquent ainsi à huit nombres a, b, c, d, e, f, g, h formant une double équidifférence, et à huit nombres complémentaires obtenus en retranchant les huit premiers d'un même nombre s.

TRANSFORMATIONS GÉNÉRALES DES CARRÉS.

Tout carré *pair*, c'est-à-dire celui dont le côté contient un nombre pair de cases, se divise en quatre quartiers par deux lignes médianes; cela posé, on a la proposition suivante : *Tout carré pair reste magique, si l'on échange simultanément, sans les tourner, les quartiers opposés.* Nous désignerons dans la

Fig. 51.



Échange des quartiers.

suite les quartiers par les n^{os} 1, 2, 3, 4 comme dans le carré à gauche (*fig.* 51); en échangeant les quartiers 1 et 3, 2 et 4, on obtient le carré à droite. On constate immédiatement sur ces deux carrés que les rangées et les deux diagonales conservent les mêmes nombres dans un ordre différent. On démontre de même la proposition suivante : *Tout carré impair reste magique si l'on échange simultanément, sans les tourner, les quartiers opposés ainsi que les fragments opposés des deux rangées médianes* (*fig.* 52).

Ces transformations ne donnent pas de nouveaux carrés pour le carré de trois; mais, pour celui de quatre, elles en donnent

Fig. 52.

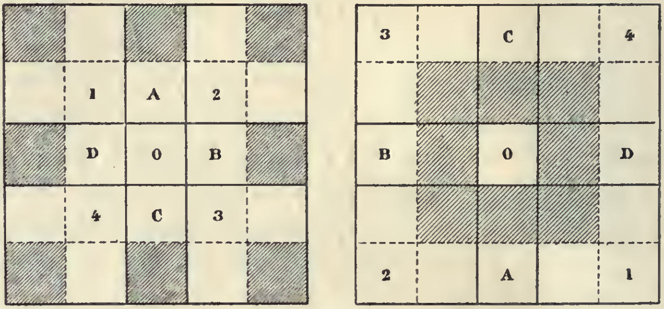


Fig. 53.

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*j*	*k*	*l*
m	*n*	*o*	*p*

N° 1.

a	*c*	*b*	*d*
i	*k*	*j*	*l*
e	*g*	*f*	*h*
m	*o*	*n*	*p*

N° 2.

k	*l*	*i*	*j*
o	*p*	*m*	*n*
c	*d*	*a*	*b*
g	*h*	*e*	*f*

N° 3.

f	*h*	*e*	*g*
n	*p*	*m*	*o*
b	*d*	*a*	*c*
j	*l*	*i*	*k*

N° 4.

Echanges des quartiers et des médianes.

d'autres que ceux que l'on aurait obtenus par rotation ou par symétrie. On démontre de même l'exactitude de la transformation suivante qui s'applique indistinctement aux carrés pairs et aux carrés impairs : *Tout carré reste magique si l'on échange deux horizontales, puis deux verticales qui sont toutes les quatre à la même distance du centre.* Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette proposition en construisant la figure.

Si l'on applique cette transformation après l'échange des quartiers opposés, on obtient encore un nouveau carré ; par suite, tout carré donne, par l'échange des rangées ou des quartiers, trois autres carrés magiques. Nous donnons (*fig.* 53) les quatre carrés que l'on déduit d'un seul carré de quatre par les échanges que nous venons de démontrer.

LES TABLES DE FRÉNICLE.

Les Ouvrages de Frénicle ont été publiés dans un volume imprimé au Louvre en 1693, par les soins du mathématicien de la Hire, et réimprimés dans le tome V des *Mémoires de l'Académie des Sciences* (Paris, 1729). On y trouve la *Table générale des Quarrez de Quatre;* cette Table, de 45 pages in-4°, contient les 880 solutions du problème pour tous les carrés faits avec les seize premiers nombres entiers ; en tenant compte de la rotation et de la symétrie, on obtient donc 7040 carrés différents.

Mais, si l'on se reporte à la théorie des échanges que nous venons d'exposer, on s'aperçoit immédiatement que les Tables de Frénicle peuvent être réduites au quart de leur étendue, et qu'il suffit, pour classer tous les carrés, de supposer que l'un quelconque des seize nombres du carré, le plus petit, par exemple, peut toujours être ramené dans l'une des cases 1 ou 2 (*fig.* 48). En effet, d'après le principe de rotation, on peut toujours supposer un nombre quelconque dans le premier quartier, c'est-à-dire sur l'une des cases 1, 2, 5, 6; en outre, par symétrie, si le nombre choisi est placé sur la case 5, on peut le ramener sur la case 2, et par échange des quartiers, lorsqu'il est placé sur la case 6, on peut le ramener sur la case 1; d'ailleurs, nous montrerons, dans ce qui suit, l'inutilité de cette Table. Cependant on trouve dans le Mémoire de Frénicle quelques propositions générales sur les carrés de quatre; nous en ajouterons quelques autres tirées de nos manuscrits et complétées par M. Delannoy.

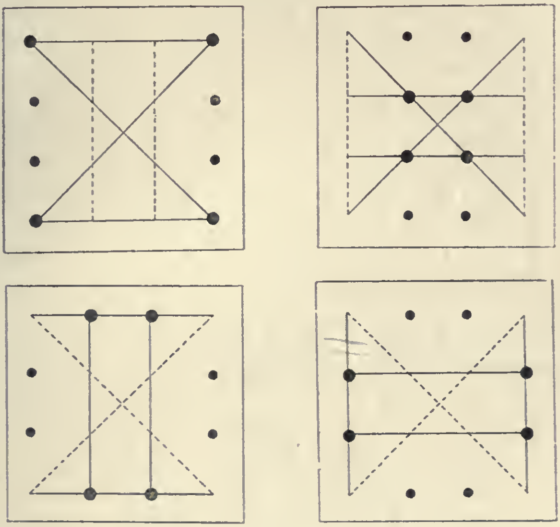
ÉGALITÉS A QUATRE BOULES.

THÉORÈME I. — *Dans tout carré de quatre, la somme des angles du carré extérieur, celle des angles du petit carré intérieur, les sommes des angles de chacun des deux rectangles médians sont égales à la constante.*

Cette proposition se démontre immédiatement sur chacun des carrés (*fig.* 54), en ajoutant les nombres placés sur les quatre traits pleins et retranchant ceux qui sont placés sur les traits pointillés. On observera d'ailleurs que le second carré se déduit du premier par échange des quartiers opposés, et le quatrième du troisième par rotation.

Ainsi, tout carré de quatre contient quatorze fois la constante sur des lignes régulières : quatre lignes, quatre colonnes, deux

Fig. 54.

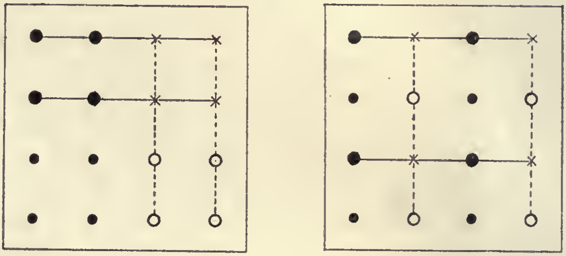


diagonales, deux rectangles médians, le petit carré intérieur et le grand carré extérieur.

Théorème II. — *Dans tout carré de quatre, la somme des quatre boules noires de l'un des carrés (fig. 55) égale la somme des boules blanches du carré opposé par rapport au centre, et la somme de l'un de ces carrés augmentée du carré adjacent formé de croix ou de points vaut deux fois la constante.*

La seconde partie de cette proposition se démontre en faisant la somme des nombres placés sur les traits pleins ou sur les traits pointillés, et la première partie en retranchant ces deux sommes l'une de l'autre. Nous désignerons sous le nom de *carrés de trois* chacun des quatre carrés formés de boules noires ou blanches, de croix ou de points dans la partie droite (*fig.* 55). On observera,

Fig. 55.

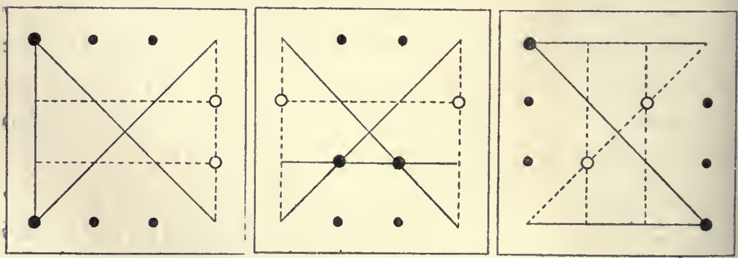


d'ailleurs, que ce carré se déduit du précédent par échange simultané des quatre rangées intérieures.

ÉGALITÉS A DEUX BOULES.

THÉORÈME III. — *Dans tout carré de quatre, la somme des*

Fig. 56.



extrémités d'une rangée extérieure égale la somme des nombres *intérieurs de la rangée extérieure opposée; la somme des extrémités d'une rangée intérieure égale la somme des nombres intérieurs de la rangée voisine, et la somme des extrémités d'une diagonale égale la somme des nombres intérieurs de l'autre diagonale* (*fig.* 56).

Pour démontrer cette proposition, on ajoute les nombres contenus sur les trois traits pleins et l'on retranche les nombres situés sur les trois traits pointillés. On observera de plus que le troisième carré se déduit du précédent par l'échange des quartiers opposés.

Cette égalité entre deux boules noires et deux boules blanches

Fig. 57.

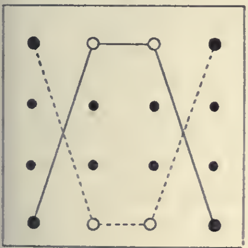


Fig. 58.

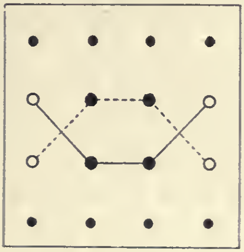
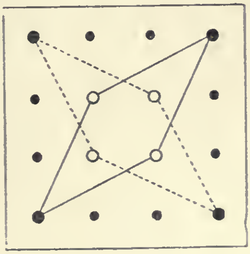


Fig. 59.



donne lieu, par rotation et par symétrie, à dix équations homogènes qui remplacent avantageusement les dix équations de la définition des carrés magiques de quatre. En effet, l'ensemble des quatre boules forme un grand trapèze (*fig.* 57), un petit trapèze (*fig.* 58) ou un losange (*fig.* 59). Par conséquent, si l'on ajoute les boules blanches de l'un des grands trapèzes (*fig.* 57) aux boules noires de l'autre, on constate l'égalité des lignes extérieures; en ajoutant les boules de même couleur de chacun d'eux, on en déduit l'égalité des lignes extérieures au grand carré extérieur, et à l'un des rectangles moyens; puis, par rotation, on en déduit que les lignes extérieures, les colonnes extérieures, le grand carré et les deux rectangles médians ont la même somme. En considérant les deux petits trapèzes (*fig.* 58), on conclut l'égalité des lignes intérieures, des colonnes intérieures, du petit carré intérieur et des deux rectangles moyens. En considérant les deux losanges (*fig.* 59), on conclut l'égalité des diagonales, du carré intérieur, du carré extérieur; donc, en rassemblant les résultats de ces trois figures, le carré est magique.

Corollaire I. — Pour former un carré avec seize nombres pris au hasard, il faut qu'en prenant les sommes de toutes les combinaisons des nombres deux à deux, on trouve dix sommes de deux nombres égales à dix sommes de deux autres nombres.

Corollaire II. — Si, parmi les seize nombres donnés, il en existe un seul plus petit que tous les autres, un seul plus grand que tous les autres, ces deux nombres ne peuvent occuper en même temps, l'un la place d'une boule noire, l'autre la place d'une boule blanche pour les dix positions qui correspondent à chacun des huit trapèzes ou des deux losanges des *fig.* 56, 57, 58 et 59; car, sans cela, le théorème III ne serait pas vérifié.

Corollaire III. — Si, parmi les nombres donnés, il en existe deux plus petits ou deux plus grands que tous les autres, ces deux nombres ne peuvent occuper en même temps les places de deux boules noires ou de deux boules blanches pour les dix positions que nous venons de considérer.

DES CARRÉS A QUARTIERS ÉGAUX.

Lorsque la somme des angles de l'un des quartiers est égale à la constante, il en est de même des trois autres, ainsi que cela résulte immédiatement du théorème II; on dit alors que le carré est à *quartiers égaux* (*fig.* 60). On a ainsi cinq petits carrés ombrés dont la somme est égale à la constante. Ces carrés possèdent plusieurs propriétés qui viennent s'ajouter aux précé-

Fig. 60.

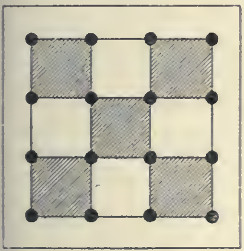


Fig. 61.

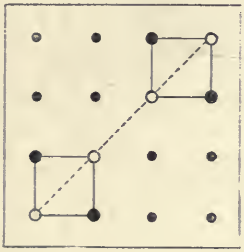
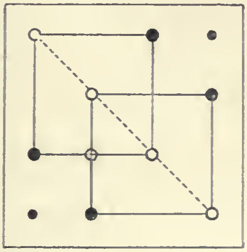


Fig. 62.



dentes, et permettent de trouver, de vingt-quatre manières différentes, quatre nombres placés régulièrement dont la somme est toujours égale à la constante.

En effet, si l'on ajoute deux quartiers opposés et si l'on retranche la diagonale commune, on voit immédiatement que la somme des boules noires du rectangle diagonal (*fig.* 61) égale la constante; réciproquement, si la somme des quatre boules de ce rectangle est égale à la constante, les quartiers sont égaux.

D'autre part, si l'on remplace les quartiers opposés (*fig.* 61) par les carrés de trois (*fig.* 62), on démontre encore que, si l'un des carrés est égal à la constante, il en est de même de tous les autres et d'un rectangle diagonal, et réciproquement. Ainsi donc, dans tout carré de quatre, lorsque l'un des quartiers, l'un des carrés de trois ou l'un des rectangles des *fig.* 61, 62 est égal à la constante, il en est de même des neuf autres.

Voici quatre autres propriétés des carrés à quartiers égaux sur

Fig. 63.

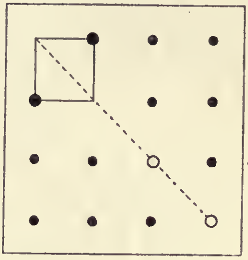


Fig. 64.

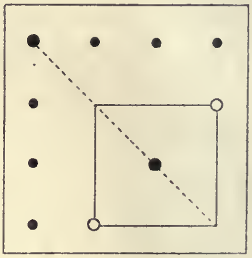


Fig. 65.

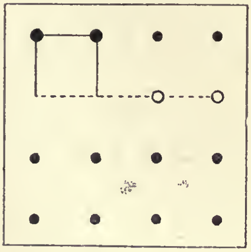
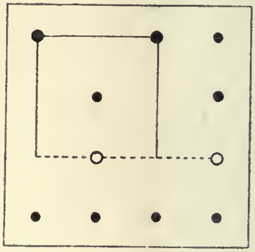


Fig. 66.



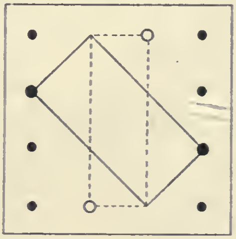
les égalités à somme variable entre vingt-quatre groupes de deux boules noires et de deux boules blanches correspondantes. Elles sont indiquées sur les *fig.* 63, 64, 65, 66.

Ces propriétés se démontrent immédiatement en ajoutant les nombres situés aux angles de l'un des carrés où se trouvent deux boules noires et en retranchant la diagonale ou la ligne représentée en traits pointillés; ces figures se transforment les unes dans les autres par échange simultané des quartiers ou des rangées intérieures.

Les deux propositions qui correspondent aux *fig.* 63 et 64 m'ont été indiquées par M. Delannoy, les deux autres figures sont tirées des manuscrits de Fermat.

On a encore une autre égalité entre deux boules blanches et

Fig. 67.



deux boules noires (*fig.* 67); on la démontre en ajoutant les boules du rectangle diagonal représenté en traits pleins et en retranchant celles du rectangle médian figuré en traits pointillés; les quatre boules sont aux sommets d'un carré. Nous verrons plus loin que, dans le cas général, il ne saurait exister d'autres égalités de ce genre.

LA TABLE D'ADDITION.

Ainsi que nous l'avons vu, il résulte des considérations de rotation et de symétrie, et des deux premiers échanges par rangées ou par quartiers, que l'on peut toujours supposer l'un des nombres quelconques du carré dans le premier quartier sur l'une des cases 1 ou 2 : ces remarques s'appliquent à tous les carrés et donnent lieu à leur classification naturelle [1]. Pour dresser une Table des carrés de quatre, il suffit donc de ne considérer que ceux qui ont le plus petit nombre sur la case 1 ou sur la case 2. Mais, pour les carrés à quartiers égaux, cette Table devient inutile, puisque

Fig. 68.

	a	b	c	d
p	ap	bp	cp	dp
q	aq	bq	cq	dq
r	ar	br	cr	dr
s	as	bs	cs	ds

l'on peut les déduire tous des transformations régulières d'une *Table d'addition*.

Formons avec quatre nombres quelconques a, b, c, d, et quatre autres nombres quelconques p, q, r, s, une Table d'addition, comme celle de Pythagore pour la multiplication, mais en adoptant cette notation que ap, par exemple, signifie la somme et non le produit de a et p (*fig.* 68).

Si l'on échange deux lignes ou deux colonnes quelconques, les seize nombres de la Table changent de place mais non de valeur;

(1) D'après une remarque de M. Delannoy, Frénicle aurait rangé la Table des carrés suivant la grandeur du nombre se trouvant sur la case 1, et pour les carrés ayant le même nombre dans cette case, d'après le nombre situé sur la case 6 (contiguë en diagonale).

il en est de même si l'on remplace les lignes par les colonnes, ou inversement; on obtient de cette façon $2(1.2.3.4)^2$ ou 1152 Tables d'addition distinctes, si les seize nombres de la Table sont différents; d'ailleurs, il ne peut y avoir d'autres solutions si les nombres donnés sont arbitraires, puisque l'on peut supposer que p, q, r, s et a, b, c, d représentent des nombres mesurés par pes unités d'espèces différentes.

Ainsi donc, toute Table d'addition de 16 nombres donne 1152 Tables distinctes dans le cas général; mais on doit diviser ce nombre par 8 et le ramener à 144 si l'on ne considère pas comme différentes les sept Tables déduites d'une première par rotation ou par symétrie.

Ces Tables jouissent de propriétés remarquables; on observera d'abord que la somme des termes de chacune des diagonales reste constante et égale à

$$a+b+c+d+p+q+r+s;$$

plus généralement, si l'on prend quatre termes de telle sorte qu'il n'y en ait pas deux dans une même ligne ou dans une même colonne, la somme des termes reste constamment la même et égale à la précédente. D'ailleurs, le nombre de ces groupes de quatre termes est évidemment égal au nombre des permutations 1. 2. 3. 4 des quatre premiers nombres, comme dans le problème des *quatre tours* sur l'échiquier de quatre cases de côté.

De plus, si l'on considère quatre nombres placés aux sommets d'un carré ou d'un rectangle quelconque de la Table, on reconnaît immédiatement que la somme des nombres d'une diagonale égale la somme des nombres de l'autre diagonale; on a ainsi trente-six égalités à deux boules et pas plus, dans le cas général. On a donc le théorème suivant :

Toute Table générale d'addition de seize nombres donne 1152 *Tables distinctes; elle renferme toujours vingt-quatre sommes de quatre nombres égales à la constante*, *et trente-six égalités de sommes variables entre deux groupes de deux nombres.*

On a évidemment un théorème semblable pour une Table de multiplication, en remplaçant les sommes par des produits.

LE CARRÉ MAGICO-MAGIQUE.

Prenons l'une quelconque des Tables d'addition, échangeons entre eux les nombres opposés par rapport au centre du carré, en exceptant ceux des diagonales ; puis, échangeons le quartier supérieur de droite avec le quartier inférieur de gauche; nous obtenons le *carré fondamental magico-magique* de Fermat. Ce carré a ses quartiers égaux. A toute Table d'addition correspond un carré à quartiers égaux, les vingt-quatre égalités à la constante donnent les vingt-quatre égalités à quatre boules que nous avons démontrées plus haut ; il en est de même pour les trente-six égalités à deux boules. Réciproquement, tout carré à quartiers égaux donne naissance à une Table d'addition, puisque, par la transformation inverse, les trente-six égalités à deux boules sont les conditions d'existence d'une Table d'addition. On a donc le théorème suivant :

Pour former avec seize nombres pris au hasard un carré magique à quartiers égaux, il faut et il suffit que l'on puisse former avec ces seize nombres une Table d'addition ; et si tous les nombres sont distincts, le nombre des carrés est égal à 1152 *ou* 8×144.

Il résulte encore de la remarque qui termine le paragraphe précédent que l'on peut construire des carrés magiques tels que les sommes soient remplacées par des produits ; il suffit de remplacer la Table d'addition par une Table de multiplication correspondante, *ap* désignant alors le produit et non la somme de *a* et *p*.

FORMULES D'ARITHMÉTIQUE.

Reprenons le carré fondamental ; considérons ap, bq, ..., comme des produits ; faisons la somme des nombres de chaque ligne en donnant le signe — aux nombres de la première diagonale, et faisons le carré des sommes obtenues ; nous avons

$$\begin{aligned} &[-ap + cs + dq + br]^2 \\ +&[+dr - bq + as + cp]^2 \\ +&[+bs + dp - cr + aq]^2 \\ +&[+cq + ar + bp - ds]^2 \end{aligned}$$

En faisant la somme, les doubles produits disparaissent à cause des égalités à deux boules; il ne reste que des carrés dont la somme représente le produit des deux sommes de quatre carrés

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,(p^2 + q^2 + r^2 + s^2).$$

Le procédé que nous venons d'exposer est plus simple que tous ceux qui ont été donnés jusqu'ici pour obtenir cette formule. Si, sans changer a, b, c, d, on permute de toutes les manières possibles les nombres p, q, r, s, on obtient ainsi vingt-quatre formules, et d'ailleurs on ne peut en obtenir davantage avec un seul terme négatif dans chaque parenthèse. Si l'on change ensuite le signe des termes contenant p dans ces formules, on en obtient vingt-quatre autres dans lesquelles chaque somme contient deux signes — ou n'en contient aucun.

Ainsi, la question de la décomposition du produit des sommes de quatre carrés en quatre carrés est inséparable de la théorie des carrés magiques à quartiers égaux.

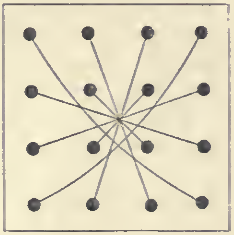
LES NEUF TYPES DES CARRÉS A QUARTIERS.

Nous appellerons *conjugués* les nombres d'une Table d'addition symétriquement placés par rapport au centre de la Table; ainsi, dans la Table de la *fig.* 68, ap et ds sont conjugués, ainsi que aq et dr. Dans le carré fondamental, les nombres conjugués sont encore placés deux par deux, symétriquement par rapport au centre du carré. Si l'on joint ces nombres par des lignes, on obtient la figure que nous appellerons le type A ou *carré conjugué* *par rapport au centre.* Par des échanges successifs, qui s'appliquent à tous les carrés à quartiers égaux, nous allons en obtenir

Fig. 69.

ap	*cs*	*dq*	*br*
dr	*bq*	*as*	*cp*
bs	*dp*	*cr*	*aq*
cq	*ar*	*bp*	*ds*

Fig. 70 (Type A).



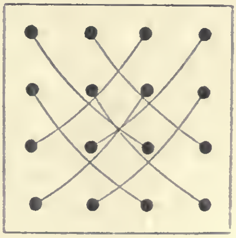
d'autres; et les divers traits réunissant les nombres conjugués proviennent des huit égalités des groupes de deux boules opposées de la Table d'addition.

Par l'échange des deux dernières lignes, puis des deux dernières

Fig. 71.

ap	*cs*	*br*	*dq*
dr	*bq*	*cp*	*as*
cq	*ar*	*ds*	*bp*
bs	*dp*	*aq*	*cr*

Fig. 72 (Type B).



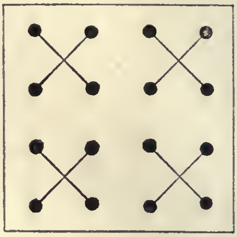
colonnes, nous obtenons le type B que nous appellerons *conjugué par diagonales des carrés de trois.*

L'échange des quartiers opposés conserve les types A et B; l'échange des rangées intérieures conserve le type A, mais transforme le type B dans le type C que nous appellerons *conjugué par diagonales de quartiers.*

Fig. 73.

ap	*br*	*cs*	*dq*
cq	*ds*	*ar*	*bp*
dr	*cp*	*bq*	*as*
bs	*aq*	*dp*	*cr*

Fig. 74 (Type C).

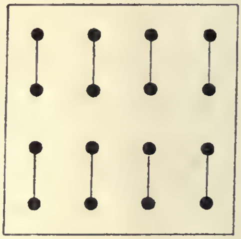


Échangeons dans chacun des quartiers du carré C les nombres des secondes lignes; puis échangeons, sans les tourner, les quar-

Fig. 75.

ap	*br*	*cs*	*dq*
ds	*cq*	*bp*	*ar*
bq	*as*	*dr*	*cp*
cr	*dp*	*aq*	*bs*

Fig. 76. (Type D).



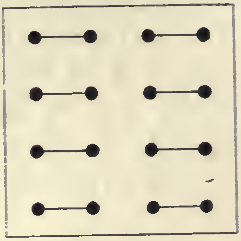
tiers inférieurs : nous obtenons le type D ou *carré conjugué par lignes voisines* (*fig.* 75 et 76).

En opérant par colonnes sur le type C, comme nous avons opéré par lignes, c'est-à-dire en échangeant, dans chacun des quartiers du carré C, les nombres des secondes colonnes; puis, sans les tourner, les deux quartiers de droite, nous obtenons le type D′ ou *carré conjugué par colonnes voisines* (*fig.* 77 et 78).

Fig. 77.

ap	*ds*	*bq*	*cr*
cq	*br*	*dp*	*as*
dr	*aq*	*cs*	*bp*
bs	*cp*	*ar*	*dq*

Fig. 78 (Type D′).



Bien que les figures des types D et D′ soient symétriques l'une

Fig. 79.

ap	*cs*	*br*	*dq*
bq	*dr*	*as*	*cp*
ds	*bp*	*cq*	*ar*
cr	*aq*	*dp*	*bs*

Fig. 80 (Type E).

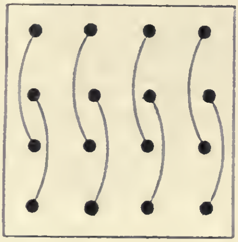
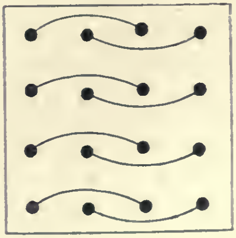


Fig. 81.

ap	*bq*	*ds*	*cr*
dr	*cs*	*aq*	*bp*
cq	*dp*	*br*	*as*
bs	*ar*	*cp*	*dq*

Fig. 82 (Type E′).



de l'autre par rapport à la première diagonale, les carrés obtenus sont bien distincts, car, si la première ligne de D′ est identique à la première colonne de D, il n'en est plus de même pour les secondes rangées.

Si, dans le type D, on fait l'échange des rangées intérieures, on obtient le type E ou *carré conjugué par lignes alternées* (*fig.* 79 et 80); de même du type D′ on déduit le type E′ ou *carré conjugué par colonnes alternées* (*fig.* 81 et 82).

Enfin, si dans les types E et E′ on échange les deux dernières

Fig. 83.

ap	*dq*	*cs*	*br*
cr	*bs*	*aq*	*dp*
bq	*cp*	*dr*	*as*
ds	*ar*	*bp*	*cq*

Fig. 84 (Type F).

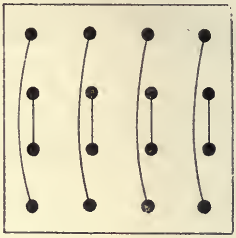
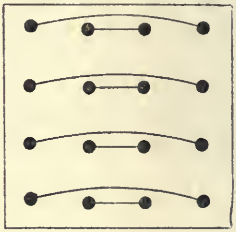


Fig. 85.

ap	*cr*	*bq*	*ds*
bs	*dq*	*ar*	*cp*
dr	*bp*	*cs*	*aq*
cq	*as*	*dp*	*br*

Fig. 86 (Type F′).



lignes, puis les deux dernières colonnes, on obtient le type F (*fig.* 83 et 84) ou *carré conjugué par lignes opposées,* et le type F′ *conjugué par colonnes opposées* (*fig.* 85 et 86).

En se reportant à la Table d'addition et à toutes ses transformations, on obtient ce théorème : *Les carrés à quartiers égaux se partagent également en neuf types distincts; en imposant à un élément quelconque une case déterminée, le nombre des solutions pour chaque type est égal à* 128.

L'ADDITION D'ÉQUIDIFFÉRENCES.

Reprenons la Table d'addition de seize nombres; nous supposerons a, b, c, d et p, q, r, s rangés dans l'ordre croissant et de plus

$$b+p<a+q,$$

de telle sorte que ap et bp sont les deux plus petits nombres de la Table.

Si l'on échange la première ligne des quartiers de droite avec la seconde ligne des quartiers de gauche, on obtient la Table II; mais, pour que cette nouvelle figure représente une Table d'addition, il faut et il suffit que l'on ait les deux relations

$$a+d=b+c \qquad \text{et} \qquad p+s=r+q.$$

Si, dans la Table II, on échange deux quartiers opposés, par exemple, le quartier supérieur de droite avec le quartier inférieur de gauche, on obtient une nouvelle Table d'addition. D'ailleurs, il ne saurait exister plus de trois Tables distinctes; on observera, en outre, que les nombres conjugués se trouvent toujours accouplés deux par deux, comme dans la première, et que les nombres placés sur les deux diagonales sont les mêmes dans les trois Tables.

Chacune des Tables d'addition fournit un nombre égal de carrés à quartiers; on a ainsi

$$8 \times 432 = 3456$$

carrés qui correspondent aux carrés α, β, γ des Tables de Frénicle.

On a, en résumé, les théorèmes suivants :

Si l'on forme avec deux équidifférences

$$a.b : c.d \quad \text{et} \quad p.q : r.s$$

c'est-à-dire avec huit nombres différents, mais tels que

$$a + d = b + c \quad \text{et} \quad p + s = q + r,$$

trois Tables d'addition; d'après les Tables I, II, III, on pourra former ensuite 3456 carrés magiques à quartiers égaux.

La somme des huit nombres placés dans les deux diagonales égale la somme des huit autres nombres.

Il en est de même de la somme des carrés et de la somme des cubes.

LES CARRÉS δ DES TABLES DE FRÉNICLE.

Si, dans le carré du type F (*fig.* 83), on échange les nombres des cases intérieures des lignes extrêmes, on obtient un autre carré; mais, pour que ce nouveau carré soit magique, il faut et il suffit que la somme des boules *ar* et *dq* soit égale à la somme des boules bp et cs, c'est-à-dire que l'on ait

$$a+d-(b+c)=p+s-(q+r).$$

Par conséquent, lorsque cette relation sera vérifiée, on déduira du type F et du type F′ deux nouveaux carrés; mais, bien que ceux-ci conservent le type primitif, nous les désignerons par G et G′.

Dans le cas particulier de la Table d'addition de deux équidifférences, la relation précédente se trouve vérifiée, puisque les deux membres sont nuls; dans ce cas, le nombre des carrés G et G′ est triplé, on a donc 384 G et 384 G′ qui correspondent à 96 carrés δ de Frénicle, que l'on doit multiplier par 8, à cause de la rotation et de la symétrie; dans le cas particulier de deux équidifférences, les deux carrés médians ont des sommes égales à la constante; ainsi cela a lieu pour les carrés que nous venons de former pour bq, cp, bs, cr et aq, dp, as, dr.

SIXIÈME RÉCRÉATION.

—

LA GÉOMÉTRIE DES RÉSEAUX ET LE PROBLÈME DES DOMINOS.

À Monsieur G. Tarry,
sous-directeur des contributions diverses, à Alger.

« Combien de temps une pensée,
Vierge obscure, attend son époux! »

(BÉRANGER.)

« Les mêmes pensées poussent quelquefois tout autrement dans un autre que dans leur auteur; infertiles dans leur champ naturel, abondantes étant transplantées. »

(PASCAL. — *Pensées.*)

SIXIÈME RÉCRÉATION.

—

LA GÉOMÉTRIE DES RÉSEAUX ET LE PROBLÈME DES DOMINOS.

SUR LE JEU DE DOMINOS.

On s'était proposé, depuis bien des années, de rechercher le nombre de toutes les manières possibles d'aligner les vingt-huit dés d'un jeu de dominos, en se conformant à la règle ordinaire. Mais on ne connaissait jusqu'à présent qu'une seule solution de ce problème fort difficile qui semblait rebelle à toutes les méthodes d'investigation. Le nombre des solutions du problème des dominos a été donné pour la première fois en 1859 par le Dr Reiss, de Francfort, auquel on doit encore la théorie mathématique du *Jeu du Solitaire* (*Récréations mathématiques,* t, I, p. 118). Le travail du Dr Reiss sur le jeu de dominos a été publié, après la mort de l'auteur, dans les *Annali di Matematica,* à Milan, en 1871. Mais son Mémoire, bourré de chiffres, remplit cinquante-huit pages in-4°.

et les développements qu'il comporte renferment des tableaux numériques et des calculs nombreux, trop compliqués pour être intéressants et trop exclusifs puisqu'ils n'avaient d'autre but que la solution du problème en question. Dans le second Volume de nos *Récréations* (p. 67), nous avions même émis quelques doutes sur l'exactitude de la solution, mais nous devons avouer que notre critique était mal fondée. Le résultat obtenu est celui-ci : Le nombre des manières de disposer en lignes, en comptant pour distinctes les mêmes dispositions rectilignes de droite à gauche et de gauche à droite, est

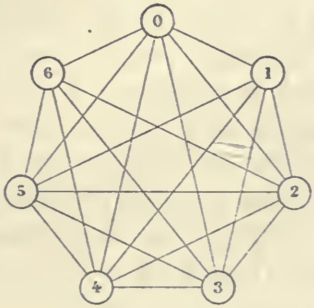
$$7\,959\,229\,931\,520 = 2^{13}.3^{8}.5.7.4231.$$

Ce nombre doit donc être considéré comme exact ; nous avions déjà reçu en 1885 un travail assurément ingénieux de M. l'abbé Jolivald, qui simplifiait beaucoup la solution du problème et qui confirmait l'exactitude du résultat donné par le Dr Reiss.

UNE REMARQUE DE M LAISANT.

M. Laisant avait fait la jolie remarque suivante, que nous avions publiée à la fin de notre second Volume (Note I, p. 229). Si l'on supprime les doubles du jeu de dominos, il reste vingt et un dés que l'on peut figurer de la manière suivante (*fig.* 87). On trace un heptagone et l'ensemble de toutes ses diagonales; en d'autres termes, on prend sept points que l'on désigne par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, et que l'on joint deux à deux de toutes les manières possibles. La ligne 1-3, par exemple, représente l'as-trois; la ligne 0-4 représente le blanc-quatre et ainsi des autres. Par conséquent, le problème de placer en rond les vingt et un dés du jeu de dominos, sans les doubles, revient à décrire d'un seul trait continu la *fig.* 87, en passant sur toutes les lignes une seule fois, sans faire sauter la plume ou le crayon, et sans fragmenter les

Fig. 87.



Jeu de dominos.

diagonales. Mais, puisque chaque double peut occuper *trois* places dans une disposition circulaire, et qu'il y *sept* doubles, on multipliera le résultat obtenu par $3^7 = 2187$ pour avoir les dispositions circulaires des vingt-huit dés du jeu de dominos. Il faudra multiplier le dernier résultat par 28 pour obtenir le nombre des dispositions rectilignes.

SOLUTIONS DE MM. JOLIVALD ET TARRY.

Au Congrès de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, tenu à Nancy en 1886, M. G. Tarry, contrôleur des contributions diverses, aujourd'hui sous-directeur à Alger, a présenté un Mémoire fort intéressant qui venait confirmer de nouveau les résultats obtenus par le docteur Reiss et l'abbé Jolivald. La simplicité de la méthode employée, qui repose sur la remarque précédente, et la rapidité du procédé permettent d'appliquer ce mode de recherches à un grand nombre d'autres questions de la Géométrie de situation. M. Tarry et M. l'abbé Jolivald ont appliqué la même méthode, chacun de leur côté, à la recherche du nombre des dispositions rectilignes des dés d'un jeu de dominos allant jusqu'au double huit. En d'autres termes, ils ont trouvé le nombre des circuits formés par les côtés et les diagonales (non fragmentées) d'un ennéagone régulier; ce nombre est le suivant:

$$911\,520\,057\,021\,235\,200.$$

La décomposition de ce nombre en facteurs donne

$$2^{16}.3^{11}.5^2.7^{11}.40787.$$

La méthode de M. Tarry constitue donc un très grand progrès dans l'étude des questions de ce genre. Mais, si l'on tient compte de la décomposition en facteurs pour le nombre précédent et pour celui de Reiss, on doit penser que l'on finira bien par trouver des méthodes encore plus expéditives.

Avant d'exposer cette méthode, nous placerons ici quelques considérations générales sur plusieurs problèmes de la Géométrie de situation ; ces problèmes se rapportent directement à l'Arithmétique, car leur solution dépend de la théorie des combinaisons.

LES RÉSEAUX GÉOMÉTRIQUES.

Un réseau géométrique est le système formé par des points A, B, C, ..., disposés d'une manière quelconque dans le plan ou dans l'espace et reliés entre eux par une ou plusieurs lignes droites ou courbes que l'on appelle *chemins*. Les points A, B, C, ... sont appelés *carrefours;* un carrefour est dit *pair* ou *impair*, suivant que le nombre des chemins qui y aboutissent est pair ou impair. Un réseau est continu quand un mobile placé sur l'un des chemins ou l'un des carrefours peut se rendre à un autre point quelconque sans quitter les chemins.

Cela posé, on a le théorème suivant, dû à Euler, dont nous avons déjà donné une démonstration moins simple (*Récréations mathématiques,* t. I, p. 238). Lorsqu'un réseau renferme des carrefours impairs, ceux-ci sont en nombre pair. En effet, si l'on compte le nombre de tous les chemins qui aboutissent à chacun des carrefours, la somme de tous les nombres obtenus est un nombre pair, puisque chaque chemin a été compté deux fois. Cette somme étant un nombre pair, il faut nécessairement que, parmi les nombres entiers qui l'ont fournie, ceux qui sont impairs soient en nombre pair.

Nous croyons intéressant de donner quelques exercices relatifs aux réseaux géométriques.

Exercice I. — Calculer le nombre des *sauts du cavalier des echecs* sur un échiquier rectangulaire formé de p lignes et de q colonnes.

On peut passer de l'une des $(q-1)$ premières colonnes à la colonne suivante par $(p-2)$ sauts descendants et par le même nombre de sauts ascendants ; on a donc

$$2(p-2)(q-1)$$

sauts, et un nombre égal en chevauchant de la droite vers la gauche.

De même, en passant à la ligne précédente ou à la suivante, il y a un nombre de sauts égal au double de

$$2(p-1)(q-2).$$

Donc, *le nombre des sauts du cavalier sur l'échiquier rectangulaire de pq cases, en comptant l'aller et le retour, est égal au double de*

$$(2p-3)(2q-3)-1.$$

Plus généralement, si le saut du cavalier se compose de r pas dans un sens et de s pas dans l'autre, en supposant r et s plus petits que p et q, le nombre des sauts du cavalier, en comptant l'aller et le retour, est le double de l'expression

$$(2p-r-s)(2q-r-s)-(r-s)^2;$$

cependant, on doit diviser ce nombre par 2, lorsque l'un des nombres r, s, ou $(r-s)$ est nul.

On calcule le *nombre des pas du roi* en considérant celui-ci comme l'ensemble de deux cavaliers dont l'un des pas est 1 et l'autre 0 ou 1. On trouve ainsi le double de

$$4pq - 3p - 3q + 2.$$

Sur l'échiquier de p^2 cases, la *tour* peut être considérée comme l'ensemble de cavaliers dont l'un des pas est nul, et dont l'autre est l'un quelconque des entiers plus petits que p. On trouve ainsi que le nombre des déplacements de la tour sur l'échiquier de p^2 cases est le double de

$$p^2(p-1).$$

Sur l'échiquier de p^2 cases, le système des *deux fous* peut être considéré comme l'ensemble de cavaliers dont les pas égaux sont tous les nombres entiers plus petits que p. On trouve ainsi que le nombre des déplacements des fous sur l'échiquier de p^2 cases est le double de

$$\frac{1}{2}p(p-1)(2p-1).$$

Enfin la *reine* peut être considérée, dans son mouvement, comme l'ensemble d'une tour et des deux fous; par suite, le nombre de ses déplacements est le double de

$$\frac{1}{2}p(p-1)(5p-1).$$

Exercice II. — Le nombre des manières de placer *deux reines* sur l'échiquier de p^2 cases, de telle sorte qu'elles ne soient pas en prise, c'est-à-dire qu'elles ne soient pas situées sur une même ligne parallèle aux bords et aux diagonales de l'échiquier, est

$$\frac{1}{6}p\,(p-1)\,(p-2)\,(3p-1).$$

En effet, ce nombre est égal à l'excès du nombre des combinaisons des p^2 cases prises deux à deux sur la moitié du nombre des déplacements possibles de la reine, ou

$$\frac{p^2(p^2-1)}{2}-\frac{p(p-1)(3p-1)}{3}.$$

Le même calcul peut s'appliquer à d'autres pièces de l'échiquier, et l'on trouve pour *deux rois*

$$(p-1)\,(p-2)\,(p^2+3p-2),$$

et pour *deux cavaliers*

$$\frac{1}{2}(p-1)\,(p^3-p^2-8p+16).$$

Exercice III. *Le problème des reines.* — Ce problème est traité complètement jusqu'aux échiquiers de 11 cases de côté dans nos *Récréations mathématiques* (t. I, 2e édition).

Le lecteur trouvera, dans la Récréation sur le *Saut du Cavalier au Jeu des Échecs,* d'autres exercices du même genre [1].

[1] Nous avons trouvé, dans les manuscrits de notre ami si regretté, trente à quarante pages de notes sur cette Récréation; mais les lacunes étaient trop nombreuses pour que nous ayons osé nous permettre de rédiger la récréation sur le *Saut du Cavalier.* (*Voir* la Note I.) D.

DU TRACÉ DES RÉSEAUX.

La question de décrire d'un seul trait, sans omission ni répétition, un réseau géométrique a été exposée pour la première fois, par Euler, dans son Mémoire des *Ponts de la Pregel.* Plus récemment, cette question a été développée par M. Émile Lemoine, au congrès d'Alger (1881), et par M. l'abbé Lecointe, dans le *Cosmos.* Les résultats obtenus se réduisent aux théorèmes suivants dont on trouvera les démonstrations dans le premier Volume de nos *Récréations* (t. I, p. 47 et 239).

THÉORÈME I. — Tout réseau continu qui ne contient que des carrefours pairs peut être décrit d'un seul trait formant un circuit fermé, sans omission ni répétition, quel que soit le point de départ qui coïncide avec le point d'arrivée. (EULER.)

THÉORÈME II. — Tout réseau continu à $2n$ points impairs peut être décrit en n traits continus, sans omission ni répétition, et non en un moindre nombre. (CLAUSEN.)

THÉORÈME III. — Tout réseau continu peut être décrit d'un seul trait, en passant deux fois sur les lignes du réseau sans qu'il soit nécessaire d'en connaître le dessin. (TRÉMAUX.)

Mais les théorèmes précédents ne portent que sur la possibilité ou l'impossibilité de la description des réseaux en un ou plusieurs traits, et non pas sur le nombre des tracés différents. Le théorème de M. Tarry sur la *suppression successive des carrefours,* et le théorème que nous avons ajouté sur la *suppression des impasses* permettent de résoudre la question dans les cas les plus simples.

PROCÉDÉ DE M. FLEURY.

M. Fleury, chef d'institution à Marseille, a publié une petite Note indiquant un procédé assez simple pour décrire les figures d'un seul trait ([1]). La figure étant tracée à la craie sur le tableau noir, la question consiste à en décrire une pareille, ou à en effacer successivement les lignes avec le doigt ou un chiffon. Pour faciliter l'explication, nous supposerons que c'est un pinceau qui suit et efface à mesure les lignes de la figure donnée et que la figure a deux points impairs. Si tous les points sont pairs, il suffit d'effacer un fragment d'un chemin quelconque, pour donner à la figure deux points impairs. Nous appellerons figure réduite toute figure composée seulement des lignes qui ne sont pas encore effacées; point d'arrivée, le point où se trouve à un instant quelconque le pinceau qui efface, et point final celui par lequel doit se terminer l'opération. Le point d'arrivée et le point final sont nécessairement les deux carrefours impairs de la figure réduite. Il n'y a qu'au moment où le pinceau passe par le point final que la figure a tous ses carrefours pairs. Pendant toute l'opération, le nombre des points impairs étant nécessairement deux ou zéro, une figure réduite ne peut devenir impossible à décrire

([1]) *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 257, — Deux problèmes de Géométrie de situation.

qu'en se partageant en deux parties qui ne communiquent plus entre elles. Nous appellerons *chemin isolant* un chemin réunissant deux carrefours A et B, de telle sorte que la suppression du chemin divise la figure en deux réseaux isolés l'un de l'autre. Cela posé, la règle très sûre et très simple pour décrire le réseau d'un seul trait, c'est de *ne prendre un chemin isolant que lorsqu'il n'en reste plus d'autre à prendre.*

Cette condition est nécessaire, car, si, arrivé en A, nous prenons le chemin isolant AB, lorsqu'un autre chemin partant du carrefour A n'a pas été parcouru, la figure réduite sera partagée en deux réseaux partiels isolés. La condition est d'ailleurs suffisante, car le point A étant impair, comme point d'arrivée, il devient pair par la suppression du chemin AB, et alors on peut décrire le réseau partiel qui aboutit au point A, et revenir en A, après quoi l'on prendra le chemin AB, pour aller décrire l'autre réseau partiel qui contient le point final; car, si ce point était sur le réseau partiel contenant A, ce réseau n'aurait qu'un seul point impair, ce qui est impossible.

PÉRÉGRINATIONS D'UNE FOURMI.

Lorsque l'on prend pour point de départ un point quelconque d'un réseau à carrefours pairs, on peut partir de ce point dans deux sens différents pour revenir au point initial; par conséquent, le nombre des circuits complets est toujours un nombre pair, et le nombre des circuits est le même, quel que soit le point de départ. Nous donnerons, comme premier exemple, le problème suivant; on pourrait en faire un sujet de fable avec moralité sur la gourmandise : *Le Melon et la Fourmi.*

Un melon a douze côtes; une fourmi visite successivement les douze vallons qui séparent les côtes et revient à son point de départ. Quel est le nombre des manières d'accomplir ce voyage de pérégrinations? — La fourmi, placée en un point d'un vallon, peut d'abord choisir entre deux sens; mais, arrivée à l'un des pôles du melon, elle a le choix entre onze vallons, et, lorsque l'un de ceux-ci est parcouru, il lui en reste dix autres, et ainsi de suite. Par conséquent, le nombre cherché est le double du produit des onze premiers nombres, ou 39916800. Dans le cas général, pour un melon quelconque, c'est le double du produit de tous les nombres entiers plus petits que le nombre des côtes.

On doit observer qu'on ne trouverait pas le même résultat en partant du pôle d'un melon. En effet, en partant de ce point, on a le choix entre douze chemins, puis onze, puis dix, ..., de telle sorte que le nombre des chemins est égal au produit des douze premiers nombres, c'est-à-dire à six fois le résultat précédent. Mais ces parcours, distincts dans le temps, ne sont pas distincts comme circuits dans l'espace. Il y a une différence de même nature dans le nombre de permutations d'objets disposés sur une ligne droite ou sur une circonférence, ainsi que nous l'avons déjà expliqué dans le calcul du nombre des dîners sur la table ronde (*Récr. math.*, t. I, p. 196). Aussi, afin d'éviter toute confusion, nous évaluerons le nombre des circuits d'un réseau en partant d'un point et non d'un carrefour.

LES RÉSEAUX A POINTS IMPAIRS.

On ramène la recherche du nombre des tracés complets des réseaux à points impairs à la détermination du nombre des circuits des réseaux à carrefours tous pairs, par le théorème suivant :

Pour décrire sans omission ni répétition un réseau ayant $2n$ carrefours impairs en n traits et n sauts pour revenir au point de départ, on joint ces points de toutes les manières possibles, en nombre N égal à

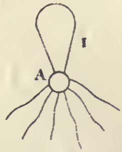
$$N = 1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n . n!},$$

et le nombre cherché est la somme des nombres des circuits des N réseaux à points pairs ainsi obtenus. On observera que l'on ne doit sauter que d'un carrefour impair à un autre impair, et que le nombre des tracés est indépendant de la position du point de départ.

FERMETURE D'UNE IMPASSE.

On appelle *impasse* tout chemin dont les deux extrémités aboutissent à un seul carrefour, et qui ne passe par aucun autre carrefour; soit I une impasse aboutissant au carrefour A (*fig.* 88) auquel aboutissent en outre d'autres chemins en nombre pair, au nombre de six, sur la figure. Dans chacun des parcours complets du labyrinthe, on passera trois fois au point A; à l'un quelconque de ces passages on peut parcourir l'impasse dans deux sens. Par conséquent, chaque fois que l'on ferme une im-

Fig. 88.



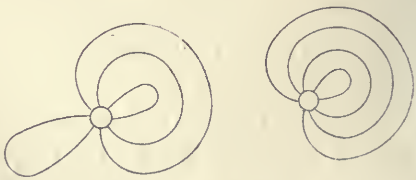
Fermeture d'une impasse.

passe, il faut multiplier, par la moitié du nombre des autres chemins du labyrinthe réduit qui passent au carrefour, le nombre des parcours complets du labyrinthe réduit.

LABYRINTHES A UN SEUL CARREFOUR.

Les labyrinthes à un seul carrefour peuvent affecter des formes

Fig. 89 et 90.



Labyrinthes à carrefour unique.

diverses, mais ils sont uniquement formés d'impasses. En appliquant le résultat précédent, en fermant successivement une impasse, on voit que le nombre des parcours des labyrinthes des *fig.* 89 et 90 est égal à

$$6 \times 4 \times 2 \times 2 = 96.$$

Le dernier facteur 2 représente les deux sens du parcours de la dernière impasse. En général, le nombre des parcours d'un labyrinthe à un seul carrefour est le double du produit de tous les nombres pairs plus petits que le nombre des chemins qui aboutissent au carrefour.

CHEMIN DE FER A DOUBLE VOIE.

Lorsqu'un labyrinthe ne contient que des impasses, mais à carrefours différents, on peut encore appliquer le même procédé, et ainsi, par exemple, résoudre le problème suivant : Un chemin

Fig. 91.

Chemin de fer à double voie.

de fer à double voie renferme sept stations, et le train peut changer de voie à chacune d'elles ; déterminer le nombre des parcours complets. En supprimant successivement l'impasse A (*fig.* 91), puis B, etc., on trouve

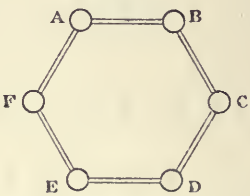
$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64;$$

et, en général, le produit des facteurs égaux à 2 dont le nombre est égal au nombre des intervalles entre les stations.

CHEMIN DE FER DE CEINTURE.

Pour déterminer le nombre des parcours complets d'un chemin de ceinture à double voie (*fig.* 92), on doit observer que, si les

Fig. 92.



Çhemin de fer de ceinture.

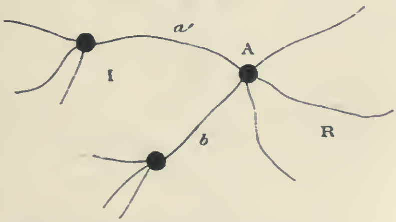
deux voies d'un intervalle entre deux stations sont parcourues successivement, aller et retour, le reste du chemin revient à celui de la *fig.* 91 ; mais chaque intervalle peut être parcouru ainsi à l'exclusion de tous les autres; ce qui fait six fois le nombre précédent; enfin, si les deux voies d'un intervalle ne sont jamais parcourues successivement, on a encore une fois ce nombre; donc en tout $(6+1)\times 64$, et en général pour n stations, il y a $(n+1)\,2^n$ parcours. La solution précédente a été donnée par M. Delannoy.

THÉORÈMES DES IMPASSES.

Nous venons de traiter le cas d'une impasse simple, formée d'un seul chemin dont les extrémités aboutissent à un même carrefour. Plus généralement, nous appellerons impasse toute fraction d'un réseau qui n'a d'autres points communs avec le reste du réseau que les extrémités de deux chemins, de telle sorte que la suppression de l'extrémité de chaque chemin détermine la séparation du réseau en deux autres; le réseau total se compose alors de deux réseaux partiels, dont le plus simple est l'impasse. Mais deux cas peuvent se présenter, suivant que les deux chemins de l'impasse aboutissent à un même carrefour du réseau partiel ou à deux carrefours différents. Le premier cas a été étudié par M. Tarry; nous y avons ajouté le second cas.

Premier cas. — Supposons que les deux chemins a et b de l'impasse aboutissent à un carrefour A du réseau partiel (*fig.* 93);

Fig. 93.



Impasse aboutissant à un seul carrefour.

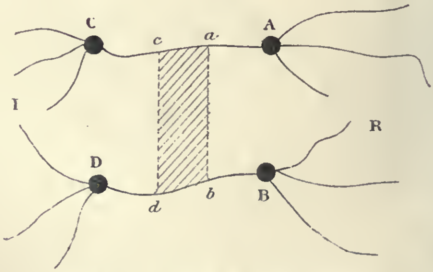
désignons par I et R les nombres de circuits de l'impasse et du réseau partiel, et par $2p$ le nombre des chemins du réseau restant qui aboutissent au carrefour A, sans compter les deux chemins *a* et *b*. Dans un circuit du réseau partiel, on passe *p* fois au carrefour A, et à l'un quelconque des passages il faut nécessairement décrire complètement l'un des circuits de l'impasse; par suite, le nombre des circuits du réseau total est $p\mathrm{IR}$.

Si le point A était un point simple du réseau restant, on ferait $p = 2$; si l'impasse était formée d'un seul chemin dont les extrémités viendraient aboutir au carrefour A, on ferait $\mathrm{I} = 2$. Enfin, si *q* impasses indépendantes les unes des autres aboutissent au carrefour A, et si l'on distingue par des indices les nombres de leurs circuits séparés, on trouve, par la suppression successive des impasses, que le nombre des circuits du réseau total est égal au produit

$$p\,(p+1)\ldots(p+q-1)\,\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\ldots\mathrm{I}_q\mathrm{R}.$$

Deuxième cas. — Supposons que les deux chemins *a* et *b* de

Fig. 94.



Impasse aboutissant à deux carrefours.

l'impasse I aboutissent à deux carrefours A et B du réseau restant (*fig.* 94); alors ces carrefours sont impairs, ainsi que les premiers carrefours C et D de l'impasse que l'on rencontre immédiatement par les chemins a et b. Pour évaluer le nombre des circuits du réseau total, partons du point a de AC; nous avons deux sens; en partant suivant aA, nous décrivons le réseau partiel augmenté du chemin ab dans un seul sens; puis nous arrivons en b et, au lieu de décrire ba, nous suivons le chemin bDC et nous parcourons l'impasse dans un seul sens pour revenir en a; par conséquent, le nombre total des parcours dans les deux sens est la moitié du produit des nombres de circuits de l'impasse et du réseau partiel.

On observera, d'ailleurs, que l'application de ce théorème est illusoire, si l'impasse I se compose d'un seul chemin.

THÉORÈME DES CARREFOURS.

Pour évaluer le nombre des tracés d'un réseau quelconque, on ramène, ainsi que nous l'avons vu, les réseaux à carrefours impairs à des réseaux à carrefours tous pairs. Cela fait, on commence par supprimer toutes les impasses qui peuvent exister, en remplaçant le réseau total par des réseaux partiels. Considérons donc un réseau n'ayant plus aucune impasse; pour déterminer le nombre de ses circuits, on le remplace par d'autres ayant un carrefour de moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les réseaux obtenus ne contiennent plus que deux carrefours; on revient alors aux pérégrinations de la fourmi.

Si $2n$ chemins a, b, c, d, ..., aboutissent à un même carrefour, on décompose le réseau en N autres réseaux obtenus en soudant deux par deux, de toutes les manières possibles, les $2n$ chemins a, b, c, d, ... D'ailleurs, en soudant un premier chemin avec un autre, on a le choix entre $(2n-1)$ chemins; puis, en soudant un autre chemin avec un autre, on a le choix entre $(2n-3)$ chemins, et ainsi de suite. On a donc

$$N = 1.3.5\ldots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n.n!};$$

c'est le nombre des manières de remplacer un produit de $2n$ facteurs, premiers entre eux deux à deux, par un produit de n facteurs, en groupant les facteurs deux par deux.

C'est encore le nombre que nous avons trouvé pour ramener à un réseau à carrefours tous pairs, un réseau ayant $2n$ points impairs.

Dans l'application de ce théorème, on doit faire les deux remarques suivantes : 1° Si la suppression d'un carrefour amenait la désagrégation du réseau, on recommencerait l'opération en appliquant d'abord le théorème des impasses; cette observation s'applique aussi bien aux réseaux partiels qui remplacent le réseau primitif; 2° les N labyrinthes obtenus par la suppression d'un carrefour ne sont pas toujours tous distincts; deux réseaux sont équivalents lorsqu'ils possèdent le même nombre de carrefours, et que deux carrefours quelconques sont réunis par le même nombre de chemins.

DESCRIPTION DU PENTAGONE.

Nous appliquerons la méthode précédente à la *fig.* 95, formée

Fig. 95.

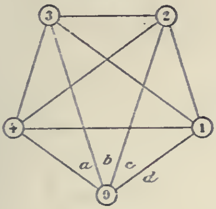


Fig. 96.

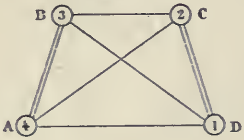


Fig. 97.

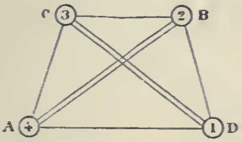
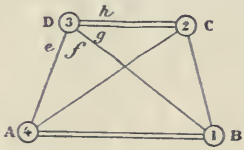


Fig. 98.



par les côtés et les diagonales d'un pentagone, c'est-à-dire au jeu de dominos terminé au double quatre (*fig.* 95).

En O aboutissent quatre chemins *a, b, c, d;* on peut les souder ensemble deux à deux, de toutes les manières possibles :

ab	d'une part, et	*cd*	d'autre part, donne	*fig.* 96.
ac	—	*bd*	—	*fig.* 97.
ad	—	*bc*	—	*fig.* 98.

Le carrefour O se trouve supprimé, et le nombre des tracés de la *fig.* 95 est égal à la somme des nombres de parcours des trois autres figures.

Mais ces trois nouveaux labyrinthes sont équivalents, puisque les carrefours A et B, C et D sont réunis par deux chemins, et que les autres jonctions ont lieu par un seul. Il suffit donc de tripler le nombre des parcours des labyrinthes (*fig.* 98).

On peut supprimer le carrefour D de trois manières, comme précédemment. La soudure de e et f donne la *fig.* 99, et, après

Fig. 99.

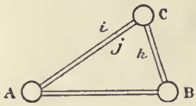


Fig. 100.

suppression de l'impasse, la *fig.* 100; nous nous trouvons ainsi dans le cas de la fourmi : $2 \times 1 \times 2 \times 3$ ou 12 tracés.

La soudure de e et g ou de e et h donne deux fois la *fig.* 101.

Fig. 101.

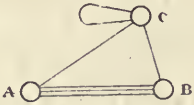
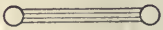


Fig. 102.



Celle-ci, par la suppression du carrefour C, donne, par soudure de i et j, la *fig.* 102, qui donne 8 tracés.

Et, par soudure de i et k, ou de i et l, deux fois la *fig.* 100. Donc encore 24 tracés.

Ainsi, au total, deux fois $(12 + 8 + 24)$ ou 88.

La *fig.* 98 se décrit donc de 88 manières, et le pentagone (*fig.* 95), de 264 manières différentes.

On trouvera de même que le nombre des circuits formés par les arêtes d'un octaèdre régulier est égal à 744. Ainsi encore, si l'on supprime une station du chemin de fer de ceinture (*fig.* 92) contenant n stations, et si l'on désigne par R_n le nombre des circuits, on trouve

$$\frac{R_n}{2^n} = \frac{R_{n-1}}{2^{n-1}} + 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{R_2}{2^2} = 3;$$

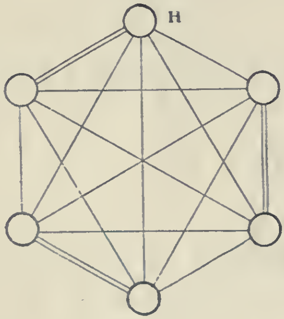
d'où l'on tire, ainsi que M. Delannoy l'avait trouvé par une méthode différente,

$$R_n = (n+1)\,2^n.$$

DESCRIPTION DE L'HEPTAGONE.

La suppression d'un carrefour de l'heptagone conduit à la description d'un hexagone H (*fig.* 103), dont trois côtés sont redou-

Fig. 103.

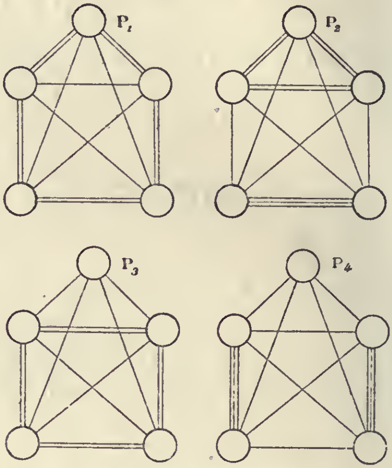


blés; par conséquent, si l'on désigne par X le nombre des tracés de l'heptagone, et par H le nombre des tracés de l'hexagone, on a, par le théorème de Tarry,

$$X = 15\,H.$$

La suppression de l'un des carrefours de l'hexagone donne

Fig. 104.



Les quatre pentagones.

lieu, après suppression des impasses, à la description des quatre pentagones P_1, P_2, P_3, P_4 (*fig.* 104), et l'on a

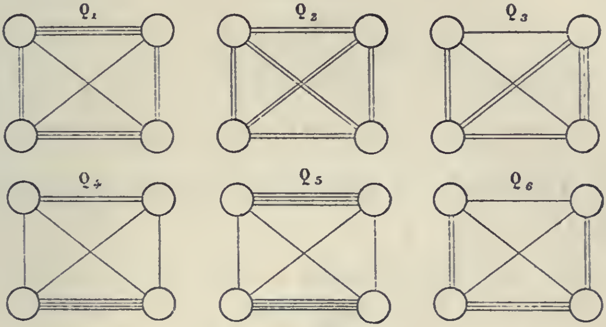
$$H = 8\,P_1 + 4\,P_2 + 8\,P_3 + 4\,P_4;$$

Par la suppression du carrefour supérieur de chacun des quatre pentagones et des impasses qui se produisent, on est conduit à la description de six quadrilatères Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 (*fig.* 105), et l'on a

$$\begin{aligned}
P_1 &= 6\,Q_1 + 4\,Q_2 + 16\,Q_3 + 16\,Q_4,\\
P_2 &= 8\,Q_1 + 16\,Q_3 + 2\,Q_5 + 16\,Q_6,\\
P_3 &= 2\,Q_1 + Q_2,\\
P_4 &= 2\,Q_1 + Q_6.
\end{aligned}$$

Par la suppression de l'un des carrefours supérieurs des six

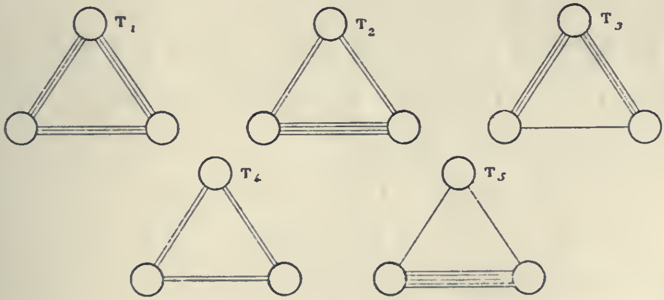
Fig. 105.



Les six quadrilatères.

quadrilatères et des impasses qui se produisent, on est conduit à

Fig. 106.



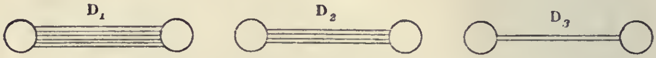
Les cinq triangles.

la description de cinq triangles T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 (*fig.* 106), et l'on a

$Q_1 = 6\,T_1 + 24\,T_2 + 48\,T_3,$	$Q_4 = 2\,T_2 + 4\,T_3,$
$Q_2 = 8\,T_1 + 24\,T_2 + 64\,T_4,$	$Q_5 = 48\,T_2 + 24\,T_3,$
$Q_3 = 2\,T_1 + 2\,T_2,$	$Q_6 = 2\,T_2 + 2\,T_5.$

Enfin, par la suppression du carrefour supérieur de chacun des cinq triangles, et des impasses qui se produisent, on est con-

Fig. 107.



Les trois réseaux à deux carrefours.

duit à la description de trois réseaux à deux carrefours D_1, D_2, D_3 (*fig.* 107), et l'on a

$$\begin{array}{l|l} T_1 = 6\,D_1 + 144\,D_2, & T_4 = 2\,D_2 + 4\,D_3, \\ T_2 = 2\,D_1 + 16\,D_2, & T_5 = D_1. \\ T_3 = 12\,D_2, & \end{array}$$

Enfin, comme dans le problème de la fourmi, on a

$$D_1 = 240, \qquad D_2 = 12, \qquad D_3 = 2.$$

En reprenant les calculs en sens inverse, on en déduit

$$T_1 = 3168, \quad T_2 = 672, \quad T_3 = 144, \quad T_4 = 32, \quad T_5 = 240;$$

puis, pour les quadrilatères,

$$\begin{array}{lll} Q_1 = 42048, & Q_2 = 43520, & Q_3 = 9024, \\ Q_4 = 1920, & Q_5 = 38016, & Q_6 = 1824; \end{array}$$

pour les pentagones,

$$\begin{array}{ll} P_1 = 601472, & P_2 = 585984, \\ P_3 = 127916, & P_4 = 122112; \end{array}$$

et, enfin, pour l'hexagone et l'heptagone,

$$\begin{array}{l} H = 86665088, \\ X = 129976320. \end{array}$$

Nous indiquerons, avant de terminer, les trois exercices suivants :

Exercice 1. — Les sommets consécutifs A et B d'un rectangle ABCD sont réunis par $(2p-1)$ chemins; les sommets C et D par $(2q-1)$ chemins; A et D, ainsi que B et C, sont réunis par un seul chemin. Le nombre des circuits du rectangle est égal à $2(2p-1)!(2q-1)!$

Exercice 2. — Le nombre des circuits de la figure formée par les côtés et les diagonales d'un polygone régulier de $(2n+1)$ côtés est égal au nombre des tracés en n traits et n sauts de la figure formée par les côtés et les diagonales d'un polygone régulier de $2n$ côtés.

Exercice 3. — Si l'on désigne par $2^n U_{2n}$ le nombre des circuits formés

Fig. 108.

par $2n$ circonférences (*fig.* 108) et par $2^{n+1} U_{2n+1}$ le nombre des circuits formés par $(2n+1)$ circonférences tangentes, on a les deux formules

$$U_{2n} = U_{2n-1} + U_{2n-2},$$

$$U_{2n-1} = 3U_{2n-2} + U_{2n-3};$$

et si l'on pose

$$U_{2n} = u_n, \qquad U_{2n-1} = u_n - u_{n-1},$$

il en résulte

$$u_n = 5u_{n-1} - u_{n-2},$$

formule de récurrence qui permet de calculer U_n.

SEPTIÈME RÉCRÉATION.

LA GÉOMÉTRIE DES RÉGIONS,
LE PROBLÈME GÉOGRAPHIQUE DES QUATRE COULEURS ET LES RÉSEAUX A POINTS TRIPLES.

A Monsieur Samuel Roberts.

« Les extrémités de nostre perquisition tumbent toutes en esblouissement ;... les plus grossières et puériles ravasseries se trouvent plus en ceulx qui traictent les choses plus haultes et plus avant, s'abysmants en leur curiosité et présumption. La fin et le commencement de science se tiennent en pareille bestise. »

(MONTAIGNE. — *Essais*, Liv. II, Chap. XII)

SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LA GÉOMÉTRIE DES RÉGIONS,
LE PROBLÈME GÉOGRAPHIQUE DES QUATRE COULEURS ET LES RÉSEAUX A POINTS TRIPLES.

Avant de donner l'énoncé et la solution de ce problème fort curieux, nous commencerons par exposer quelques considérations générales sur la division du plan en régions au moyen de droites ou de circonférences tracées sur ce plan, et la division de l'espace par les plans et les sphères. Ces questions se rapportent encore à la Géométrie de situation.

LES RÉGIONS.

Un point placé sur une droite indéfinie dans les deux sens la divise en deux fragments indéfinis ; deux points d'une droite la divisent en deux fragments indéfinis et un segment fini ; en général, n points d'une droite la divisent en deux fragments indéfinis et $(n-1)$ fragments finis ; donc, si l'on désigne par A le nombre des segments finis ou infinis, par a le nombre des segments finis, par α le nombre des segments infinis, et enfin par S le nombre des points considérés sur cette droite, on a les formules

$$A = a + \alpha, \qquad S = A - 1,$$
$$\alpha = 2, \qquad S = a + 1.$$

Une droite illimitée tracée dans un plan le divise en deux *régions* indéfinies, c'est-à-dire en deux parties telles qu'on ne peut aller d'un point de l'une à un point de l'autre sans rencontrer la droite, à la condition de ne pas sortir du plan. De même, des droites parallèles (*fig.* 109) divisent le plan en régions indéfinies

Fig. 109.

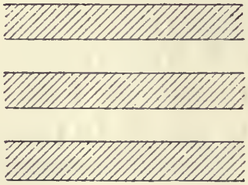
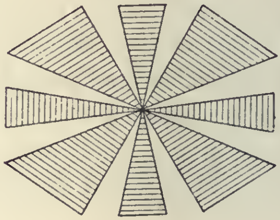


Fig. 110.



dont le nombre surpasse de l'unité le nombre des parallèles ; ces régions peuvent être garnies de deux couleurs, de telle sorte que deux régions voisines aient des couleurs différentes.

Un système de droites concourantes (*fig.* 110) divise le plan en régions indéfinies dont le nombre est égal au double du nombre des droites concourantes ; ces régions peuvent être recouvertes de deux couleurs, de telle sorte que de part et d'autre de chaque ligne de séparation, les couleurs soient différentes.

Des droites parallèles en nombre p et une transversale divisent le plan (*fig.* 111) en $(2p+1)$ régions illimitées.

Un système de p droites parallèles et un second système de q droites parallèles divisent le plan en $(p+1)(q+1)$ régions,

Fig. 111.

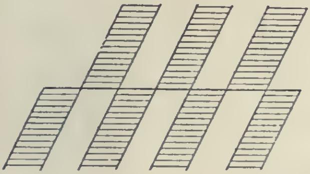


Fig. 112.

parmi lesquelles $2(p+q)$ d'entre elles sont illimitées; on peut encore les recouvrir de deux couleurs, de telle sorte que de part et d'autre de chaque ligne de séparation les couleurs soient différentes (*fig.* 112).

Si l'on prolonge les côtés d'un triangle (*fig.* 113), le plan est

Fig. 113.

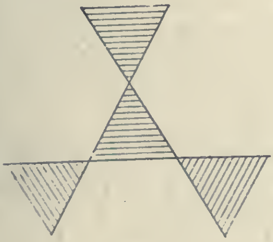
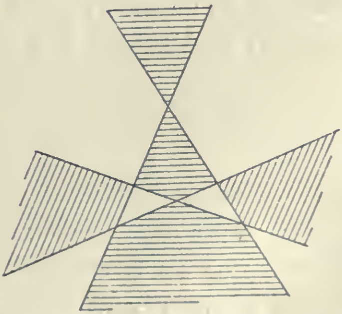


Fig. 114



divisé par les trois droites en sept régions dont six sont illimitées et une seule finie, qui est l'intérieur du triangle. Si l'on prolonge les côtés d'un quadrilatère quelconque, on forme onze régions dont huit sont illimitées (*fig.* 114). Lorsque l'on considère un plus grand nombre de droites, il faut tenir compte, en même temps, des points de concours et des segments ; pour évaluer les divers éléments de la figure, nous prendrons les notations suivantes :

Nombre des points de concours		S.
Nombre des segments	finis	a.
	infinis	α.
	finis et infinis	A.
Nombre des régions..	finies	f.
	infinies	φ.
	finies et infinies	F.

On a d'abord, par définition,

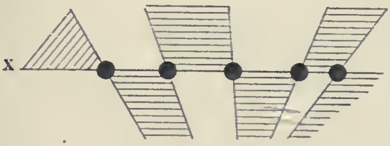
$$A = a + \alpha, \qquad F = f + \varphi ;$$

Cela posé, si l'on considère n droites d'un plan, non parallèles deux à deux, et telles que trois quelconques d'entre elles ne concourent pas en un même point, on a, en désignant par C_n^2 le nombre des combinaisons de n objets pris deux à deux,

$$\begin{aligned} S = C_n^2, \qquad & A = n^2, & \alpha = 2n, \\ & F = C_n^2 + n + 1, & \varphi = 2n. \end{aligned}$$

En effet, supposons ces formules vérifiées pour un système de n droites, et, par exemple, pour $n = 3$ et pour $n = 4$; nous allons démontrer que ces formules s'appliquent encore lorsque l'on trace une nouvelle droite XY non parallèle à l'une quelconque des précédentes et ne passant par aucun point de concours. Nous supposerons d'abord que la droite XY a été tracée, de telle sorte que tous les points d'intersection des premières droites soient au-dessous de XY (*fig.* 115). Nous calculerons les accroissements des cinq quantités S, A, α, F, φ; on voit d'abord que S augmente du nombre n des points situés sur XY, que α augmente des deux segments indéfinis de cette droite, que A augmente des $(n+1)$ segments de XY et des n segments finis des

Fig. 115.



n droites qui aboutissent à XY, ou au total de $(2n+1)$. Enfin, on constate que φ augmente des deux régions infinies au-dessous de XY, et que F augmente de ces deux régions et, en outre, des $(n-1)$ régions finies au-dessous de XY. Ce sont précisément les nombres dont augmentent les seconds membres des formules précédentes, lorsqu'on y remplace n par $(n+1)$; ces formules sont donc générales.

On voit, de plus, que l'adjonction de XY permet encore de recouvrir les régions situées au-dessus de XY de deux couleurs seulement et de telle sorte que deux régions adjacentes à un même segment soient garnies de couleurs différentes. En outre, il est facile de voir que les résultats précédents subsistent, lorsque la droite XY se déplace parallèlement à elle-même et traverse le point de concours de deux droites. Nous ferons d'ailleurs observer que ces résultats s'étendent à des figures tracées sur le plan, dans lesquelles les droites sont remplacées par des traits indéfinis dans les deux sens, tels que chacun d'eux ne se recourbe pas sur lui-même ; deux traits indéfinis qui ne se rencontrent pas seront considérés comme des droites parallèles ; de plus, deux traits indéfinis quelconques sont censés ne se rencontrer qu'en un seul point, en se traversant mutuellement. On peut aussi remplacer le plan par une surface simple indéfinie dans tous les sens, comme le plan gauche ou paraboloïde hyperbolique.

LES POINTS MULTIPLES.

Nous allons étudier les modifications qu'il faut apporter aux formules précédentes, lorsque p droites viennent concourir en un même point ou lorsque p droites deviennent parallèles.

1° Lorsque p droites viennent concourir en un même point, le nombre des points de concours diminue de $C_p^2 - 1$, puisque le nombre des points d'intersection de ces p droites ne compte plus que pour un seul point. Le nombre α des segments infinis et le nombre φ des régions infinies ne changent pas. Le nombre A des segments finis et infinis diminue de $(p^2 - 2p)$ et le nombre F des régions finies et infinies diminue de $(C_p^2 - p + 1)$.

2° Lorsque p droites deviennent parallèles, le nombre des points de concours diminue de C_p^2 ; le nombre F des régions finies et infinies diminue aussi de C_p^2 et le nombre A des segments finis et infinis diminue de $(p^2 - p)$.

Par conséquent, si l'on désigne par σ_1 le nombre des droites de direction unique, par σ_p le nombre des groupes contenant p droites parallèles, par s_p le nombre des points de concours de p droites, on a

$$(1)\qquad n = \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots + p\sigma_p + \ldots,$$

$$(2)\qquad \mathrm{S} = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_p + \ldots;$$

Si toutes les droites avaient des directions différentes, on aurait $\mathrm{S} = \mathrm{C}_n^2$, ainsi que nous l'avons vu ; donc, en tenant compte des diminutions, on a

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathrm{C}_n^2 = s_2 + 3s_3 + \ldots + \mathrm{C}_p^2 s_p + \ldots \\ + \sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots + \mathrm{C}_p^2 \sigma_p + \ldots; \end{aligned}$$

on trouve de même

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathrm{A} = 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ps_p + \ldots \\ + \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p + \ldots. \end{aligned}$$

On peut démontrer directement cette formule en observant que de chaque point de concours de p droites partent $2p$ segments, et que pour toute direction de p droites parallèles, il y a $2p$ segments indéfinis; d'ailleurs, ces segments sont tous comptés deux fois. Si l'on calcule F, on trouve la relation

$$(5)\qquad \mathrm{S} + \mathrm{F} = \mathrm{A} + 1,$$

que l'on peut vérifier *a posteriori*. Enfin, si f_p est le nombre des régions à p lignes de contour, on a les deux formules

$$(6)\qquad \mathrm{F} = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_p + \ldots.$$

$$(7)\qquad 2\mathrm{A} = f_1 + 2f_2 + \ldots + pf_p + \ldots.$$

Exercice 1. — Considérons q points tels que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite, et que quatre d'entre eux soient sur deux droites parallèles. Les droites qui les joignent se rencontrent en $3\,C_q^4$ nouveaux points; le nombre des segments finis et infinis sur chaque droite est égal à $C_{q-2}^2 + 3$; le nombre total des segments est

$$A = C_q^2\,C_{q-2}^2 + 3\,C_q^2,$$

d'où l'on tire, par la formule (5),

$$F = C_q^2\,C_{q-2}^2 + 3\,C_q^2 + 1 - q - 3\,C_q^4,$$

c'est-à-dire

$$F = \frac{1}{8}(q-1)(q^3 - 5q^2 + 18q - 8).$$

Autrement. — Le nombre des lignes de jonction étant $n = C_q^2$, le nombre des régions est

$$F = 1 + n + C_n^2 - q\left[1 - (q-1) + C_{q-1}^2\right],$$

parce que les droites se coupent au nombre de $q - 1$ en q points; on retrouve, après simplification, l'expression précédente.

Exercice 2. — Un système de n cercles partage le plan en $n(n-1)+2$ régions au plus, dont une seule est illimitée.

Exercice 3. — Si l'on trace dans un plan n systèmes de cercles concentriques contenant respectivement $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ circonférences, le plan sera partagé en $1 + 2\,\Sigma c_1 c_2$ régions, au plus, dont une seule est illimitée.

Exercice 4. — Si l'on trace dans un plan n systèmes de cercles concentriques et m systèmes de parallèles en nombre $a_1, a_2, \ldots, a_m$, et si l'on fait

$$A = \Sigma a_1, \qquad A' = \Sigma c_1,$$
$$B = \Sigma a_1 a_2, \qquad B' = \Sigma c_1 c_2,$$

le plan sera partagé au plus en

$$1 + A + B + 2\,AA' + 2\,B'$$

régions, dont $2\,B$ au plus sont illimitées.

Si l'on ajoute b droites et d circonférences quelconques, le nombre précédent augmente de $C_b^2 + 2\,C_d^2$.

Les trois théorèmes précédents sont dus à Steiner.

LES POLYÈDRES.

Nous commencerons par démontrer le théorème suivant (1) :

Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de deux est égal au nombre des faces augmenté du nombre des sommets. En d'autres termes, si l'on désigne respectivement par A, F, S les nombres des arêtes, des faces et des sommets du polyèdre, on a l'égalité

$$F + S = A + 2.$$

Considérons d'abord une surface polyédrale convexe ouverte, terminée à une ligne brisée plane ou gauche. Si l'on conserve les notations précédentes, les éléments de cette surface vérifieront la relation

$$F + S = A + 1.$$

En effet, cette formule est exacte dans le cas d'une seule face; car, pour un polygone, $F = 1$ et $S = A$. Il suffit donc de prouver que la formule étant vérifiée pour un certain nombre F de faces, l'est encore pour une face en plus. Pour cela, modifions la ligne brisée qui termine la surface polyédrale, en ajoutant à cette surface un polygone ayant m côtés et m sommets. Cette nouvelle face laisse encore la surface ouverte, et son contour ne pourra coïncider entièrement avec celui de la ligne terminale primitive; si elle touche cette ligne par p arêtes communes, elle aura avec

(1) Ce remarquable théorème est habituellement attribué à Euler (*Novi comm. Petrop.*, 1752); on le trouve dans les *Œuvres inédites* de Descartes, publiées par M. Foucher de Careil (t. II, p. 214; Paris, 1860). La démonstration que nous donnons ici est due à Cauchy.

elle $(p+1)$ sommets communs. En désignant par A', F', S' le nombre des arêtes, des faces et des sommets de la nouvelle surface polyédrale, on aura donc

$$F' = F + 1, \quad S' = S + m - (p+1) \quad A' = A + m - p,$$

et par suite

$$F' + S' = A' + 1.$$

Et ainsi de suite, tant qu'on ne fermera pas le polyèdre.

Cela posé, revenons au cas d'un polyèdre convexe ; pour obtenir une surface polyédrale, il suffit d'enlever une face, ce qui ne modifie pas le nombre des sommets et des arêtes ; donc la relation proposée est vérifiée.

Si l'on désigne par f_p le nombre des faces à p arêtes, par s_p le nombre des sommets des angles polyèdres à p arêtes, on a les formules

$$\begin{aligned} F &= f_3 + f_4 + \ldots + f_p + \ldots, \\ S &= s_3 + s_4 + \ldots + s_p + \ldots, \\ 2A &= 3f_3 + 4f_4 + \ldots + pf_p + \ldots, \\ 2S &= 3s_3 + 4s_4 + \ldots + ps_p + \ldots ; \end{aligned}$$

on en déduit facilement

$$\begin{aligned} 2F &= 4 + s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \ldots, \\ 2S &= 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots . \end{aligned}$$

Si l'on conçoit la surface d'un polyèdre convexe décomposée en plusieurs portions, chaque portion étant une face seule, le théorème de Descartes a lieu entre le nombre des portions dont il s'agit, et l'on retrouve les théorèmes sur les réseaux géométriques.

Exercice 1. — Il n'existe aucun polyèdre convexe qui ne renferme au moins une face triangulaire ou un angle trièdre. — On a, en effet, la formule

$$F_3 + S_3 = 8 + f_5 + s_5 + 2(f_6 + s_6) + \ldots.$$

Exercice 2. — Il n'existe aucun polyèdre convexe dont toutes les faces aient plus de cinq côtés ou dont tous les angles polyèdres aient plus de cinq arêtes.

Exercice 3. — L'angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre des sommets diminué de deux.

Exercice 4. — Trouver le nombre des diagonales d'un polyèdre convexe. — Si l'on pose

$$L = f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots,$$
$$M = 1.3.f_3 + 2.4.f_4 + 3.5f_5 + \ldots.$$

et si l'on désigne par D le nombre des diagonales, on a

$$8D = (L+2)(L+4) - 4M.$$

Exercice 5. — Le nombre des régions formées par n plans quelconques, tels que trois d'entre eux ne soient pas parallèles à une même droite et que quatre ne passent pas par un même point, est

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3,$$

et les régions fermées sont en nombre C_{n-1}^3.

Exercice 6. — Trouver le nombre des régions limitées par des systèmes de plans parallèles. — Si l'on désigne par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les nombres des plans parallèles dans chaque système, par A, B, C leur somme, la somme de leurs produits deux à deux, la somme de leurs produits trois à trois, le nombre des régions est $1 + A + B + C$, dont $2B + 2$ sont sans bornes, et les autres forment des solides.

Exercice 7. — Des systèmes de plans parallèles et m plans quelconques partagent l'espace en un nombre de régions qui ne surpasse pas

$$1 + A + B + C + AC_{m+1}^2 + Bm + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3;$$

les régions incomplètement bornées sont en nombre

$$2 + 2B + 2mA + m(m-1).$$

Exercice 8. — On considère des systèmes de plans parallèles $p_1, p_1, \ldots, p_n$, et de sphères concentriques $s_1, s_2, \ldots$, et l'on désigne par A, B, C et par A′, B′, C′ les sommes des nombres p et s pris un à un, deux à deux, trois à trois ; cet ensemble partage l'espace en un nombre de régions au plus égal à

$$1 + A + B + C + 2(AB' + BA') + 2A' + 2C'.$$

Les régions illimitées sont au nombre de $2B + 2$.

Exercice 9. — Le système formé par n plans quelconques (tels que trois d'entre eux ne soient pas parallèles à un même plan et que quatre d'entre eux ne passent pas par un même point) et m sphères quelconques partage l'espace en un nombre de régions au plus égal à

$$1 + n + C_n^2 + C_n^3 + mn(n-1) + 2m + 2C_m^3.$$

Les régions illimitées sont au nombre de $2 + 2n(n-1)$.

LES POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES.

Il ne peut exister que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre p de côtés et dont tous les angles polyèdres aient le même nombre q d'arêtes. En effet, on a

$$2A = pF = qS,$$

et par suite la formule de Descartes donne

$$F = \frac{4q}{2(p+q) - pq}.$$

Puisque F doit être entier et positif, on ne peut faire que les hypothèses $p = 3, 4, 5$ renfermées dans le Tableau suivant :

p	q	FACES	SOMMETS	CRÊTES	DIAGONALES	POLYÈDRE
3	3	4	4	6	0	Tétraèdre.
3	4	8	6	12	3	Octaèdre.
4	3	6	8	12	4	Hexaèdre.
3	5	20	12	30	36	Icosaèdre.
5	3	12	20	30	100	Dodécaèdre.

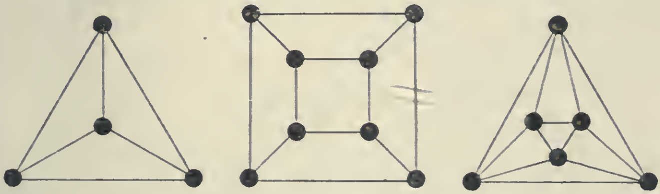


Fig. 116. — Perspectives du tétraèdre, de l'hexaèdre et de l'octaèdre.

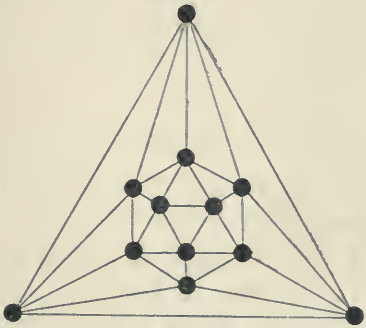


Fig. 117. — Perspective de l'icosaèdre.

Lorsque les faces de ces polyèdres sont des polygones réguliers, les polyèdres sont eux-mêmes réguliers (*fig.* 116 et 117). Il n'y a donc que cinq polyèdres réguliers convexes.

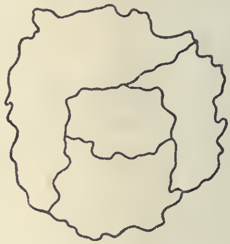
LE PROBLÈME GÉOGRAPHIQUE DES QUATRE COULEURS [1]

LE COLORIAGE DES CARTES.

En jetant les yeux sur une carte de Géographie ou sur un globe terrestre, on y voit immédiatement un certain nombre de lignes de démarcation, frontières ou limites, qui la divisent en contrées,

Fig. 118.

Fig. 119.



provinces, départements, comtés, gouvernements ou districts, etc.; puis, d'autres lignes qui représentent les fleuves, les rivières, les canaux, les routes et les chemins de fer. Souvent il arrive que la multiplicité de ces dernières rend très difficile la distinction des unes et des autres. Dans les cas où il importe que cette distinction soit nettement accentuée, les géographes recouvrent les départements de différentes couleurs, de telle sorte que les limites de ceux-ci sont clairement marquées par les endroits où commence

[1] *Revue scientifique*, 3e série, t. XXXII, p. 11 (nº du 7 juillet 1883).

une couleur et où une autre finit; alors il devient possible de supprimer les lignes de démarcation. Si l'on n'a d'autre but que la clarté, il est évidemment inutile de colorier différemment deux districts non adjacents; on peut même, sans nuire à la clarté et tout en supprimant les lignes de démarcation, affecter la même couleur à des départements ayant en commun un ou plusieurs points, à la condition que ces points soient isolés les uns des autres. et, par conséquent, en nombre fini (*fig.* 118).

LES SURFACES SIMPLES.

Cette méthode de coloriage peut s'appliquer à la représentation d'une surface, de forme quelconque, divisée en districts; cependant nous bornerons notre étude au plan et à la sphère, et plus généralement au cas des *surfaces simples*. Si l'on trace sur le plan ou sur la sphère un circuit fermé de forme quelconque, celui-ci divise la surface en deux régions telles qu'on ne peut aller d'un point de l'une à un point de l'autre, en cheminant sur la surface, sans traverser la ligne fermée. Il n'en est pas toujours ainsi, et, par exemple, pour la surface d'un anneau, de l'anneau de Saturne, etc. En Géométrie, la surface de l'anneau se nomme *tore;* de même que la surface de la sphère est engendrée par la révolution d'une circonférence autour de son diamètre, on engendre la surface de l'anneau en faisant tourner une circonférence (ou une ellipse) autour d'une droite extérieure située dans son plan.

SUR L'ANNEAU DE SATURNE.

Le tore n'est pas une surface simple; en effet, si l'on trace sur la surface soit la circonférence génératrice dans l'une de ses positions, soit le parallèle engendré par un point de cette circonférence, l'une de ces deux lignes fermées ne divise pas la surface. Il est, en effet, facile de reconnaître que l'on peut aller d'un point quelconque de celle-ci à un autre point quelconque, sans rencontrer l'une ou l'autre de ces deux lignes. Bien plus, ces deux lignes prises simultanément ne forment pas de régions. Cependant deux positions de la circonférence génératrice, ou deux parallèles, divisent l'anneau en deux régions, tandis que deux circuits fermés, sur le plan ou sur la sphère, les divisent en trois ou quatre régions, au moins (1).

Considérons maintenant une surface ou une portion de surface simple, divisée en districts d'une manière arbitraire; recouvrons au hasard, d'une première couleur, autant de districts non adjacents que nous pourrons; puis, passons à une autre couleur pour recouvrir d'autres districts non adjacents, et ainsi de suite. En procédant ainsi, il faudrait un assez grand nombre de couleurs pour colorier la carte; mais, avec un peu d'attention, on peut réduire le nombre de celles-ci. D'ailleurs, il est évident que le système de coloriage sera d'autant plus économique que l'on emploiera le moins grand nombre de couleurs, tant à cause de la diversité des couleurs que de la répétition du tirage pour l'impression d'une même carte.

(1) On peut diviser la surface de l'anneau de Saturne en six régions toutes adjacentes, de telle sorte qu'il faudrait au moins six couleurs pour les distinguer les unes des autres.

LE PROBLÈME DE GUTHRIE.

On observera d'abord que quatre couleurs sont nécessaires pour le coloriage d'une carte ou d'un globe terrestre; par exemple, dans le cas d'un district entouré de trois autres (*fig.* 119); mais, depuis longtemps, les éditeurs de cartes géographiques avaient reconnu, comme un fait expérimental, que quatre couleurs suffisent dans tous les cas. Cette assertion fut émise pour la première fois par Guthrie, puis par le professeur de Morgan; mais il n'existait pas de démonstration connue de ce fait. M. Cayley, professeur de l'Université de Cambridge, avait précisé la question à la Société mathématique de Londres, le 13 juin 1878; puis, dans une courte communication à la Société royale de Géographie [1], il indiquait en quoi consistait la difficulté du problème, en ajoutant, toutefois, qu'il n'avait pas encore trouvé de démonstration satisfaisante. On se rend compte de ces difficultés en observant qu'une très petite modification des lignes de démarcation oblige souvent à modifier le coloriage d'une manière complète; mais cette remarque ne suffit pas pour résoudre le problème.

Un géomètre anglais, M. Kempe, a donné en 1879 une démonstration satisfaisante et fort ingénieuse de la proposition empirique de Guthrie; sur la demande de M. Sylvester, professeur de l'Université J. Hopkins, à Baltimore, et rédacteur en chef de *the American Journal of mathematics*, M. Kempe a publié dans ce journal un article très intéressant sur le sujet qui nous oc-

[1] *Proceedings of the Royal geographical Society*, t. I, p. 259.

cupe ([1]). M. William E. Story l'a fait suivre de remarques importantes. Nous donnons ci-après le résumé des considérations développées par ces deux éminents géomètres.

THÉORÈME DU COLORIAGE.

Nous allons donc exposer la démonstration de la proposition suivante, et nous engageons le lecteur à ne pas s'effrayer du modeste appareil de nos formules mathématiques, car les trois premières règles suffisent ici, et ces formules ne sont d'ailleurs que la sténographie d'un raisonnement qu'il serait trop long d'écrire en toutes lettres :

Quel que soit le mode de division d'une carte (ou d'un globe) représentant la terre, un continent, un royaume, en territoires, départements, districts, il suffit de quatre couleurs pour colorier cette carte, avec cette seule condition que deux districts ayant une limite commune soient recouverts de couleurs différentes.

Ainsi quatre couleurs suffisent pour distinguer clairement les uns des autres les départements, les arrondissements ou même les cantons de la France, les gouvernements de la Russie, les comtés de l'Angleterre, les États de l'Amérique du Nord, etc.

([1]) *On the geographical problem of the four colours*, by A.-B. Kempe, B.-A., London. — *Note on the preceding paper*, by William F. Story (*Journal de Sylvester*, t. II, p. 193 et suivantes).

DIVISION DE LA CARTE.

Supposons que l'on considère d'abord une surface plane de forme quelconque, divisée arbitrairement en districts, mais telle qu'on ait pu la recouvrir de quatre couleurs, conformément à la condition imposée ; nous aurons divisé la carte en districts coloriés, par exemple, en *rouge,* en *vert,* en *bleu* et en *jaune.*

Fig. 120.

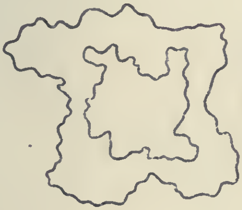


Fig. 121.

Prenons à part les districts recouverts de deux quelconques de ces quatre couleurs; si nous choisissons les districts *rouges* et *verts,* nous observerons qu'ils forment une ou plusieurs régions détachées, c'est-à-dire n'ayant aucune ligne de démarcation commune (*fig* .120 et 121), bien que pouvant se rencontrer en un ou plusieurs points. Il est clair que, dans l'une de ces régions, dans quelques-unes, ou dans leur ensemble, nous pouvons échanger les couleurs rouge et verte, et la carte restera coloriée conformément à la condition imposée. Les régions formées par les districts rouge et vert entoureront d'autres régions, formées des districts jaune et bleu, ou seront entourées par celles-ci ; on pourra aussi échanger les couleurs *jaune* et *bleue* dans une région, dans plusieurs, ou dans la totalité, sans nuire à la condition imposée.

CARREFOUR DE QUATRE FRONTIÈRES.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque les lignes de démarcation de trois districts, ou plus, se rencontrent en un même point que nous appellerons *point de concours*.

Si trois districts ont un point commun, il faut évidemment

Fig. 122.

trois couleurs différentes pour les colorier. Si quatre districts se réunissent en un même point, on peut, s'il n'y en pas d'autres, les colorier avec deux ou trois couleurs seulement; mais quelquefois on pourra se trouver amené à les colorier avec quatre couleurs; supposons qu'il en soit ainsi, comme dans la *fig.* 122. Nous allons montrer qu'en modifiant le coloriage des districts voisins, on peut n'employer que trois couleurs. En effet : 1° si les districts *a* et *c* appartiennent à des régions (rouge et vert) différentes, nous pouvons échanger les couleurs rouge et verte dans l'une de ces régions, sans les échanger dans l'autre; il en résultera que les districts *a* et *c* seront de la même couleur, tous deux rouges ou tous deux verts; 2° si les districts *a* et *c* appartiennent à une même région (rouge et vert), celle-ci formera un anneau comme dans la *fig.* 121; par suite, les districts *b* et *d* se trouveront dans des régions (bleu et jaune) différentes, de telle sorte que l'on pourra échanger les couleurs bleue et jaune dans l'une de ces régions sans les échanger dans l'autre; il en résultera que les districts *b* et *d* seront de la même couleur, tous deux jaunes ou tous deux bleus. Ainsi l'on peut toujours réduire à trois le nombre des couleurs de quatre districts ayant un point commun.

CARREFOUR DE CINQ FRONTIÈRES.

Il en est de même au point de concours de cinq lignes de dé-

Fig. 123.

marcation. Lorsque cinq districts ont un point commun, on peut les colorier avec trois couleurs seulement; mais ils peuvent l'être avec quatre. Dans ce dernier cas, la *fig.* 123 montre la seule forme que le coloriage puisse prendre, l'une des couleurs se présentant nécessairement deux fois. 1° Si les districts *a* et *c* appartiennent à des régions jaune et rouge différentes, on pourra faire une modification du coloris, de telle sorte que *a* et *c* soient tous deux jaunes ou tous deux rouges; 2° si les districts *a* et *c* appartiennent à la même région jaune et rouge, et si *a* et *d* appartiennent à des régions rouge et verte différentes, on modifiera le coloriage sur l'une d'elles, de telle sorte que *a* et *d* soient tous deux rouges ou tous deux verts; 3° si les districts *a* et *c* appartiennent à la même région jaune et rouge, et si les districts *a* et *d* appartiennent à la même région verte et rouge, ces deux régions sépareront *b* de *c*, de telle sorte que les régions verte et bleue auxquelles appartiennent le district *b* d'une part et les districts *d* et *e* d'autre part soient nécessairement différentes, et que les régions jaune et bleue auxquelles appartiennent le district *e* d'une part, et *b* et *c* d'autre part soient aussi différentes. Donc, si l'on échange le bleu et le vert dans la région *b*, et le jaune et le bleu dans la région *e*, *b* deviendra vert, *e* deviendra jaune, *a, c, d* ne changeront pas de couleur. Dans chacun des trois cas, les trois districts n'auront que trois couleurs.

Ainsi, lorsqu'une carte peut être coloriée en quatre couleurs, on peut toujours en modifier convenablement le coloriage, de telle sorte que si quatre ou cinq districts, et non plus, ont un point commun, ces districts peuvent être recouverts, au plus, de trois couleurs différentes. Nous démontrerons, plus loin, que l'on peut toujours disposer le coloriage avec cette condition restrictive, pour une carte quelconque.

LA CONTEXTURE D'UNE CARTE.

Laissons de côté, pour l'instant, la question de coloriage, et étudions les divers détails de construction de la carte. Elle peut présenter des *districts-îles*, ou districts isolés ayant une seule ligne de démarcation (*fig.* 124); des *régions-îles* (*fig.* 125),

Fig. 124.

Fig. 125.

composées d'un certain nombre de districts; des *districts-péninsules* (*fig.* 126) ayant une seule ligne de démarcation et un seul

Fig. 126

Fig. 127.

point de concours; des *régions-péninsules* (*fig.* 127), des *districts complexes* comprenant des îles et des péninsules; enfin des *districts simples* (*fig.* 128) qui n'en comprennent pas, et qui ont autant de lignes de démarcation que de points de concours. On observera qu'à l'exception des limites fermées, comme dans

Fig. 128.

la *fig.* 124, et de celles qui ont un seul point de concours, comme dans la *fig.* 126, chaque ligne de démarcation aboutit à deux points de concours et appartient en outre à deux districts.

LA GARNITURE DES PIÈCES.

Prenons un morceau de papier et découpons-le suivant la forme d'un district quelconque (district simple, district-île ou district-péninsule), mais en lui donnant des dimensions un peu plus grandes, de telle sorte qu'il recouvre les lignes de démarcation qui bornent ce district. Fixons, sur la carte, ce morceau de papier, que nous appellerons *pièce;* prenons un point quelconque à l'intérieur et prolongeons les lignes de démarcation qui aboutissent au district, jusqu'à ce point, par des lignes qui ne s'entre-croisent pas; ces lignes de démarcation existent toujours, sauf dans le cas d'une île; s'il n'existe que deux lignes de démarcation rencontrant la pièce, ce qui est le cas d'un district-péninsule, on les réunit par une ligne traversant la pièce; sans qu'il soit besoin de considérer un point de concours. Ceci fait, la carte possède un district de moins, et le nombre des lignes de démarcation diminue en même temps. La *fig.* 129 représente le district avant

Fig. 129.

Fig. 130.

la fixation de la pièce désignée par une ligne ponctuée; la *fig.* 130 montre les nouvelles lignes tracées sur la pièce jusqu'à leur point de concours pris à l'intérieur de celle-ci.

On répète l'application des pièces tant qu'il reste des districts simples, en observant que les pièces peuvent être recouvertes par d'autres, partiellement, dans certains cas. De même, en appliquant le procédé aux districts-îles et aux districts-péninsules, nous finirons par nous débarrasser de chacun des districts situés sur la carte; celle-ci se trouvera réduite à un district unique dépourvu de lignes de démarcation et de points de concours. La carte sera complètement garnie de pièces.

DÉVELOPPEMENT DE LA CARTE.

Maintenant, renversons le procédé, et enlevons les pièces dans l'ordre inverse de leur placement, c'est-à-dire ôtons d'abord celle qui a été placée la dernière, puis celle qui a été placée l'avant-dernière, et ainsi de suite; à mesure que nous enlevons une pièce, nous découvrons un district, et la carte se trouvera développée par degrés successifs. Désignons, à une phase quelconque du développement, par F le nombre des districts, par A le nombre des lignes de démarcation, par S le nombre des points de concours de la carte, et par les mêmes lettres accentuées les nombres qu'on obtient en ôtant la pièce suivante :

1° Si la pièce enlevée ne possède ni ligne de démarcation ni

Fig. 131.

Fig. 132.

point de concours, c'est-à-dire si l'on a découvert une île, on a évidemment

$$S' = S, \quad F' = F + 1, \quad A' = A + 1.$$

2° Si la pièce enlevée n'a pas de point de concours, mais une ligne unique, c'est-à-dire si l'on a découvert une péninsule (*fig.* 126) ou un district avec deux lignes de démarcation, comme dans la *fig.* 131, on a, dans le premier cas,

$$S' = S + 1, \quad F' = F + 1, \quad A' = A + 2,$$

et, dans le second, en supposant distinctes les lignes de démarcation de part et d'autre du district (*fig.* 131)

$$S' = S + 2, \quad F' = F + 1, \quad A' = A + 3.$$

3° Si la pièce enlevée possède un point de concours où aboutissent λ lignes de démarcation et si le district découvert après l'enlèvement de la pièce a μ lignes de démarcation, on a

$$S' = S + \mu - 1, \quad F' = F + 1, \quad A' = A + \mu.$$

Dans chacun de ces trois cas, on déduit facilement

[*a*] $$S' + F' - A' - 1 = S + F - A - 1.$$

4° Si la pièce enlevée n'a pas de point de concours, mais une ligne unique faisant partie de la ligne de démarcation d'un district-île sur la carte garnie de pièces, de telle sorte qu'après l'enlèvement de la pièce on découvre une des formes des *fig.* 118 et 132, nous avons, dans le premier cas,

$$S' = S + 1, \quad F' = F + 1, \quad A' = A + 1;$$

et, dans le second,

$$S' = S + 2, \quad F' = F + 1, \quad A' = A + 2.$$

Par suite, dans l'un ou l'autre de ces deux cas,

[*b*] $$S' + F' - A' - 1 = S + F - A.$$

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE DESCARTES.

Nous appellerons *contour* un assemblage de lignes de démarcation telles que deux quelconques d'entre elles sont réunies, soit directement, soit par d'autres lignes du même contour, mais ne se rattachent sur la carte à aucune autre ligne de démarcation; le contour sera simple ou complexe, suivant qu'il se composera d'une ou de plusieurs lignes de démarcation. Chaque contour peut être considéré comme formant une carte partielle isolée sur la carte, et que l'on peut colorier conformément à la condition imposée. Par le procédé de M. Kempe, nous arriverons nécessairement, en garnissant la carte de pièces, à l'une des formes des *fig.* 132 et 118, puis à une île; enfin celle-ci disparaîtra. Dans la marche inverse, on a, à la première phase du développement,

$$S = 0, \quad F = 1, \quad A = 0,$$

et, par suite

$$S + F - A - 1 = 0;$$

à la deuxième phase, d'après la relation [a],

$$[1] \qquad S + F - A - 1 = 0;$$

à la troisième phase, d'après la relation [b],

$$S + F - A - 1 = 1,$$

et à chacune des phases suivantes, d'après la relation [a],

$$[2] \qquad S + F - A - 1 = 1,$$

Dans le cas d'une carte formée seulement d'un contour simple, la première et la deuxième phase existent, et la relation [1] a lieu. Mais si la carte se compose de C contours *complexes*, on a la relation

$$[3] \qquad S + F - A - 1 = C,$$

c'est-à-dire que, *dans toute carte tracée sur une surface simple, la somme des nombres des points de concours et des districts surpasse de l'unité la somme des nombres des lignes frontières et des contours complexes.*

THÉORÈME DE KEMPE.

Désignons, à une phase quelconque du développement, par $f_1, f_2, f_3, \ldots$, le nombre des districts qui ont 1, 2, 3, ... lignes de démarcation, par s_2, s_3, s_4, ..., le nombre des points de concours où aboutissent 2, 3, 4, ... lignes de démarcation, nous aurons

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots,$$
$$S = s_2 + s_3 + s_4 + \ldots,$$

et, puisque chaque ligne de démarcation appartient à deux districts,

$$2\,A = f_1 + 2\,f_2 + 3\,f_3 + \ldots.$$

D'autre part, puisque chaque ligne de démarcation aboutit à deux points de concours, excepté dans le cas des îles qui n'ont pas de point de concours, et des péninsules qui n'en ont qu'un, on aura, en désignant par μ_0 le nombre des îles et par μ_1 le nombre des péninsules (¹),

$$2\,A = 2\,\mu_0 + \mu_1 + 2\,s_2 + 3\,s_3 + \ldots;$$

mais la relation [3] prend la forme

$$(6\,F\,2 - A) + (6\,S - 4\,A) - 6\,(C + 1) = 0,$$

on a donc

$$5\,f_1 + 4\,f_2 + 3\,f_3 + 2\,f_4 + f_5 - \ldots = 0.$$

Les cinq premiers termes de la relation précédente sont seuls positifs; par suite, l'une au moins des quantités f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ne peut être nulle; par conséquent, *dans toute carte tracée sur une surface simple, il existe au moins un district ayant moins de six frontières.*

LES PIÈCES AUXILIAIRES.

Nous observerons maintenant qu'un point de concours où aboutissent plus de trois lignes de démarcation peut être remplacé par un certain nombre de points de concours où se rencontrent trois lignes au plus; en effet, fixons sur ce point de concours une petite pièce circulaire entourée d'une petite circonférence dont on supprime les parties qui forment les lignes de démarcation entre cette pièce et l'un quelconque des districts adjacents.

(¹) Un point de concours où aboutissent deux lignes de démarcation compte pour 1 dans s_2 et pour 2 dans μ_1.

Le nombre des districts de la carte n'est pas modifié par cette pièce, que nous appellerons *pièce auxiliaire*, puisque celle-ci doit être considérée comme une extension de l'un des districts.

Cela posé, on commence tout d'abord par modifier la carte, en plaçant des pièces auxiliaires sur tous les points de concours où se réunissent plus de trois lignes de démarcation; puis on garnit de pièces la carte modifiée, en couvrant toujours un district ayant moins de six frontières, et fixant une pièce auxiliaire sur chaque point de concours où aboutissent quatre ou cinq lignes de démarcation. Dans ce procédé, il n'y aura pas de nouveaux points de concours ayant plus de cinq lignes de démarcation, et deux pièces auxiliaires ne seront jamais placées l'une sur l'autre, après que le premier district aura été recouvert.

PRATIQUE DU COLORIAGE.

Nous arriverons donc à une carte n'ayant plus qu'un seul district, sans aucune ligne de démarcation, que nous recouvrirons de l'une quelconque des quatre couleurs. Puis, en développant la carte dans l'ordre inverse, en tenant compte des pièces auxiliaires, on peint chaque district à mesure qu'il est découvert. Supposons qu'à une phase quelconque du développement, la carte ait été coloriée avec quatre couleurs seulement. En ôtant la pièce suivante, on doit considérer deux cas : 1° si l'on enlève une pièce ordinaire, on découvrira un district sans aucune ligne de démarcation, ou ayant une ligne, et pas de point de concours, ou présentant un point de concours auquel aboutissent au plus trois lignes de démarcation ; donc, ce district sera entouré au plus de trois autres, et l'une au moins des quatre couleurs servira à le colorier; 2° si l'on enlève une pièce auxiliaire, on découvrira un point de concours auquel aboutissent quatre ou cinq lignes de démarcation, et pas plus de cinq districts. Les couleurs de ces districts seront prolongées sur leurs portions découvertes, jusqu'au point de concours, et l'on pourra réduire le nombre des couleurs à trois seulement par le procédé que nous avons indiqué plus haut. En ôtant la pièce suivante, celle sur laquelle est le point de concours que l'on avait garni de la pièce auxiliaire, on découvrira un district ayant quatre ou cinq lignes de démarcation, et entouré au plus de cinq districts à deux ou trois couleurs; il reste donc une couleur à notre disposition pour le district découvert. Ainsi, à une phase quelconque du développement, la carte est toujours coloriée en quatre couleurs au plus. C. Q. F. D.

Avant de colorier la carte, on a le soin de désigner les couleurs, au crayon, par les chiffres 1, 2, 3, 4; car on doit à certains moments changer le coloriage.

On peut encore démontrer que l'*on peut colorier une carte en s'imposant la condition de n'avoir que trois couleurs au plus, à chaque point de concours*. En effet, fixons en chacun de ces points une petite pièce circulaire; nous avons ainsi une nouvelle carte dans laquelle ces petites pièces jouent le rôle de districts; colorions alors toute la carte, puis enlevons les petites pièces, en complétant le coloriage des parties enlevées. Puisque trois couleurs, au plus, entouraient chaque pièce, il n'y en aura pas plus de trois en chaque point de concours.

CAS PARTICULIERS.

Il y a lieu, en terminant, de signaler deux cas particuliers.

I. — Lorsque, sans compter les îles et les péninsules, chaque district est adjacent à un nombre pair d'autres districts, trois couleurs suffisent pour colorier la carte.

II. — Lorsque les lignes de démarcation qui aboutissent à chaque point de concours sont en nombre pair, il suffit de deux couleurs. Ce genre de cartes s'obtient en traçant un certain nombre de lignes continues qui se coupent un nombre quelconque de fois. Dans ce cas, l'ensemble des lignes frontières peut être décrit d'un seul trait continu, sans arrêt ni répétition, ainsi que nous l'avons démontré dans notre Récréation sur *le Jeu des ponts et des îles* (t. I, p. 35).

LE PROBLÈME DES LIAISONS.

A la fin du Mémoire cité, M. Kempe ajoute encore les considérations suivantes : Si l'on place sur une carte une feuille de papier à calquer, si l'on marque un point à l'intérieur de chacun des districts et si l'on joint par des lignes les points qui correspondent aux districts ayant une frontière commune, on obtient un diagramme de *jonction* ou de *liaison*. On peut alors se proposer le problème de marquer les points du diagramme par le plus petit nombre possible de lettres, mais de telle sorte que les deux points placés aux extrémités d'une ligne de jonction ne soient pas affectés de la même lettre. La classification des diagrammes d'après la valeur de n a une importance considérable sur laquelle nous reviendrons plus tard. Nous nous bornerons à faire observer, pour l'instant, que le diagramme de liaison d'une carte et cette carte elle-même peuvent être considérés comme les représentations de deux polyèdres polaires réciproques.

Enfin M. Kempe termine par l'énoncé d'un théorème qui est une conséquence du théorème du coloriage; j'en ai longtemps cherché, dit-il, une démonstration directe pour en déduire la solution du problème des quatre couleurs. Ce théorème est le suivant: *Un polyèdre quelconque étant donné, on peut ajouter aux faces de ce polyèdre d'autres polyèdres, de telle sorte que, dans le polyèdre résultant : 1° toutes les faces soient des triangles; 2° les nombres des arêtes aboutissant à chaque sommet soient des multiples de trois.*

LES RÉSEAUX A POINTS TRIPLES.

Nous ajouterons ici quelques considérations fort ingénieuses qui ont été indiquées à diverses reprises par M. Tait, l'éminent professeur de l'Université d'Édimbourg [1].

(1) TAIT, *Note on a theorem in geometry of position* (*Transactions of the Royal Society*), p. 657. Edimbourg, 1880. — *Listing's Topologie*, by Prof. TAIT. — *Introductory address to the Edinburgh mathematical Society*, nov. 1883 (*Philos. Mag.*, janv. 1884).

THÉORÈMES DE TAIT.

Considérons un réseau dont les carrefours ne contiennent que des points triples ; ces points tous impairs, sont en nombre pair ; nous désignerons par $2n$ le nombre des points ; le nombre des chemins est égal à $3n$. Nous dirons que le réseau possède un *isthme* (*fig.* 133), lorsque la suppression du chemin correspon-

Fig. 133.

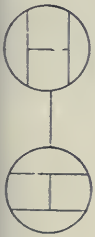


Fig. 134.

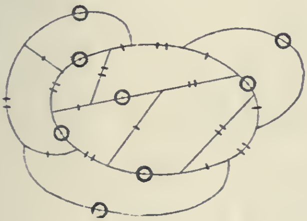
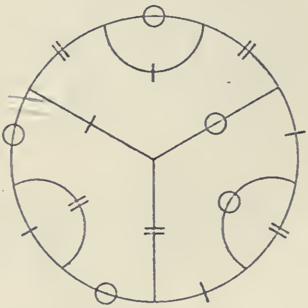


Fig. 135.



dant formé par l'isthme désagrège le réseau. Cela posé, on a le théorème suivant : *Dans un réseau à points triples, sans isthmes, on peut partager les $3n$ chemins en trois groupes de n chemins, de telle sorte que les trois chemins qui aboutissent à un même carrefour ou trivium quelconque appartiennent à trois groupes différents.* En d'autres termes, les n chemins de chaque groupe aboutissent aux $2n$ points donnés.

Nous désignerons ces groupes par O, I, II, ainsi que nous l'avons fait (*fig.* 134 et 135). Le théorème n'a pas lieu lorsqu'un réseau partiel contenant un nombre impair de points est relié par un isthme au reste du réseau.

On peut encore énoncer le théorème précédent sous la forme suivante : *Les arêtes d'un polyèdre n'ayant pour sommets que des angles trièdres peuvent être divisées en trois groupes de telle sorte qu'une arête de chaque groupe aboutisse à chacun des sommets.* Il en est ainsi pour le tétraèdre, pour le cube et pour le dodécaèdre; mais on doit encore observer avec l'auteur que, sous cette seconde forme, le nouvel énoncé est plus particulier que le précédent, et ne s'appliquerait à la *fig.* 135 pour laquelle le premier énoncé se vérifie. Cette figure ne peut être, en effet, considérée comme la déformation ou la représentation d'un polyèdre, à moins d'étendre le nom de polyèdre à des solides tels qu'une lentille biconvexe, par exemple.

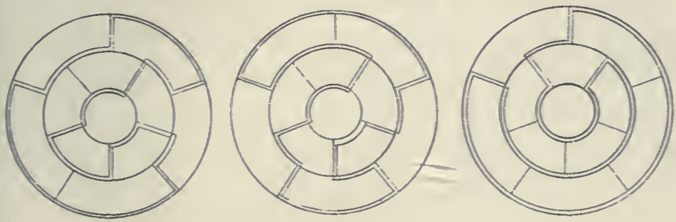
THÉORÈME DE KIRKMANN.

Le Jeu icosien d'Hamilton (t. II, p. 211) est une application particulière de ce théorème, car la figure correspondante est la représentation d'un dodécaèdre pentagonal. L'idée de ce jeu lui a été suggérée par cette remarque de M. Kirkmann que, évidemment, un circuit d'arêtes, d'un type unique, passe par tous les sommets de ce polyèdre [1]. Hamilton s'est emparé de ce résultat et en a fait la base de son Jeu, ainsi que d'un nouveau calcul d'espèce très singulière. Les *fig.* 136 représentent trois circuits sur des diagrammes équivalant à la représentation plane d'un dodécaèdre pentagonal. En chacun des sommets du polyèdre, nous

[1] Kirkmann, *On the polyhedra* (*Phil. Trans.*, 1858, p. 160).

pouvons nous diriger à main droite ou à main gauche (dans le diagramme, il faut inverser la droite et la gauche pour le contour extérieur); désignons ces opérations respectivement par λ et par μ. Si l'on commence en un sommet quelconque du dodécaèdre, la répétition quintuple de l'opération λ ou de l'opération μ nous ramène au point de départ, après avoir décrit les

Fig. 136.



cinq côtés de l'une des faces, de sorte que l'on peut considérer le symbole λ ou μ comme une racine cinquième de l'unité. Dans cette notation, le théorème de Kirkmann est représenté par l'expression

$$\lambda\mu\lambda\mu\lambda\lambda\lambda\mu\mu\mu\lambda\mu\lambda\mu\lambda\lambda\lambda\mu\mu\mu = 1,$$

ou, d'une manière plus abrégée, en observant qu'on n'a pas le droit de renverser l'ordre des opérations, ni celui de leurs symboles,

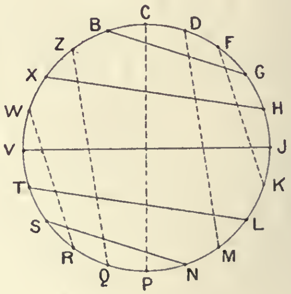
$$[(\lambda\mu)^2\lambda^3\mu^3]^2 = 1.$$

Cette expression peut être mise sous un grand nombre de formes qui paraissent différentes, mais équivalentes en réalité; ainsi l'on peut permuter circulairement les facteurs, c'est-à-dire que l'on peut commencer le cycle à un facteur quelconque. On peut aussi échanger les symboles λ et μ à cause de la symétrie de la figure. Il est intéressant d'étudier, dans ce cas particulier des réseaux à points triples, la nature des diverses espèces d'essais nécessairement infructueux pour sortir d'un pareil labyrinthe. Si, par exemple, nous choisissons des routes telles que

$$(\lambda\mu)^2\,\lambda\mu\lambda^3, \quad \text{ou} \quad \lambda^3\mu\lambda^3,$$

qui ne se rencontrent pas dans le circuit complet que nous avons formulé plus haut, le pas suivant nous ramène forcément à un carrefour déjà traversé. Nous obtenons ainsi d'autres relations entre les symboles λ et μ, et renfermant des facteurs dont le nombre peut varier de 7 à 19. C'est, sous une autre forme, le problème des impasses, dans le Jeu icosien d'Hamilton (t. II, p. 221). Nous donnons enfin (*fig.* 137) un autre diagramme pour l'é-

Fig. 137.



tude du Jeu icosien; on peut le reproduire sur une planchette en fixant des clous aux sommets de l'icosagone. Les lettres du diagramme sont en concordance avec celles de la *fig.* 97 du tome II, page 211.

COROLLAIRE DU COLORIAGE.

Le théorème de Tait est une conséquence du théorème de Guthrie, sur le coloriage. En effet, considérons un carrefour quelconque à réseaux triples, mais sans isthme. Entourons-le d'un circuit extérieur; nous pouvons, avec les quatre couleurs A, B, C, D, colorier toutes les régions en nombre $n+3$, en ajoutant celle qui est bornée par le circuit extérieur. Cela fait, un chemin quelconque sépare deux régions de couleurs différentes; on rangera chacun des chemins dans les groupes O, I, II, d'après le Tableau suivant :

O	entre	A et B	ou entre	C et D,
I	»	A et C	»	B et D,
II	»	A et D	»	B et C.

Le théorème de Tait est donc une conséquence immédiate du théorème du coloriage; inversement, le problème géographique des quatre couleurs serait une conséquence du théorème de Tait, si l'on connaissait une démonstration directe, le cas d'exception de l'isthme ne pouvant se présenter. En effet, si les frontières se rencontraient au nombre de plus de trois en un même point, il suffirait de recouvrir ce carrefour d'une petite pièce auxiliaire, et alors toutes les frontières se rencontreraient trois par trois. Il suffit ensuite de supposer que la pièce auxiliaire diminue indéfiniment d'étendue jusqu'à disparaître.

Cette relation entre les deux théorèmes est analogue à celle de la résolution de l'équation du quatrième degré que l'on ramène au troisième, et aussi, par exemple, à celle de la recherche des points d'intersection de deux coniques par l'étude des trois couples de sécantes qui passent par les quatre points.

Il y aurait donc un grand intérêt à trouver une démonstration directe et rigoureuse du théorème de Tait; mais, dit l'auteur, suivant l'expression de l'éminent mathématicien Kirkmann, que j'ai consulté sur ce sujet, *le théorème présente cet irritant intérêt qu'il se joue aussi bien du doute que de la preuve* (1). Peut-être que la preuve de cette curieuse proposition n'a pu être découverte jusqu'ici, à cause de son extrême simplicité. Ainsi, les astrologues sont exposés à ne pas voir les beautés des plus humbles objets qui s'étalent à leurs pieds.

Un astrologue, un jour, se laissa choir
Au fond d'un puits. On lui dit : « Pauvre bête,
» Tandis qu'à peine à tes pieds tu peux voir,
» Penses-tu lire au-dessus de ta tête? »

(1) *Reprint of math. papers from the Educational Times*, 1881, p. 113.

HUITIÈME RÉCRÉATION.

—

LA MACHINE A MARCHER.

HUITIÈME RÉCRÉATION.

—

LA MACHINE A MARCHER.

LA MACHINE A MARCHER.

L'idée de la machine à marcher n'est pas tout à fait nouvelle; on a déjà pris, en France, une quarantaine de brevets pour cette invention qui trouve d'utiles applications. En temps de neige et de verglas, les locomotives avancent difficilement sur les rails, et l'on a pensé qu'il était bon d'ajouter aux locomotives des organes temporaires permettant de remplacer les roues par de véritables pattes. C'est ainsi que l'on trouve dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers trois exemplaires de *locomotives à patins*, de M. A. Fortin-Hermann; l'une d'elles, avec un seul cylindre moteur, est un petit modèle que l'on peut faire avancer en pressant une poire en caoutchouc; une autre porte quatre cylindres moteurs; une troisième est disposée pour des courbes de petit rayon (1). On comprend bien

(1) *Catalogue des collections du Conservatoire national des Arts et Métiers*, 7e édition, 1882, p. 407, nos 50, 51, 52.

encore que la locomotive à patins peut être fort utilement employée dans d'autres conditions.

Le mécanisme principal des machines à marcher de M. Fortin-Hermann se compose soit d'excentriques, soit de parallélogrammes articulés. La présente récréation a pour but de faire connaître en France le mécanisme qui a été imaginé par M. Tchebichef; nous devons dire qu'il s'agit ici principalement d'une solution théorique; c'est aux praticiens qu'il convient d'étudier les résultats de l'expérience sur les indications données par l'illustre professeur de l'Université de Saint-Pétersbourg.

On appelle habituellement en Mécanique *parallélogramme articulé* un quadrilatère ou une figure formée de quatre côtés de longueur invariable, dont l'un reste fixe; les extrémités de ce côté fixe, la base, sont les centres de rotation des deux côtés adjacents, et le côté opposé à la base se balance d'une manière plus ou moins compliquée, suivant la grandeur respective des côtés du quadrilatère. Le parallélogramme de Watt est un exemple bien connu de ce mécanisme; il est souvent appliqué dans les machines à vapeur, pour diriger la tige d'un piston qui doit effectuer un mouvement aussi rectiligne que possible. M. Tchebichef avait démontré depuis longtemps qu'avec le parallélogramme articulé il était impossible d'obtenir un mouvement absolument, mathématiquement rectiligne. C'est à M. Peaucellier, alors commandant du génie, aujourd'hui général, membre du Comité des fortifications, que l'on doit la première solution rigoureuse de la description, de la construction d'une ligne droite; mais cette solution, publiée en 1864, était restée inaperçue [1].

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1864).

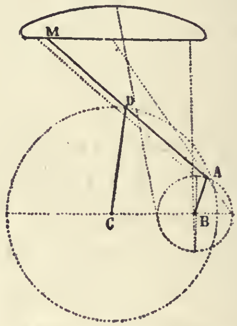
En 1870, un étudiant de l'Université de Saint-Pétersbourg, M. Lipkine, a présenté à M. Tchebichef un appareil articulé, qui permettait de tracer mathématiquement une ligne droite; cela ne détruisait nullement les conclusions du savant professeur russe, puisque l'appareil articulé n'était plus un parallélogramme et comptait sept tiges ou côtés, au lieu de trois; l'étudiant reçut les encouragements de son professeur, de son Université et de son gouvernement pour cette admirable découverte; il avait retrouvé l'appareil Peaucellier. Quant au général, il fut récompensé plus tard; notre Académie des Sciences lui a donné un beau prix.

Pour tracer une ligne droite, on se sert d'une règle; mais tout d'abord il faut vérifier celle-ci; quand on l'achète chez le marchand, on met l'œil à l'une des extrémités pour voir si elle est bien conditionnée; on la vérifie d'une manière plus sûre en traçant une ligne sur l'un des bords et en retournant la règle sur l'autre face, pour voir si le second trait coïncide avec le premier. Et depuis plus de quarante siècles que l'on fait de la Géométrie, personne ne s'était aperçu que l'on ne savait pas tracer mathématiquement une ligne droite! Cependant le professeur de Géométrie, dans sa chaire, n'enseignait que des constructions exactes et rigoureuses! Aujourd'hui encore, bien que l'appareil Peaucellier et ses congénères aient remplacé, en Allemagne, en Angleterre, en Russie, le parallélogramme de Watt des machines à vapeur, nos Ouvrages élémentaires sont muets sur cette découverte, sur ce mécanisme qui s'explique avec le carré de l'hypoténuse par une démonstration claire, limpide, donnée par M. le colonel Mannheim, professeur à l'École Polytechnique.

Mais revenons à notre sujet. Il ne faut pas abuser outre mesure des solutions théoriques; ce sont des renseignements, des guides pour le praticien; mais il faut aussi tenir compte du fonctionnement de la machine, des frottements, du rendement. Au moyen d'un nouveau genre de calcul imaginé par M. Tchebichef, et fondé sur des méthodes arithmétiques dont on trouve le germe dans les Ouvrages d'Euler, le savant professeur s'est proposé de rechercher les dimensions les plus convenables pour que l'un des points du côté mobile, opposé au côté fixe du parallélogramme, puisse décrire une droite aussi exactement que possible.

La *fig.* 138 représente le nouveau parallélogramme; les points B

Fig. 138.



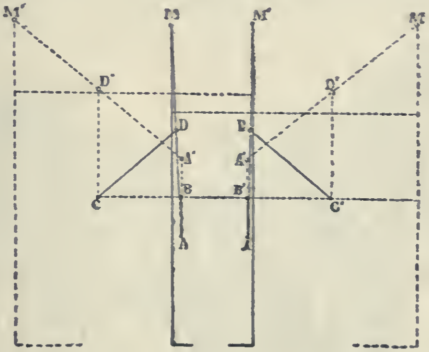
et C sont fixes; ce sont les centres de rotation; le côté opposé AD est de longueur constante; ses extrémités décrivent les deux cercles pointillés de la figure. Si l'on prolonge la ligne AD d'une longueur égale, c'est-à-dire si DM = DA, le point M décrit une courbe, qui n'est plus la *courbe à longue inflexion* de Watt, mais dont une certaine partie s'approche très près d'une ligne droite, aussi près que possible avec les conditions imposées, pourvu que les dimensions du parallélogramme soient les suivantes, en prenant pour unité de longueur le côté AB :

$$CD = AD = DM = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad BC = \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

Dans ce cas, et comme il est facile de s'en assurer en construisant avec quatre règles en bois ce parallélogramme, le point M décrit une trajectoire sensiblement rectiligne, lorsque le sommet A décrit son demi-cercle de droite. Après avoir parcouru cette partie de la trajectoire, le point M se lève et fait sa marche de retour en montant peu à peu, jusqu'au milieu de la course, et en s'abaissant suivant la même loi après avoir dépassé ce milieu.

Supposons maintenant (*fig.* 139) que l'on applique de tels sys-

Fig. 139.



tèmes à deux manivelles soudées à un axe, et directement opposées ; on obtient un mécanisme où la rotation de l'axe se transforme en mouvement de deux points qui, tour à tour, parcourent une même ligne droite, et dont chacun s'élève successivement au-dessus de cette ligne après l'avoir parcourue quand l'autre s'abaisse sur elle pour la parcourir. Plaçons à côté, pour l'équilibre, un appareil

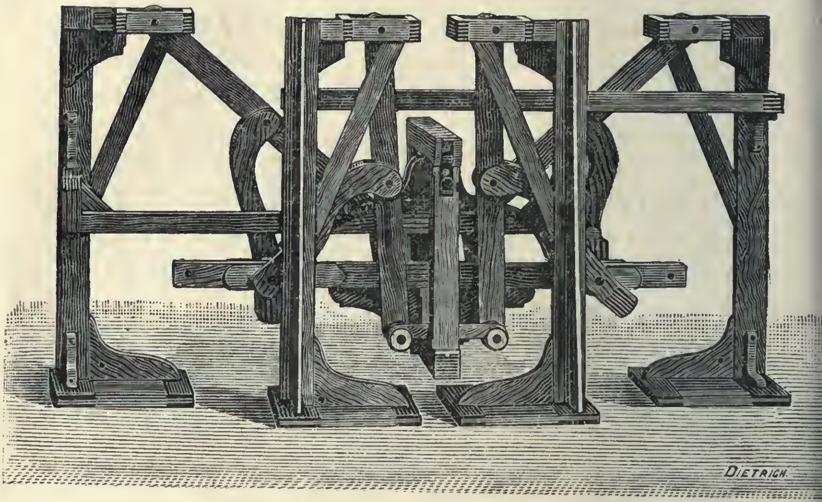


Fig. 140. — Position initiale au repos.

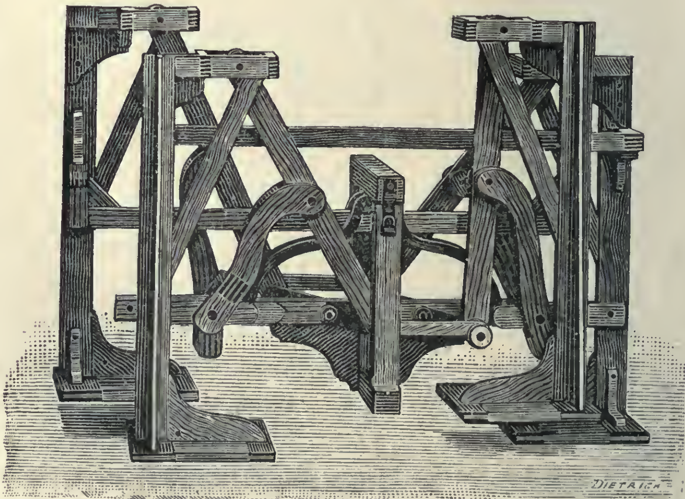


Fig. 141. — Le pied droit de devant et le pied gauche de derrière se lèvent pour s'avancer vers la droite.

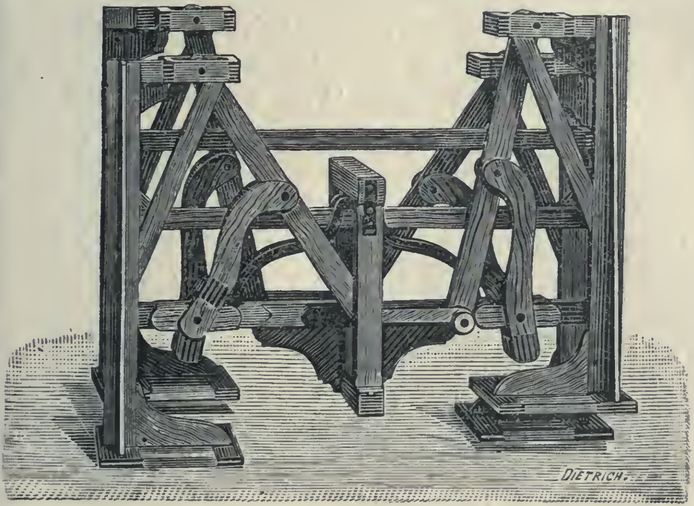


Fig. 142. — Position plus avancée que dans la *fig.* 141.

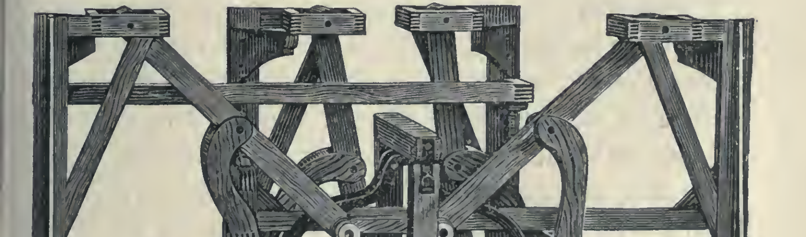


Fig. 143. — Deuxième position de repos.

symétrique par rapport à un point central, nombril de la machine, et réunissons-le au premier par une barre fixe; faisons supporter les extrémités des quatre leviers M par quatre pieds, comme par les pattes d'un éléphant; si l'on tire vers la droite avec une ficelle, tout cet appareil remue, se met en train et marche comme un quadrupède (*fig.* 140 à 143).

Habillons tout cet appareil de bois; donnons-lui de la chair en carton; imitons un éléphant, sa trompe, avec défenses d'ivoire; nous ferons ainsi, suivant les dimensions, un joujou pour l'enfant, ou pour les grandes personnes, dans la figuration des théâtres à grand spectacle. En lui plaçant un pendule ou un ressort dans le ventre, comme au nègre de la porte Saint-Denis, cet appareil marcherait tout seul. Avec des jambes de girafe, il pourrait être utilisé comme vélocipède dans le département des Landes; mais l'addition d'aussi longues jambes en ferait tout naturellement monter le coût.

Il serait plus intéressant d'expérimenter l'appareil pour les locomotives et les locomobiles. Cependant, au-dessus de ces applications diverses, nous terminerons en disant que ce parallélogramme de M. Tchebichef donne la solution d'un important problème de Mécanique. En ne considérant que les parties rectilignes de la trajectoire des points M, on reconnaît qu'elles produisent, avec une approximation très suffisante, le même effet que les arcs égaux de la circonférence d'une roue qui tourne, lorsque le rayon de celle-ci est très grand. En d'autres termes, ce mécanisme joue le rôle d'une roue infiniment grande.

NOTES.

NOTE I.

Le saut du cavalier au jeu d'échecs.

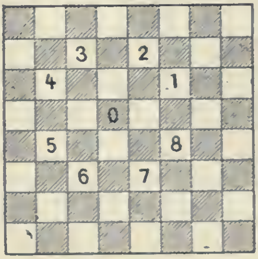
Édouard Lucas avait l'intention de faire, sur *le Saut du Cavalier*, une récréation très complète, qui aurait rempli près de la moitié d'un volume. Il avait réuni, à cet effet, de nombreux renseignements, mais ce sont de simples Notes, présentant trop de lacunes pour qu'il nous soit possible d'y suppléer.

Nous nous bornerons à reproduire un article publié par la *Revue scientifique* du 22 septembre 1882.

DÉFINITION.

On sait que le cavalier du jeu des échecs possède une marche

Fig. 144.



toute particulière ; il va, pour ainsi dire, en caracolant et passe d'une case blanche sur une noire, ou inversement. Ainsi, lorsque le cavalier se trouve en o (*fig.* 144), il peut venir se placer sur l'une des cases numérotées de 1 à 8.

Nous dirons que deux cases sont *conjuguées,* ou battues l'une par l'autre, lorsque le cavalier peut passer par un seul saut de l'une à l'autre; ces deux cases sont de couleurs différentes; par conséquent, après un nombre pair de sauts successifs, le cavalier se trouve sur une case de même couleur que la case du départ; après un nombre impair de sauts, sur une case de couleur différente. Une case étant donnée sur l'échiquier ordinaire, le nombre des cases conjuguées est 8, 6, 4, 3, ou 2; les cases des quatre coins n'ont que deux conjuguées, et ce sont les seules. Le lecteur se rendra facilement compte de ces résultats en inscrivant sur chaque case le nombre de toutes ses conjuguées; il trouvera ainsi que l'échiquier de 64 cases contient :

Quatre	cases ayant	*deux*	cases conjuguées;	ce qui fait	8	sauts.
Huit	—	*trois*	—	—	24	—
Vingt	—	*quatre*	—	—	80	—
Seize	—	*six*	—	—	96	—
Seize	—	*huit*	—	—	128	—
			Total...........		336	sauts.

Il y a donc, sur l'échiquier ordinaire, 168 sauts du cavalier et un nombre égal de sauts inverses. Sur l'échiquier rectangulaire de dimensions p et q, on démontre facilement que le nombre des sauts du cavalier est le double de l'expression

$$(2p-3)(2q-3)-1.$$

UN PROBLÈME DE GUARINI.

Afin de familiariser le lecteur avec le saut du cavalier, nous donnerons la solution du problème suivant que l'on trouve sous le n° 42 dans un manuscrit de P. Guarini di Forli (1512) : *Deux cavaliers blancs et deux cavaliers noirs sont placés, sur l'échiquier, aux quatre coins d'un carré de neuf cases; on demande de faire passer, suivant la règle, les cavaliers blancs à la place des cavaliers noirs, et inversement, sans sortir du carré.*

Supposons les cavaliers noirs en 1 et 3 (*fig.* 145), et les cavaliers

Fig. 145.

7	6	5
8	0	4
1	2	3

blancs en 5 et 7; on joue les quatre paires de coups suivants dans lesquelles on déplace alternativement les deux cavaliers blancs et les deux cavaliers noirs :

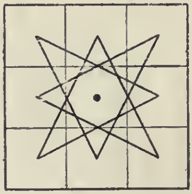
7 à 2, 5 à 8, 1 à 4, 3 à 6; 2 à 5, 8 à 3, 4 à 7, 6 à 1.

Les cavaliers blancs occupent les positions 3 et 5, et les noirs les positions 1 et 7; on joue ensuite les huit coups suivants :

5 à 8, 3 à 6, 7 à 2, 1 à 4; 8 à 3, 6 à 1, 2 à 5, 4 à 7.

Les noirs occupent maintenant les cases 5 et 7 et les blancs les cases 1 et 3. L'ensemble des parcours des cavaliers forme un oc-

Fig. 146.



togone étoilé, dont l'une des moitiés est décrite par chacun des cavaliers (*fig.* 146).

LES RECTANGLES DE 12 CASES.

En suivant les lignes qui joignent les centres des cases d'un rectangle de dimensions 3 et 4 (*fig.* 147, 148 et 149), le cavalier

Fig. 147.

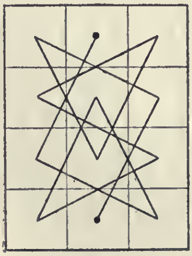


Fig. 148.

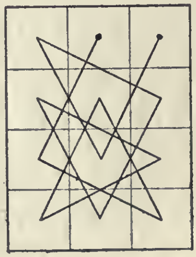
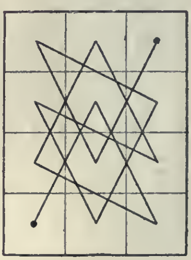


Fig. 149.



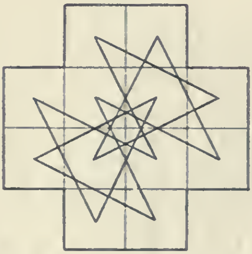
peut parcourir successivement les douze cases de ce rectangle; les centres des cases de départ et d'arrivée sont marqués par de gros points; d'ailleurs, rien ne distingue la case initiale de la case finale, et le cavalier peut passer de l'une à l'autre, après avoir rencontré une seule fois les centres des dix autres cases.

Nous recommandons ces exercices à tous les joueurs d'échecs; ils y trouveront une vue plus rapide des marches du cavalier qui leur permettra d'utiliser, dans la bataille, les ressources de leur cavalerie (1).

LES CROIX D'EULER.

Nous ajouterons encore les deux exemples suivants pour les parcours sur deux croix de douze et de vingt cases empruntés,

Fig. 150.

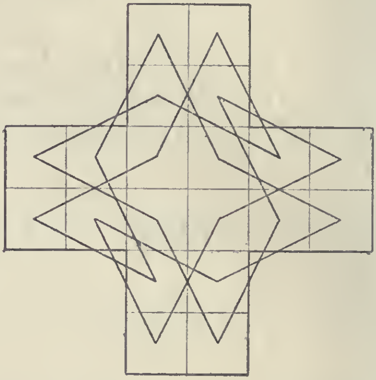


comme les précédents, au Mémoire d'Euler dont il sera parlé

(1) « Le investigazioni che si sono addote ci condurrano allo scopo di renderlo alle battaglie più destro. » (T. Ciccolini, *Del Cavallo degli scacchi*, 1836.)

plus loin (*fig.* 150 et 151). Dans ces derniers exemples, le cavalier

Fig. 151.



peut partir d'une case quelconque, parcourir une seule fois toutes les cases et revenir à son point de départ.

LA COURSE ET LE CIRCUIT.

« Un jour, dit Euler [1], je me trouvais dans une compagnie où, à l'occasion du jeu d'échecs, quelqu'un proposa cette question de parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier sans revenir jamais deux fois à la même, et en commençant par une case donnée. On mettait, pour cette fin, des jetons sur toutes les

[1] *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* pour l'année 1759. Ce Mémoire est reproduit en français sous le titre : *Solution d'une question ingénieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse*, dans les *Commentationes arithmeticæ collectæ* (Petropoli, 1849, t. I, p. 337 à 355).

soixante-quatre cases de l'échiquier, à l'exception de celle où le cavalier devait commencer sa route, et de chaque case où le cavalier passait conformément à sa marche, on ôtait le jeton, de sorte qu'il s'agissait d'enlever de cette façon successivement tous les jetons. Il fallait donc éviter, d'un côté, que le cavalier ne revînt à une case vide, et, d'un autre côté, il fallait diriger sa course en sorte qu'il parcourût enfin toutes les cases. »

Pour exécuter ce problème, et pour conserver le souvenir de la

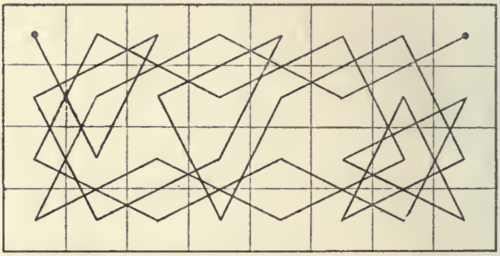
Fig. 152.

58	23	62	15	64	21	54	13
61	16	59	22	55	14	51	20
24	57	10	63	18	49	12	53
9	60	17	56	11	52	19	50
34	25	36	7	40	27	48	5
37	8	33	26	45	6	41	28
32	35	2	39	30	43	4	47
1	38	31	44	3	46	29	42

marche du cavalier, il est préférable de se servir des soixante-quatre premiers numéros d'un jeu de loto, que l'on place successivement sur les cases dans l'ordre numérique, à partir de la case désignée, conformément à la marche du cavalier. Ce problème a été proposé et résolu pour la première fois dans un cas particulier (*fig.* 152) par le chevalier de Montmort, auteur de l'*Essai d'analyse sur les jeux de hasard* (Paris, 1708 et 1714). Deux autres solutions du problème ont été obtenues, peu de temps après, par Moivre et de Mairan (1722).

D'après l'*Encyclopédie* de d'Alembert et de Diderot, ce problème aurait été connu très anciennement dans l'Inde. En Europe, on en a trouvé la première mention dans le manuscrit de Guarini (n° 74), puis dans l'Ouvrage intitulé : S'EN SUIT JEUX, *partis des Eschez, composez nouvellement pour récréer tous nobles cueurs et pour éviter oysiveté à ceux qui ont voulonté, désir et affection de le sçavoir et apprendre, et est appellé ce Livre, le jeu des Princes et Damoiselles* (Paris, vers 1530).

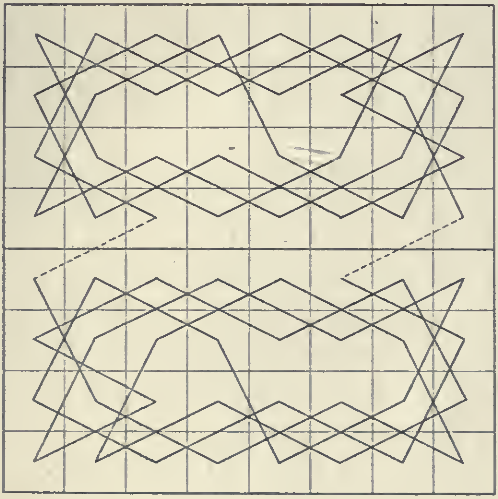
Fig. 153.



On y trouve ce passage : « C'est pour lever tous les eschez au traict du chevalier en A et ensuy la + de par Dieu ; ton chevalier doit estre au coing destre devers ton ioueur et se doit rendre à l'oposite. » Les développements de l'auteur conduisent à une course sur le demi-échiquier de trente-deux cases que nous avons représentée dans la *fig.* 153.

On rencontre une autre course sur le demi-échiquier dans l'Ouvrage *Libro nel quale si tratta della maniera di giuocar a Scacchi, con alcuni sottilissimi partiti, nuovamente composto da* Horatio Gianutio della Mantia (Torino, 1597). Nous avons représenté cette course dans le demi-échiquier supérieur (*fig.* 154). Faisons tourner l'échiquier d'un demi-tour autour de son centre et reproduisons cette course dans l'autre moitié de l'échiquier; nous pouvons réunir ces deux courses partielles par deux traits *pointillés* dans la figure et conformes à la marche du cavalier. On obtient ainsi un polygone fermé de soixante-quatre

Fig. 154.



côtés, représentant une *course rentrante* ou un *circuit* sur les soixante-quatre cases de l'échiquier (*fig.* 154). Cette solution a été donnée par Euler dans le Mémoire cité; il est curieux de rapprocher ces deux solutions de Gianutio et d'Euler, obtenues à près de deux siècles d'intervalle, car nous démontrerons plus loin que le nombre des circuits de cette nature, tracés en soudant deux courses partielles identiques sur les demi-échiquiers, est égal à 3872.

LE CAVALIER-SPHINX.

Les courses et les circuits forment des figures plus ou moins régulières qui donnent lieu, chaque semaine, à des problèmes proposés dans les journaux illustrés. On écrit, sur les cases successives d'une course ou d'un circuit, les lettres ou les mots d'une ou de plusieurs phrases qu'il s'agit de reconstruire en retrouvant la marche du cavalier, qui sert de *fil d'Ariane*. Souvent cette phrase reconstruite donne naissance à de nouvelles questions : énigme, logogriphe, charade, anagramme, etc., qui présentent pour beaucoup de lecteurs un grand intérêt de curiosité. L'un des premiers problèmes de ce genre a été donné dans *le Palamède* [1]. On avait écrit sur les cases successives d'un circuit les soixante-quatre mots (sans tenir compte des apostrophes) de ce morceau plus ou moins poétique, qui renferme la définition de notre problème :

> Franchir chaque degré d'un monde noir ou blanc;
> Galoper en tous sens du Midi jusqu'à l'Ourse,
> Voilà ce qu'un cheval peut faire; mais, pourtant,
> Quatre fois seize pas doivent borner sa course.
> Au but ainsi marqué, toi qui veux parvenir,
> Tremble qu'au même point ton coursier ne repasse,
> Tu verrais sous tes pieds un abîme s'ouvrir!
> Change toujours d'allure et fuis ta propre trace.

Le contour polygonal figurant la course du cavalier ne peut

[1] *Le Palamède, revue mensuelle des échecs*, etc., 2e série, t. I, p. 322. Paris, 1842. — Cette revue a été fondée par de Labourbonnais, en 1836, et continuée de 1841 à 1848 par F.-A. de Saint-Amand. Labourbonnais, célèbre joueur d'échecs, gagnait deux parties, sans voir l'échiquier, contre les adversaires les plus renommés; avant lui, Philidor, mort en 1795, défendait trois parties dans les mêmes conditions; depuis, Morphy et Maczuski ont souvent gagné huit parties simultanées, sans voir l'échiquier.

présenter, dans le cas de l'échiquier ordinaire et, en général, dans le cas d'un échiquier contenant des cases en nombre pair, aucun caractère de symétrie. En d'autres termes, le contour ne peut se composer de deux parties superposables, en repliant la course dessinée sur une feuille de papier, soit autour de l'une des médianes, soit autour de l'une des diagonales de l'échiquier. En effet, si l'on groupe deux par deux les côtés du contour, l'un d'eux reste isolé, puisque leur nombre est impair; donc ce côté devrait se composer de deux moitiés superposables. Ainsi, l'un des côtés serait perpendiculaire à une médiane ou à une diagonale, ce qui est impossible. De même, la course sur un échiquier pair ne peut être symétrique par rapport au centre de l'échiquier, puisque ce centre ne peut coïncider avec le milieu d'un côté.

Nous avons vu, d'autre part (*fig.* 154), que le circuit peut être symétrique par rapport au centre; mais nous démontrerons plus loin que le circuit, bien que composé d'un nombre pair de côtés, ne peut être symétrique soit par rapport à une médiane, soit par rapport à une diagonale de l'échiquier carré de grandeur quelconque.

LA PLANCHETTE DE VANDERMONDE.

Dans ses *Remarques sur les problèmes de situation,* publiées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de Paris, pour l'année 1771, Vandermonde a indiqué l'emploi d'un procédé assez commode pour étudier les diverses configurations de la course et du circuit, et pour vérifier les résultats obtenus. Il dit : « Faire parcourir au cavalier toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois sur la même, se réduit à déterminer une certaine trace du cavalier sur l'échiquier, ou bien, en supposant une épingle fixée au centre de chaque case, à déterminer le cours d'un fil passé une fois autour de chaque épingle, d'après une loi dont nous allons chercher l'expression. » Ce procédé a été signalé par Ballière de Laisement dans son *Essai sur les problèmes de situation* (Rouen, 1782, in-8° de 74 pages et 7 planches). Nous en donnerons une description plus détaillée d'après l'Ouvrage de M. Paul de Hijo [1].

On prend une planchette carrée de 20 à 25 centimètres de côté et de 1 centimètre d'épaisseur, sur laquelle on colle un échiquier en papier. Au centre de chacune des soixante-quatre cases, on enfonce une pointe sans tête qu'on laisse dépasser d'environ 5 à 6 millimètres. Puis, avec un fil de soie de la longueur de soixante-quatre pas de cavalier, et attaché par l'un de ses bouts à la pointe de la case initiale, on parcourt, en accrochant le fil aux pointes, les différentes cases de l'échiquier, de manière à décrire n'importe quelle chaîne du cavalier. De cette façon, quand on s'aperçoit qu'on a fait fausse route, il suffit de défaire le fil jusqu'à la case où l'on a pris une mauvaise direction et d'en prendre une autre, ce qui ne peut se faire quand on essaye de tracer une chaîne sur le papier.

On peut aussi, après avoir garni sa planchette de pointes, faire un échiquier en carton mince, de la même dimension, dont toutes les cases seront percées, à leur centre, d'un trou circulaire. On

[1] Paul de Hijo, *Le problème du cavalier des échecs d'après les méthodes qui donnent la symétrie par rapport au centre.* Ouvrage contenant plus de quatre cent treize mille parcours du cavalier. Grand in-8° de 170 pages; Metz, 1882.

appliquera cet échiquier sur la planchette en faisant passer les pointes par les trous du carton. Ainsi la même planchette pourra servir pour toute autre méthode : il n'y aura qu'à remplacer le carton par un autre, préparé de la même manière, mais portant une notation différente.

Le *Polygraphile* (¹) est la réalisation de l'idée de Vandermonde; il constitue un jeu intéressant et varié, facile à suivre, même en voyage. D'autre part, dans un excellent Ouvrage (²) auquel nous avons emprunté plusieurs renseignements, M. Cretaine conseille, pour l'étude de ces problèmes, l'emploi d'une ardoise sur laquelle on fait graver un petit échiquier de 8 à 9 centimètres de côté, avec cases ombrées, en se servant d'un crayon d'ardoise, qui s'efface facilement. Avec l'ardoise ou du papier quadrillé, on peut réaliser rapidement des solutions diverses.

« La rapidité d'exécution, dit M. Cretaine, est aujourd'hui vantée par quelques amateurs qui, par des méthodes rendues aisées, obtiennent dix à douze solutions à l'heure; leur habileté se trouve éclipsée par la méthode d'un étranger qui m'honore de son amitié, je veux parler de M. Solvyns, de Bruxelles. On l'a vu, en 1860, par des combinaisons qu'il ne veut pas faire connaître, exécuter, à la Régence, de quarante-huit à cinquante solu-

(¹) EDME SIMONOT, *Le Polygraphile, nouveau jeu de salon et de jardin, décrit par son inventeur*. Brochure de 16 pages, avec planchette et 6 cartons guides (Paris, 1872). — L'auteur s'attribue à tort l'invention du Polygraphile; en revanche, il attribue à Vandermonde une méthode obtenue par l'emploi du guide n° 3, qu'il pourrait, avec plus de raison, considérer comme sienne.

(²) A. CRETAINE, *Études sur le problème de la marche du cavalier au jeu des échecs et solution du problème des huit dames*. In-8° de 52 pages avec 25 planches (Paris, 1865).

tions. Il a répété ces mêmes opérations sous mes yeux, espérant alors, mais en vain, de perfectionner sa méthode et de compter soixante solutions. » (*Loc. cit.*, p. 23).

LE CAVALIER-DOMINO.

On peut considérer le problème du cavalier des échecs comme un cas très particulier dans la théorie générale du domino. En effet, si l'on numérote les cases de l'échiquier de 1 à 64, soit d'une manière quelconque, soit par une notation ordonnée suivant les lignes et les colonnes de l'échiquier, la droite qui joint les extrémités d'un saut du cavalier, c'est-à-dire les centres de deux cases conjuguées, peut être considérée comme l'un des dés d'un jeu de dominos commençant au double as pour finir au double soixante-quatre; par conséquent, le contour polygonal de 63 côtés représentant une course correspond à une disposition rectiligne de 63 dominos. Cela posé, joignons deux à deux, de toutes les manières possibles, les centres des cases conjuguées de l'échiquier; le nombre des traits d'union est 168, ainsi que nous l'avons vu, et le problème de la course du cavalier revient à celui-ci :

On prend 168 dominos dans un jeu complet de dominos du double as au double soixante-quatre, en rejetant les doubles, et en ne conservant que les dés qui correspondent à tous les sauts du cavalier sur l'échiquier. Former une disposition rectiligne de 63 dominos, de telle sorte qu'un point quelconque ne soit pas répété plus de deux fois.

De même, le problème du circuit revient à former une disposition circulaire de 64 dominos, avec les mêmes conventions.

Il résulte de ces remarques que le problème de déterminer le nombre des courses et des circuits devient un problème du domino; et puisque la solution de ce dernier n'est connue actuellement que jusqu'au double neuf, le problème du cavalier semble présenter de très grandes difficultés. Cependant, sans laisser au problème toute son indétermination, en imposant de nouvelles conditions, on peut, dans certains cas, résoudre le problème. Par exemple, si l'on divise l'échiquier en deux rectangles égaux par une ligne médiane et si l'on impose au cavalier la condition de parcourir successivement les 32 cases de chacun des fragments, on peut déterminer le nombre total des circuits sur l'échiquier, d'après la méthode de M. Flye-Sainte-Marie.

LE CAVALIER-LOTO.

Nous avons vu que, pour réaliser la course ou le circuit du cavalier, il est commode de se servir des 64 premiers numéros d'un jeu de loto. Supposons que l'on exécute ainsi une marche quelconque du cavalier; d'après la règle des sauts, la couleur des cases change avec chacun d'eux et passe du blanc au noir, et inversement. Par conséquent, si l'on a posé le n° 1 sur une case blanche, le n° 2 sera sur une case noire, le n° 3 sur une blanche, et ainsi de suite; donc, en général, quelle que soit la marche du cavalier sur un nombre arbitraire de cases de l'échiquier, les cases parcourues de même couleur sont garnies de numéros de même parité. Par exemple, si la case initiale est blanche, toutes les cases blanches parcourues seront recouvertes de numéros impairs, et les cases noires de numéros pairs (*fig.* 152).

Supposons que toutes les cases de l'échiquier soient parcourues, alors chacune des colonnes contient quatre numéros pairs et quatre numéros impairs; on a donc cette proposition formulée par Euler :

Dans l'échiquier ordinaire, la somme des numéros des cases d'une même ligne ou d'une même colonne, dans la course ou le circuit du cavalier, est toujours un nombre pair.

Il en est de même pour l'échiquier carré dont le côté est un multiple de quatre. On voit encore que cette somme est toujours impaire pour l'échiquier carré dont le côté est double d'impair comme pour les échiquiers de 6, 10, 14 cases de côté. Enfin, cette somme est alternativement paire et impaire pour les échiquiers dont le côté renferme un nombre impair de cases.

D'autre part, on observera que le nombre des sauts d'une course sur un échiquier de forme quelconque est toujours égal au nombre des cases diminué de l'unité; par suite, *il n'existe aucune course sur les échiquiers de forme quelconque, lorsque la différence entre le nombre des cases blanches et celui des cases noires n'est pas égale à* 0 *ou à* 1.

De plus, dans le circuit, le nombre des sauts, toujours égal au nombre des cases, est nécessairement pair, puisque la case initiale coïncidant avec la case finale est de même couleur que celle-ci; par conséquent, *il n'existe pas de circuit sur les échiquiers dont le nombre des cases est impair.*

LES RÉSEAUX GÉOMÉTRIQUES.

Si l'on joint deux à deux les centres de toutes les cases conjuguées d'un échiquier d'étendue quelconque, on trace ainsi un *réseau géométrique*. En général, nous appellerons réseau géométrique la figure formée par un nombre quelconque de points ou sommets, dans le plan ou dans l'espace, réunis entre eux par des lignes droites ou courbes en nombre quelconque. Pour plus de clarté, on suppose que les lignes de jonction ne se rencontrent pas en de nouveaux points, et en les traçant sur un plan, nous admettrons qu'elles sont placées les unes au-dessus des autres.

Nous appellerons *points doubles, triples, quadruples,* ceux où aboutissent deux, trois, quatre lignes de jonction. Ainsi le réseau de l'échiquier ordinaire comprenant tous les sauts de cavalier contient 64 points dont 4 doubles, 8 triples, 20 quadruples, 16 sextuples et 16 octuples. Comme dans le jeu icosien d'Hamilton (¹), le problème du cavalier revient à suivre certaines lignes du réseau, en passant une seule fois par tous les sommets. Cette considération générale sur les réseaux donne lieu aux problèmes suivants qui comprennent un grand nombre de jeux et se rattachent à la Géométrie de situation.

Problème I. — Un réseau géométrique étant donné, parcourir toutes les lignes du réseau, une seule fois, par le nombre minimum de trajets continus (²).

(¹) E. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. II, p. 210 (Paris, Gauthier-Villars; 1883).

(²) E. Lucas, *Récréations mathématiques,* t. I, p. 238 (*Problème des ponts de la Pregel*). (Paris, Gauthier-Villars; 1883).

Problème II. — Un réseau géométrique étant donné, parcourir deux fois toutes les lignes du réseau par un seul trajet continu ([1]).

Problème III. — Un réseau géométrique étant donné et ne contenant que des points d'ordre pair, quel est le nombre des manières distinctes de le décrire d'un trait continu? ([2]).

Problème IV. — Un réseau géométrique étant donné, de combien de manières peut-on visiter une seule fois tous les sommets par un trait continu? (*Jeu d'Hamilton, problème du cavalier.*)

Problème V. — Un réseau géométrique est donné avec les sommets numérotés dans un ordre quelconque; on place sur tous les sommets des cubes portant les mêmes numéros, dans un ordre arbitraire. On enlève l'un des cubes, et l'on fait glisser les autres sur les lignes de la figure, jusqu'au sommet libre. Replacer tous les cubes mobiles sur les numéros correspondants des sommets [*Jeu du taquin et du taquin continental* ([3])]. Nous n'avons traité ce problème que dans le cas où la figure contient un quadrilatère (*garage*) en communication, sans isthme, par les deux extrémités d'un côté avec toutes les autres cases.

Problème VI. — On couvre avec des jetons tous les sommets

([1]) E. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. I, p. 46 et 240 (*Jeu des labyrinthes, théorie des Ramifications et des Arbres géométriques*), (Paris, Gauthier-Villars; 1883).

([2]) E. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. II, p. 229 (*Jeu de dominos*).

([3]) E. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. I, p. 189 et 229.

d'un réseau géométrique, à l'exception d'un seul; on enlève successivement tous les jetons, tels que *a*, en plaçant celui d'un sommet adjacent *b*, sur un autre sommet adjacent de *a* supposé vide. Enlever ainsi tous les jetons [*Jeu du solitaire, solitaire icosien* (¹)].

La solution de ces problèmes, ignorée dans le cas général, donne naissance à des fonctions arithmétiques dont la nature est encore inconnue, malgré les recherches de Leibniz et d'Euler, de Vandermonde et de Legendre; et nous pouvons dire que ces théories ne semblent habituellement délaissées qu'en raison de leur extrême difficulté.

(¹) E. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. I, p. 89; t. II, p. 227 (Paris, Gauthier-Villars; 1883).

NOTE II.

Nous croyons intéressant de reproduire ici cinq articles d'Édouard Lucas, qui ont été publiés, en 1891, dans les *Tablettes du Chercheur,* recueil bihebdomadaire qui, à côté de questions amusantes, contient des problèmes sérieux, souvent difficiles. Les *Amusements scientifiques sur l'Arithmétique* ont été écrits peu de temps avant sa mort; ce sont probablement les derniers articles qu'il a rédigés.

LES CARRÉS MAGIQUES.

SUR LE CARRÉ DE 3 ET SUR LES CARRÉS A DEUX DEGRÉS.

Pour trouver tous les carrés magiques de 3, on commence par diminuer tous les éléments du tiers de la somme constante; alors la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne, de chaque diagonale est nécessairement égale à zéro.

En exprimant d'abord que la somme est nulle pour chaque ligne et pour chaque colonne, le carré a forcément la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} a & b & -a-b \\ c & d & -c-d \\ -a-c & -b-d & a+c+b+d. \end{array}$$

Si l'on exprime que la somme des nombres placés dans chacune des diagonales est nulle, on a les conditions

$$\begin{aligned} 2a+2d+b+c&=0, \\ d-2a-b-c&=0; \end{aligned}$$

en ajoutant, on trouve $d = 0$, et si l'on pose

$$b + c = 2p, \qquad b - c = 2q,$$

le carré devient

$$\begin{array}{ccc} -p & p+q & -q \\ p-q & 0 & q-p \\ q & -p-q & p. \end{array}$$

Il ne peut y en avoir d'autres à somme nulle. Ce carré est formé des trois progressions arithmétiques

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & q-p, & q, & p+q, \\ \mathrm{II} & -p, & 0, & p, \\ \mathrm{III} & -p-q, & -q, & p-q, \end{array}$$

de même raison p. De plus, dans la progression intermédiaire II, chacun des termes est égal à la demi-somme des termes correspondants des deux autres; ces conditions subsistent dans le carré magique dont la constante n'est pas nulle. On a donc ce théorème :

Pour former un carré magique avec neuf nombres, il faut et il suffit que ces nombres appartiennent à trois progressions arithmétiques de même raison et que le premier terme de l'une d'elles soit égal à la demi-somme des premiers termes des deux autres.

Lorsque ces conditions sont remplies, le problème ne comporte qu'une seule solution.

Si l'on considère le Tableau des neuf quantités

$$\begin{array}{ccc}
p^2+q^2-r^2-s^2, & 2(qr+ps), & 2(qs-pr), \\
2(qr-ps), & p^2+r^2-q^2-s^2, & 2(rs+pq), \\
2(qs+pr), & 2(rs-pq), & p^2+s^2-q^2-r^2,
\end{array}$$

on obtient un carré magique dans lequel la somme des carrés des nombres contenus dans une même ligne ou dans une même colonne est égale au carré de $(p^2+q^2+r^2+s^2)$. Ce Tableau est extrait du tome I de la *Théorie des Nombres* (p. 129), qui a paru en 1891 à la librairie Gauthier-Villars.

Le n° 2 des *Tablettes du Chercheur* contient un *très remarquable* carré magique de 8, à deux degrés, qui a été obtenu par M. Pfeffermann. En d'autres termes, il s'agit de disposer les 64 premiers nombres sur les cases de l'échiquier, de telle sorte que la somme des termes de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soit la même; et, de plus, que si l'on remplace tous les nombres par leurs carrés, le carré reste magique.

Nous allons faire voir que le problème est impossible pour le carré de 3, avec des nombres inégaux, et qu'il est impossible pour le carré de 4, en prenant seize nombres consécutifs. En effet, on doit d'abord remarquer qu'un carré magique à deux degrés conserve toutes ses propriétés lorsqu'on augmente tous les termes d'un nombre quelconque x. Lorsqu'un terme a devient $(x+a)$, son carré devient

$$x^2+2ax+a^2;$$

par conséquent, en supposant, par exemple, un carré de 4, et en désignant par a, b, c, d les termes d'une rangée ou d'une diagonale, on a, pour les rangées et les diagonales,

$$a + b + c + d = S_1,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = S_2,$$

S_1 et S_2 désignant les constantes pour le premier degré et le second. En augmentant de x tous les éléments du carré, la somme des termes d'une rangée devient

$$(x + a) + (x + b) + (x + c) + (x + d) = 4x + S_1$$

et augmente de $4x$; d'autre part, la somme des carrés des nombres d'une rangée devient

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 + (x + c)^2 + (x + d)^2 = 4x^2 + 2x S_1 + S_2;$$

elle augmente, pour chacune des rangées ou des diagonales, de la même quantité $4x^2 + 2x S_1$.

Au lieu d'augmenter de x, on peut diminuer tous les termes de x; ainsi, pour le carré de 3, en égalant la somme des carrés de deux lignes ou de deux colonnes, on obtient $p = 0$ ou $q = 0$. Donc, *il n'existe pas de carré de 3, à deux degrés, formé de nombres tous différents.*

De même, si un carré de 4, à deux degrés, est formé de seize nombres consécutifs, on peut le supposer formé des nombres de 1 à 16; alors $S_1 = 34$ et $S_2 = 374$. Le nombre $16^2 = 256$ doit appartenir à deux rangées; mais

$$374 - 256 = 118$$

n'est décomposable que d'une seule manière en somme de trois carrés inégaux deux à deux, 81, 36 et 1. Donc, *il est impossible de faire un carré magique à deux degrés avec* 16 *nombres consécutifs*.

AMUSEMENTS SCIENTIFIQUES SUR L'ARITHMÉTIQUE.

1° LE TESTAMENT DU NABAB.

Problème d'Arithmétique indienne.

Un nabab laisse à ses enfants un certain nombre de diamants d'égale valeur, dans les conditions suivantes : Le premier prend

Fig. 155.

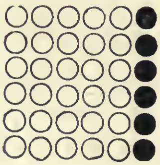
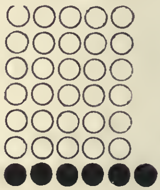


Fig. 156.



un diamant et le $\frac{1}{7}$ de ce qui reste ; le second prend deux diamants et le $\frac{1}{7}$ de ce qui reste ; le troisième prend trois diamants et le $\frac{1}{7}$ de ce qui reste, et ainsi de suite. Après le partage de tous les diamants, toutes les parts se trouvent égales. On demande le nombre des diamants et celui des enfants.

Nous représenterons les diamants par des pions noirs ou blancs, afin de distinguer ceux sur lesquels nous porterons plus particulièrement notre attention. Considérons d'abord un carré de

36 diamants (*fig.* 155), et portons au-dessous des pions blancs la colonne de pions noirs ; nous formons ainsi la *fig.* 156.

En retirant d'abord le pion noir à droite, les pions noirs forment le *septième* de ce qui reste, puisque la figure se compose de sept rangées égales, et ainsi la part du premier enfant se compose de six diamants.

Considérons maintenant le reste, en désignant par des pions noirs les diamants contenus dans la colonne à droite ; nous for-

Fig. 157.

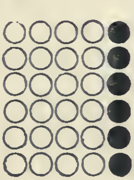
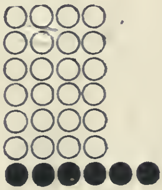


Fig. 158.



mons la *fig.* 157 ; plaçons maintenant cette colonne de pions noirs au-dessous des pions blancs, nous formons la *fig.* 158. La dernière ligne se compose de *deux* diamants et encore du $\frac{1}{7}$ du reste ; telle

Fig. 159.

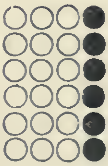
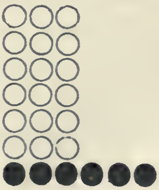


Fig. 160.



est la part du second enfant, égale à six diamants, comme celle du premier enfant.

En continuant le même raisonnement, par une semblable manœuvre on forme les *fig.* 159 et 160, où l'on voit que la part des dia mants du troisième enfant est représentée par *trois* diamants et le *septième* du reste.

Et ainsi de suite. Le nombre des diamants est donc égal à 36, et les enfants sont au nombre de six, prenant chacun six diamants.

Il est facile de voir qu'il en est ainsi, lorsque l'on remplace la fraction *un septième* par une autre quelconque, *un* $n^{\text{ième}}$; alors le nombre des enfants est égal à $(n-1)$, et le nombre des diamants, au carré de $(n-1)$.

Remarque. — On donne habituellement la solution du problème précédent au moyen de formules algébriques; on en trouve une de cette nature dans l'*Algèbre* d'Euler; mais il nous paraît fort probable que la solution que nous venons de donner est l'origine même de ce problème. Dès le v^e siècle de notre ère, les géomètres indiens représentaient les nombres par des briquettes, en forme de parallélépipèdes rectangles à base carrée, et dont la hauteur était égale à 2, 3, 4, 5, 6, ... fois le côté commun de toutes les bases. C'est ainsi que la lecture du *Traité d'Arithmétique* d'ARYABHATTA nous a permis de reconstituer la Table de multiplication dont il se servait dans son cours (à PATALIPUTRA, la *cité des fleurs*, capitale historique des monarques de l'Inde), pour la démonstration des propriétés fondamentales de la théorie des nombres. Le lecteur trouvera un exemplaire de cette Table dans la collection des machines à calcul du Conservatoire national des Arts et Métiers, à Paris. En remplaçant les colonnes de pions par des réglettes de cette Table, la solution de ce curieux problème devient intuitive.

2° LA MULTIPLICATION RAPIDE PAR 9, 99, 999.

Pour multiplier un nombre quelconque par 9, il n'est pas nécessaire de savoir la Table de multiplication, et l'on peut obtenir le produit par une simple soustraction. Soit, par exemple, à multiplier 748 par 9; on multiplie d'abord par 10 et l'on obtient 7480, et l'on retranche 748. L'opération se fait ainsi :

$$\begin{array}{r} 7480 \\ 748 \\ \hline 6732 \end{array}$$

et le produit est égal à 6732. Mais il n'est pas nécessaire d'écrire deux fois le nombre 748, et l'on obtient immédiatement le produit de la manière suivante : on ajoute un zéro à la droite et à la gauche du nombre et l'on retranche le chiffre 8 de 10, puis 4 de 8, puis 7 de 4 et 0 de 7, en tenant compte des retenues.

De même, si l'on veut multiplier 748 par 99, cela revient à multiplier par 100 et à retrancher ensuite 748. On place donc deux zéros à la droite et à la gauche de 748, et l'on a

$$0074800.$$

On retranche ensuite chacun des chiffres 8, 4, 7, du deuxième chiffre à droite, et ainsi 8 de 0, reste 2 et retiens 1 ; 1 et 4, 5 de 0 reste 5 et retiens 1 ; 1 et 7, 8 de 8, puis 0 de 4 et 0 de 7. On trouve ainsi

$$\begin{array}{r} 0074800 \\ 74052 \end{array}$$

Avec un peu d'habitude, il n'est pas nécessaire d'écrire les zéros.

On opère de même pour multiplier par 999, 9999, ..., et pour un nombre formé uniquement de 9.

On peut aussi tenir compte de ces simplifications, dans la multiplication de deux nombres quelconques, lorsque le multiplicateur contient une ou plusieurs fois le chiffre 9, selon que ces chiffres sont consécutifs ou ne le sont pas.

Multiplications curieuses.

Les exemples suivants sont extraits de notre *Théorie des Nombres* (t. I, p. 8); les curieux résultats obtenus proviennent de la théorie que nous venons d'exposer sur la multiplication par 9. Nous ajouterons encore que, pour multiplier un nombre par 8, on peut d'abord le multiplier par 9, et retrancher du produit le nombre proposé.

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 8 = 98765432$$
$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

3° LE BLANC ET LE NOIR.

Lorsque l'on considère une suite rectiligne de pions noirs et de pions blancs, deux cas peuvent se présenter dans l'ensemble de deux pions consécutifs, suivant que ces deux pions ont la même couleur ou sont de couleurs différentes. Nous dirons que deux pions de la même couleur présentent une *permanence :* on a ainsi, dans la *fig.* 161 les permanences

Fig. 161.

Permanences.

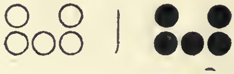
et nous dirons que deux pions de couleurs différentes présentent une *variation ;* on a ainsi, dans la *fig.* 162, les variations

Fig. 162.

Variations.

L'étude des variations est fort importante dans un grand nombre de questions d'Arithmétique et d'Algèbre, lorsque l'on

Fig. 163.



remplace les pions noirs et blancs par les signes + et — de l'addition et de la soustraction. Mais, dans ce qui va suivre, nous nous servirons des pions des deux couleurs. Il y a lieu d'abord de voir les modifications qui surviennent dans une suite de pions, lorsque l'on introduit un nouveau pion entre deux pions consécutifs de même couleur, c'est-à-dire dans une permanence. Le nombre des variations, qui est nul, ne change pas, si l'on introduit un pion de même couleur que les deux autres (*fig.* 163) ; mais il augmente de deux variations lorsqu'on introduit un pion de couleur opposée (*fig.* 164).

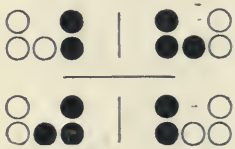
Enfin, lorsque l'on place un pion blanc ou noir entre deux pions de couleur différente, c'est-à-dire dans une variation, le

Fig. 164.

nombre total des variations ne change pas, ainsi qu'on le voit dans la *fig.* 165, qui comporte quatre hypothèses distinctes.

En réunissant les trois cas que nous venons d'étudier, on en

Fig. 165.



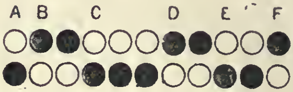
conclut que l'introduction d'un pion entre deux pions consécutifs ne modifie pas le nombre des variations, ou l'augmente de 2, nombre pair.

En répétant le même raisonnement, on en conclut que si, dans une suite rectiligne quelconque de pions noirs et de pions blancs, on introduit un nombre quelconque de pions entre les pions extrêmes, le nombre des variations ne peut diminuer, et, s'il augmente, il augmente d'un nombre pair 2, 4, 6, ...

De ce qui précède, il résulte immédiatement les deux propriétés suivantes : entre deux pions quelconques de couleur contraire d'une suite rectiligne, il y a une variation ou un nombre *impair* de variations. Entre deux pions quelconques de même couleur, d'une suite rectiligne quelconque, il n'y a pas de variation, ou bien il y en a un nombre *pair*. Pour démontrer ces deux propositions, il suffit de retirer successivement, entre les pions extrêmes, chacun des pions intercalés, en tenant compte des remarques précédentes. D'ailleurs, il est facile de constater que ces remarques ne s'appliquent pas au nombre des permanences.

Le nombre des variations ou des permanences d'une suite ne

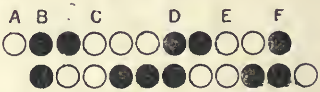
Fig. 166.



change pas lorsque l'on change les signes de tous les termes, et les commencements des séquences de pions de même couleur, que nous avons désignées par des lettres de l'alphabet, ne changent pas de place.

En considérant chaque pion avec celui qui est placé immédia-

Fig. 167.



tement au-dessous, on ne forme que des variations. Déplaçons d'un rang vers la droite tous les pions de la ligne inférieure, nous formons la *fig.* 167; alors on aperçoit sous chaque pion A, B, C, D, E, F, qui sert de commencement à une séquence, un pion de la même couleur.

Remarque. — C'est sur une observation de ce genre que repose la proposition connue sous le nom de *Lemme* de Segner, l'un des fondateurs de la Météorologie. Cette proposition sert de base au

Théorème de Descartes, dans la théorie des équations algébriques. Si l'on considère une équation algébrique quelconque dont le premier membre est ordonné et dont le second est nul, et si l'on fait le compte des variations des signes des coefficients, le nombre des racines positives de l'équation est au plus égal au nombre des variations, et s'il en diffère, il en diffère toujours d'un nombre pair.

4° LES ÉCHIQUIERS ANALLAGMATIQUES.

L'échiquier anallagmatique est un carré formé de cases noires et blanches, en nombre égal ou inégal, de telle sorte que, sur deux lignes (horizontales) ou sur deux colonnes (verticales) quelconques, le nombre des variations des couleurs soit toujours égal au nombre des permanences.

Nous représenterons les cases par des pions noirs et blancs. La

Fig. 168.

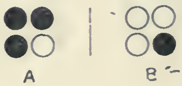
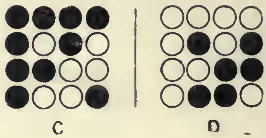


fig. 168 représente deux échiquiers anallagmatiques A et B que nous appellerons complémentaires, parce qu'aux cases noires de chacun d'eux correspondent des cases blanches dans l'autre.

Remplaçons chaque case noire de l'échiquier A par un échiquier A et chaque case blanche par un échiquier B, et opérons de même pour l'échiquier B; nous formons, dans la *fig.* 169, les échiquiers anallagmatiques complémentaires C et D, ayant quatre cases de côté.

D'ailleurs, il est évident que l'on peut déduire d'un échiquier anallagmatique un certain nombre d'autres échiquiers anallagmatiques, soit en échangeant deux lignes ou deux colonnes quelconques autant de fois que l'on voudra, soit en changeant la

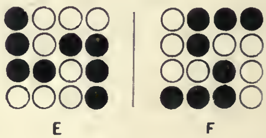
Fig. 169.



couleur de toutes les cases d'une ou de plusieurs rangées quelconques. Il y aurait lieu d'étudier ainsi le nombre total des échiquiers anallagmatiques de 2, 4, 8, 16, ..., cases de côté.

La *fig.* 170 représente deux échiquiers anallagmatiques complémentaires, et que l'on peut considérer comme identiques, lorsque l'on fait tourner l'un d'eux d'un $\frac{1}{4}$ de tour autour de son centre. Chacun d'eux contient le même nombre de cases blanches et de cases noires. Ces figures ont été indiquées pour la première fois par M. Sylvester et reproduites comme dallage en marbre blanc et rose dans un établissement public de Londres.

Fig. 170.



Pour obtenir les carrés anallagmatiques de huit cases de côté, on part d'un échiquier anallagmatique quelconque de quatre cases de côté, et l'on y remplace chacune des cases noires par l'échiquier A et chacune des cases blanches par l'échiquier B; et de même pour les échiquiers de seize, trente-deux, soixante-quatre, ... cases de côté, et ainsi en doublant indéfiniment.

Nous engageons le lecteur à reproduire les échiquiers obtenus en remplaçant chacune des cases noires de l'échiquier E par cet échiquier lui-même, et chacune des cases blanches par l'échiquier complémentaire F. On forme ainsi un joli dallage.

NOTE III.

Sur la troisième Récréation du tome III.

Sur les observations qui nous ont été présentées par M. Fleury, inventeur du *Caméléon* et du *Paradoxal*, nous avons reconnu que les données et les figures sur lesquelles sont basées les explications qu'on a lues dans le tome III ne se rapportaient pas exactement aux modèles qu'on trouve dans le commerce.

Nous n'avions pas, en effet, ces modèles sous les yeux; nous ne connaissions ces jeux que par une figure et une description sommaire données par un journal. Nous avons cherché à rendre la solution aussi difficile que possible. Pour cela, dans le *Caméléon*, nous avons imposé l'obligation de ne parcourir certains côtés que dans un sens, puis nous avons même supprimé une des diagonales. Pour le *Paradoxal*, nous avons admis implicitement que le pion vert portant le chiffre 1 devait toujours être amené sur la même case verte, celle qui est la plus voisine de la case jaune nº 1. Et le problème était ainsi rendu impossible dans la moitié des cas.

M. Fleury est parti d'une idée opposée à la nôtre. Il s'est attaché, dans la construction de ses jeux, à rendre la solution toujours possible, pensant — peut-être avec raison — que la vogue du *Taquin* n'avait pas été plus longue parce que les chercheurs se rebutaient de ne pouvoir réussir une fois sur deux.

Nous jugeons convenable de reproduire ici la description et la solution des jeux en question, telles qu'elles ont été données par l'inventeur.

Le Caméléon. — Le jeu se compose d'une boîte ronde contenant un casier et des pions, marqués chacun d'une des lettres du mot *caméléon*. La *fig.* 171 représente le casier formé d'un octogone étoilé, aux sommets duquel se trouvent quatre cases jaunes (blanches sur la figure) et quatre cases rouges (les cases ombrées), portant les mêmes lettres que les pions. Il existe, en outre, une case centrale noire.

Les cases jaunes et rouges sont reliées deux à deux par des lignes droites. Les cases rouges sont, de plus, reliées entre elles par deux diamètres passant sur la case centrale.

Les huit pions étant placés au hasard, chacun sur une des neuf cases du jeu, il faut, en jouant, les ramener tous sur les cases affectées des mêmes lettres, en sorte que le mot *caméléon* se lise sur les pions comme autour des cases.

La règle du jeu consiste à pousser chaque fois un pion sur la case vide, suivant la ligne droite qui va du pion à la case.

Voici la solution donnée par l'inventeur :

« Lorsque les huit pions sont à leurs places respectives, c'est-à-dire sur

Fig. 171.

les cases affectées des mêmes lettres, ils se présentent sur le pourtour dans l'ordre C, A, M, É, L, É, O, N; tandis qu'en suivant la ligne continue formée par les côtés du polygone étoilé, on les rencontre dans l'ordre C, É, O, A, L, N, M, É. En cet état, nous dirons qu'ils sont ordonnés et rendus à destination.

» Si alors on pousse un pion rouge sur la case centrale, le train formé par les sept autres pions pourra circuler à volonté sur la ligne polygonale. Dans ce mouvement, les pions se suivent en conservant le même ordre; et, par conséquent, ils restent toujours ordonnés. Mais ce n'est que quand ils sont revenus sur les cases affectées des mêmes lettres, qu'ils sont rendus à destination.

» Maintenant, supposons que les huit pions soient placés au hasard, chacun sur une des neuf cases du jeu; la solution comprendra les deux opérations suivantes :

» 1° Ordonner les pions.

» Puisque, pour être ordonnés, les pions doivent se suivre dans l'ordre

C, É, O, A, L, N, M, É, sur la ligne polygonale, le pion C devra y être suivi du pion É; celui-ci du pion O, du pion A, et ainsi de suite.

» Pour faire passer un pion derrière un autre, on le pousse au centre, où il attend que cet autre quitte une case rouge, pour venir l'occuper après lui.

» Si, au moment où l'on veut conduire un pion sur la case centrale, il n'est pas déjà sur une case rouge, on en pousse au centre un autre non encore ordonné, et situé sur une case rouge; puis on joue jusqu'à ce que le premier soit arrivé sur une case rouge, et qu'on ait pu reconduire aussi celui du centre sur une case rouge sans couper le train déjà formé.

» 2° Conduire les pions à destination.

» Une fois que tous les pions sont ordonnés, si l'on en pousse un au centre, il sera facile de conduire à destination le train formé par les sept autres pions. Pour cela, on joue un pion sur la case vide, et les autres à la suite, en tournant toujours dans le même sens; et, comme il y a deux pions que l'on peut jouer sur la case vide, on tournera dans un sens ou dans l'autre, suivant que l'on commencera par l'un ou par l'autre de ces deux pions. Or, le polygone étoilé ayant huit côtés, si, en tournant dans un sens, chaque pion doit parcourir six côtés avant d'arriver à sa place, en tournant en sens contraire, il y arrivera en parcourant deux côtés seulement. C'est donc en commençant qu'il faut choisir celui des deux pions que l'on jouera le premier.

» Lorsque les huit pions seront ordonnés, mais non rendus à destination, il pourra se présenter deux cas, suivant que le pion M se trouvera sur une case rouge ou sur une case jaune.

» *Premier cas.* — Si le pion M se trouve sur une case rouge, poussez-le au centre; puis conduisez le train à destination, et le pion M sur sa case.

» *Second cas.* — Si le pion M se trouve sur une case jaune, jouez successivement les pions É, C, É, É, C; puis conduisez le train à destination, et le pion C sur sa case. »

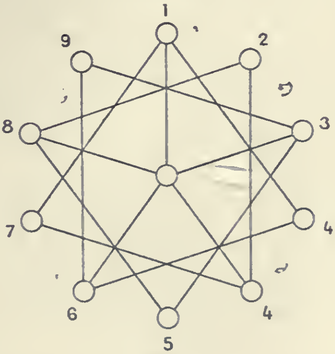
Avant le *Caméléon*, M. Fleury avait inventé un autre jeu, auquel il donna le nom de *la Rose mystique*.

La Rose mystique. — La figure se compose d'une case centrale et de dix autres cases rouges placées aux sommets d'un décagone étoilé, portant les numéros 1 à 9, le numéro 4 étant répété deux fois (*fig.* 172.)

Les dix pions étant placés au hasard, chacun sur une case du jeu, il faut les ramener tous sur les cases de mêmes numéros, en se conformant à la règle du jeu, qui consiste à pousser chaque fois un pion sur la case vide, suivant la ligne droite qui va de ce pion à cette case.

Le procédé au moyen duquel le problème est rendu toujours possible, est le même que pour le *Caméléon*. Pour le faire comprendre, supposons que, dans une boîte de *Taquin*, on mette deux numéros 4. Les deux derniers numéros seront 13 et 14, au lieu d'être 14 et 15. Or, quand en jouant on a conduit tous les dés à leurs places respectives, à l'exception des deux derniers, le problème est reconnu impossible dans le *Taquin* ordinaire,

Fig. 172.



tandis que, dans le *Taquin* à deux 4, il suffit de conduire l'un de ces deux dés à la place de l'autre, pour que le problème s'achève facilement.

C'est ce secret que M. Fleury a introduit dans la *Rose mystique* en y mettant deux numéros 4. Mais, à la vue de ces deux 4, on se demande pourquoi deux 4?... et l'on pense que le secret est là.... Tandis que personne n'aura l'idée de demander pourquoi deux É dans Caméléon? Sous ce rapport, nous considérons le *Caméléon* comme mieux réussi que la *Rose mystique*.

Le Paradoxal. — La *fig.* 173 représente ce jeu. Les cases blanches, noires et ombrées de cette figure sont respectivement rouges, vertes et jaunes sur le casier du jeu. La boîte au fond de laquelle est dessiné ce casier contient seize pions : quatre jaunes numérotés 1, 2, 3, 4; quatre verts numérotés 1, 4, 7, 10, et huit rouges portant les numéros 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12.

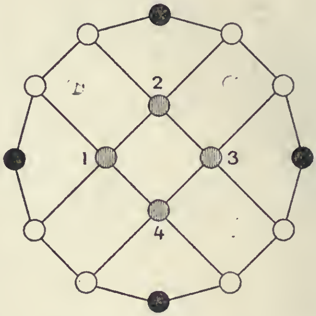
Les seize pions étant placés au hasard sur les cases du jeu, on en retire un jaune, et l'on joue en poussant chaque fois un pion sur la case vide, suivant la ligne droite qui va de ce pion à cette case.

C'est en jouant toujours de cette manière qu'il faut obtenir : 1° que les trois pions jaunes arrivent chacun à sa place sur le carré central; 2° que les douze autres pions se trouvent sur les cases de même couleur, et leurs numéros disposés par ordre de grandeur, dans le même sens que ceux qui marquent les heures d'une pendule.

Voici la solution de M. Fleury :

« Lorsqu'il y a quatre pions au carré central, le train des onze pions qui restent au pourtour peut avancer à volonté dans un sens ou dans l'autre; et si, à un moment donné, on pousse dans la case vide un pion du carré

Fig. 173.



central, il arrive entre deux pions du pourtour, devant l'un et derrière l'autre, selon le sens de la marche du train.

» De même, lorsque la case vide se trouve au carré central, on peut faire circuler à volonté le train des trois pions restants, et amener l'un d'eux sur telle case du centre que l'on veut.

» Par cette double manœuvre, deux pions quelconques peuvent toujours être mis en vue, c'est-à-dire amenés aux extrémités de la droite qui joint une case du centre à une case du pourtour.

» Cela compris, pour résoudre la question proposée, on fera d'abord passer sur une case rouge le pion vert numéro 1, s'il n'y est déjà; puis, ayant amené le pion rouge numéro 2 en vue du numéro 1, on le fait passer derrière lui. On fera de même passer le 3 derrière le 2, et ainsi de suite.

» De cette manière, on arrivera assez facilement à conduire tous les pions à leurs places, à l'exception des deux derniers du pourtour, comme du carré central, qui pourront se trouver l'un à la place de l'autre.

» Lorsque l'opération en est arrivée là, trois cas peuvent se présenter.

» *Premier cas.* — Les pions 11 et 12 sont à la place l'un de l'autre, en même temps que deux pions du centre.

» Poussez le 12 sur la case adjacente du carré central, puis le 10 à la place que vient de quitter le 12, et faites suivre les pions 9 et 8. Ensuite glissez entre le 7 et le 8 le pion jaune qui est en vue; puis opérez sur le train central un mouvement qui amène le 12 en vue du 11; faites rentrer le pion jaune que vous avez glissé entre le 7 et le 8; ramenez à leurs places les pions 8, 9, 10 et 11. Enfin, glissez le 12 entre les numéros 1 et 11, et conduisez à leurs places les trois pions jaunes.

» *Deuxième cas.* — Tous les pions sont à leurs places, à l'exception des numéros 11 et 12, qui sont l'un à la place de l'autre.

» Poussez le 12 au carré central, et faites avancer de trois rangs tout le train de ceinture, de manière que le numéro 1, qui occupe une case verte, arrive sur la case verte suivante; puis, ayant glissé le 12 entre les numéros 1 et 11, il ne vous reste plus qu'à régulariser la position du petit train central.

» *Troisième cas.* — Tous les pions sont à leurs places, à l'exception de deux jaunes, qui sont l'un à la place de l'autre.

» Poussez le 12 au carré central; faites avancer de trois rangs tout le train de ceinture, et glissez entre le 10 et le 11 le pion jaune qui est en vue. Ensuite, imprimez au petit train central un mouvement qui amène le 12 en vue de 11; faites rentrer le pion jaune, en ayant glissé le 12 entre les numéros 1 et 11, il ne vous reste plus qu'à régulariser la position des pions jaunes.

» Remarque. — Toutes les fois que la solution, commencée par une case verte, est impossible, elle devient possible en commençant par la case verte suivante. Or, la figure étant symétrique par rapport aux quatre cases vertes, on ne voit pas de prime abord pourquoi le problème est possible ou impossible en commençant par une case verte plutôt que par la case verte suivante. C'est en cela que consiste le paradoxe. »

L'explication est la même que pour le *Taquin*, où, pour rendre possible une solution qui ne l'est pas, il suffit de tourner la boîte de 90° et de reformer dans ce nouveau sens les rangées de pions. Si les pions du *Taquin* étaient ronds, au lieu d'être carrés, cette rotation ne serait pas sensible à l'œil et, cependant, elle change la classe de la permutation considérée.

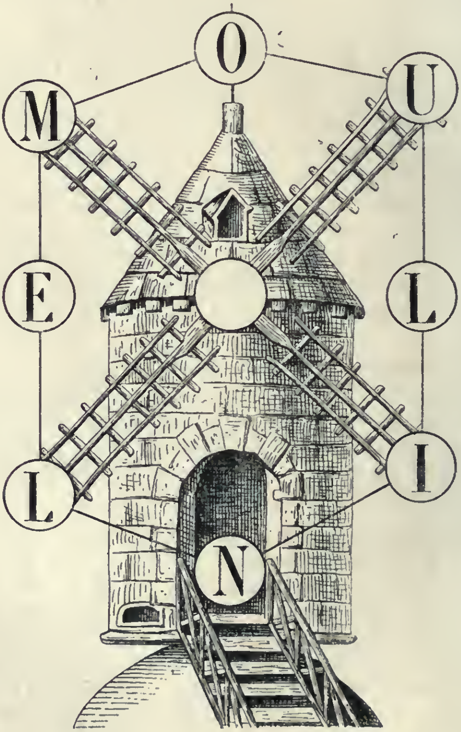
Le problème ne présente que des cas possibles quand le pion sorti du jeu est jaune, tandis que, s'il était rouge ou vert, le problème présenterait des cas possibles et des cas impossibles. C'est un second paradoxe qui justifie le nom donné au *Paradoxal*.

M. Fleury a inventé toute une série d'autres jeux scientifiques : le *Moulin rouge*, le *Trifolium diabolique*, *France et Russie*, le *Cadran étoilé*, l'*Hypertaquin*, la *Boîte magique*, les *Cartes hypnotiques*, etc., etc.

Le principe de ces divers jeux est le même que celui des deux jeux précédents.

Le Moulin rouge. — Ce petit jeu vient d'être édité par la maison très connue à Paris sous le nom de *Paradis des Enfants*.

Fig. 174.



Ce jeu (*fig.* 174) a neuf cases, dont les huit du pourtour renferment les lettres qui forment LE MOULIN, et communiquent entre elles par une ligne droite. Les quatre qui sont aux extrémités des ailes du moulin communiquent de même avec la case centrale.

On pose le problème en plaçant au hasard les huit pions, chacun sur une des neuf cases; et, pour le résoudre, il faut conduire tous les pions, chacun sur la case affectée de la même lettre. La règle à observer, en jouant, consiste à pousser chaque fois un pion sur la case vide, suivant la ligne qui va de ce pion à cette case.

N. B. — Le problème présente des cas faciles et des cas difficiles, mais jamais de cas impossibles.

C'est, comme le *Caméléon*, un Taquin à neuf cases avec une lettre répétée deux fois.

Le Trifolium diabolique. — Le jeu se compose d'une boîte ronde contenant un casier et des pions numérotés.

La *fig.* 175 représente le casier, formé de trois polygones étoilés, aux sommets desquels se trouvent des cases numérotées.

Les cases du polygone de sept côtés sont rouges; celles d'un des deux polygones de cinq côtés sont vertes, et celles de l'autre sont jaunes (sur la *fig.* 175 elles sont respectivement blanches, noires et ombrées).

Les pions rouges sont numérotés de 1 à 7, comme les cases de même couleur. Les pions verts et les pions jaunes sont numérotés de 1 à 5.

Pour poser la question, on met au hasard les dix-sept pions sur les dix-sept cases, et l'on retire du jeu deux pions rouges.

Le problème à résoudre consiste à conduire les 15 pions restés au jeu, à leurs places respectives, c'est-à-dire chacun sur la case de même couleur et de même numéro.

Pour jouer, il faut pousser chaque fois un pion sur une des deux cases vides, en suivant la droite qui va du pion à la case.

L'inventeur du jeu a donné la solution suivante :

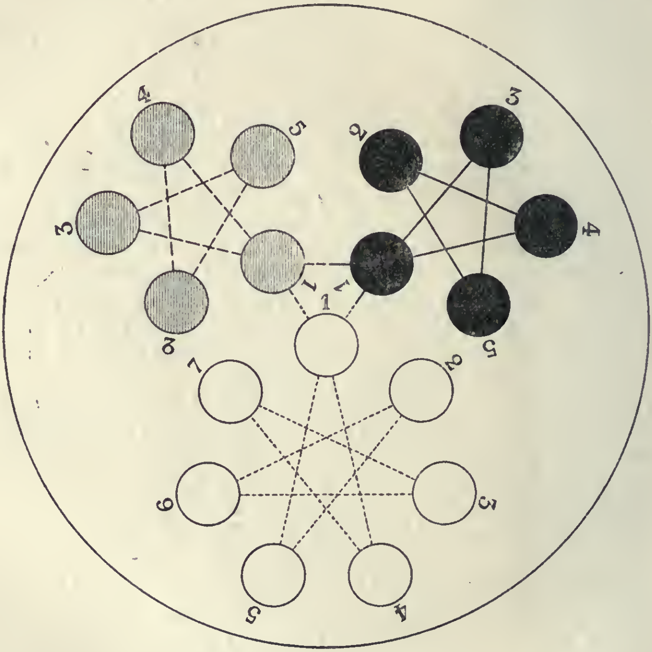
« Pour arriver à comprendre les solutions, répétez les exercices suivants :

» *Premier exercice.* — Tous les pions étant hors du jeu, prenez-en un rouge à la main, et faites-lui parcourir toute la ligne polygonale rouge, en passant successivement par les cases 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5. Notez bien l'ordre dans lequel les pions rouges doivent se suivre sur la ligne polygonale.

» *Deuxième exercice.* — Tous les pions rouges étant posés sur le jeu à leurs places respectives, enlevez le pion 5, puis, sur sa case restée vide, poussez le pion 1 et, à sa suite, successivement les pions 4, 7, 3, 6, 2. Maintenant que les six pions ont fait chacun un pas, continuez à pousser le pion 1 et les autres à sa suite, jusqu'à ce que chacun d'eux soit revenu à sa place après avoir parcouru toute la ligne polygonale.

» *Troisième exercice.* — Les six pions se trouvant sur leurs cases, prenez les deux pions 2 et 7, et portez-les l'un à la place de l'autre. Comme alors ces deux pions ne sont plus à leur rang sur la ligne polygonale, il faut les y ramener, c'est-à-dire le 2 après le 6 et le 7 après le 4, suivant l'ordre noté au premier exercice. Pour cela, jouez le pion 1 sur la case 5, et les

Fig. 175.



autres en suivant, jusqu'à ce que le 2 arrive sur la case 1, et de là vous le poussez sur la case 1 verte ou jaune, où il attend que le pion 4 ait passé sur la case 1, pour y revenir.

» Au moment où le pion 2 est poussé sur une autre étoile, les cases rouges 1 et 4 étant vides, c'est sur la case 4 qu'il faut jouer le pion 3, en suivant toujours dans le même sens la ligne polygonale, et, lorsqu'un pion devra être joué sur la case 1, ce qui va arriver aux 3 et 6, il la franchira pour aller se poser sur la case 5, et c'est quand il y sera arrivé que le 2 viendra prendre son rang derrière lui.

» Vous opérerez sur le pion 7 comme sur le pion 2; vous le ferez sortir du rang quand il arrivera sur la case 1, pour l'y faire rentrer ensuite derrière le 4. Après cela, il ne restera plus qu'à faire marcher le train des six pions jusqu'à ce que chacun soit à sa place.

» *Quatrième exercice.* — Répétez l'exercice précédent sur l'étoile verte ou aune.

» Après avoir noté que les pions doivent se suivre, sur la ligne polygonale, dans l'ordre 1, 3, 5, 2, 4, vous enlevez le 4, et ayant porté, l'un à la place de l'autre, les pions 2 et 3, vous les ramènerez à leur rang, c'est-à-dire le 2 derrière le 5, et le 3 derrière le pion 1.

» *Cinquième exercice.* — Placez au hasard tous les pions rouges sur l'étoile rouge, de même les verts sur l'étoile verte, et les jaunes sur l'étoile jaune, puis sortez les deux pions qui sont sur les cases 1 rouge et verte. Cela fait, il faut conduire à sa case chacun des quinze pions restés sur le jeu. Poussez d'abord sur la case 1 verte le pion qui est sur la case 1 jaune, puis faites circuler le train des quatre pions restés sur l'étoile jaune, jusqu'à ce que le pion 1 vienne sur sa case et poussez-le sur la case 1 rouge. Ensuite faites rentrer l'autre pion jaune et conduisez, chacun à sa case, les quatre pions de l'étoile jaune, puis aussi le pion 1. Vous conduisez de même à leurs cases les quatre pions de l'étoile verte, et enfin les six pions de l'étoile rouge.

» *Sixième exercice.* — Ayant placé tous les pions sur leurs cases respectives, sortez du jeu les deux pions 1 rouge et vert; puis portez, l'un à la place de l'autre, le 3 vert et le 5 rouge. Il faut, en jouant, ramener ces deux pions sur leurs cases; ce qui se fait en huit mouvements : 1° Conduisez le 3 vert sur la case 1 verte; 2° le jaune 1 sur la case 5 rouge; 3° le 3 vert sur la case 1 rouge; 4° le 5 vert sur la case 1 jaune; 5° le 3 vert sur la case 3 verte; 6° le jaune 1 sur la case 1 verte; 7° le 5 rouge sur la case 5 rouge 8° le jaune 1 sur la case 1 jaune. Après ces huit mouvements, tous les pions sont à leurs places.

» Pour que deux pions puissent être permutés en huit mouvements, il faut que celui qui est sur l'étoile rouge soit à la case 4 ou 5, et l'autre à la case 3 ou 4 sur l'étoile verte ou jaune. Le pion qui ne s'y trouve pas y est conduit en faisant circuler le train.

» *Solution générale.* — Ayant placé tous les pions au hasard, chacun sur une case du jeu, et sans distinction de couleur, enlevez-en deux rouges au hasard. La question étant ainsi posée, la solution consiste à ramener les quinze pions restants, chacun sur sa case.

» Supposons que les deux rouges enlevés du jeu soient le 2 et le 5. J'adopte le pion 1 vert pour représenter le 2 rouge sur le jeu; en sorte que les deux pions qui manquent au jeu sont censés le 5 rouge et le 1 vert. Par cette supposition, la question est ramenée à l'exercice cinquième, où il manque un rouge et un vert.

» Maintenant, par la répétition de l'exercice sixième, faites passer tous les pions d'une couleur sur l'étoile de la même couleur, en ayant soin de traiter toujours le pion 1 vert comme si c'était le pion 2 rouge.

» Si les cases 1 rouge et verte ne sont pas vides, jouez quelques pions jusqu'à ce qu'elles le soient. Cela posé, vous régulariserez l'étoile jaune, en suivant la marche indiquée au cinquième exercice. Après cela, vous conduisez, chacun sur sa case, les quatre pions qui sont sur l'étoile verte. Ensuite vous passez à l'étoile rouge, qui a six pions, y compris le pion vert représentant le 2 rouge. Vous les faites arriver chacun à son rang sur la ligne polygonale, c'est-à-dire dans l'ordre 1, 4, 7, 3, 6, 2; puis vous faites marcher le train de ces six pions jusqu'à ce que le 2 rouge, représenté par le pion vert, arrive sur la case 1, et de là vous le poussez sur la case 1 verte; après quoi, vous continuerez à faire circuler le train des cinq pions rouges jusqu'à ce que chacun occupe sa place. »

Le *Trifolium* peut être remplacé par un *Taquin continental*, d'une forme spéciale, représenté sur la *fig.* 176.

Ayant enlevé deux pions pris parmi ceux qui sont numérotés de 1 à 7, la solution consiste :

1° A ramener dans le carré les cinq pions restants parmi les sept premiers, c'est-à-dire à échanger ceux de ces pions qui se trouvent dans les rectangles avec ceux des pions 8 à 17 qui sont dans le carré.

Pour cela, les cases 6 et 7 étant vides, on commence par amener sur la case 1 le pion à passer du carré dans un rectangle et sur la case 12 (ou 9) le pion à passer du rectangle de droite dans le carré; puis on joue les sept coups suivants :

De 13 en 6, — de 8 en 7, — de 12 en 13, — de 8 en 12, — de 1 en 8, — de 12 en 1, — de 6 en 13.

2° A ramener dans le rectangle de droite les pions numérotés de 8 à 12, et dans le rectangle de gauche, les pions 13 à 17, c'est-à-dire à échanger ceux des pions 13 à 17 qui sont dans le rectangle de droite avec ceux des pions 8 à 12 qui sont dans le rectangle de gauche.

Pour cela, les cases 6 et 7 étant vides, on commence par amener sur la case 12 (ou 9) le pion à passer dans le rectangle de gauche et sur la case 14 (ou 17) le pion à passer dans le rectangle de droite, puis on joue les sept coups suivants :

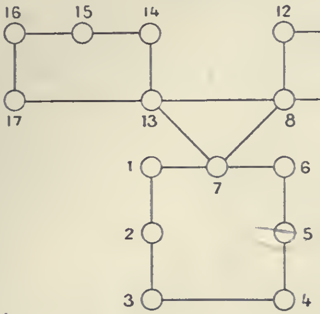
De 8 en 6, — de 13 en 8, — de 14 en 7, — de 8 en 14, — de 12 en 13, de 14 en 12, — de 6 en 8.

3° A replacer dans l'ordre naturel les pions du carré.

Les deux cases vides sont toujours 6 et 7.

Jouer de 8 en 6, puis amener sur la case 8 le pion que l'on veut placer

Fig. 176.



à la suite d'un autre et le faire rentrer dans le carré quand le pion qui doit le précéder arrive sur la case 6.

4° A remettre dans l'ordre naturel les pions de chaque rectangle.

Pour le rectangle de droite :

Jouer de 13 en 6 ; amener le pion 8 sur la case 13, les pions 9 et 10 sur les cases 7 et 8 ; faire rentrer ces deux pions dans le rectangle ; amener 12 en 7, mettre en place les pions 9, 10, 11, puis les pions 12 et 8 ; enfin jouer de 6 en 13.

Marche analogue pour le rectangle de gauche.

France et Russie. — De tous les jeux inventés par M. Fleury, celui-ci nous paraît le plus savamment combiné.

Il se compose d'un échiquier formé de treize cases reliées entre elles par des lignes droites (*fig.* 177), et de douze pions, dont six jaunes et six rouges.

Les cases jaunes, comme les pions jaunes, portent les lettres qui forment le mot RUSSIE ; tandis que les cases rouges, comme les pions rouges, portent les lettres qui forment le mot FRANCE.

Les cases jaunes et les cases rouges, placées aux sommets de deux hexagones concentriques, communiquent entre elles et avec la case noire placée au centre, par des lignes droites, comme l'indique la *fig.* 177.

On pose le problème en plaçant *au hasard* tous les pions, chacun sur une des treize cases, et pour le résoudre il faut, en jouant, conduire chaque pion sur la case qui a la même couleur et la même lettre.

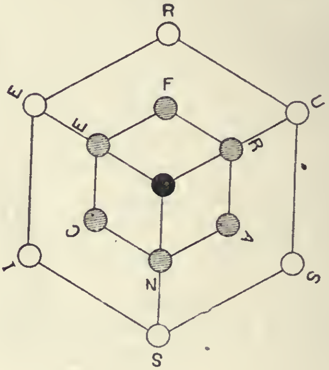
La règle à suivre, en jouant, consiste à pousser, chaque fois, sur la case vide, un pion voisin, en suivant la ligne droite tracée entre ce pion et cette case.

Nota. Le problème présente des cas difficiles, mais jamais de cas impossibles.

Voici la solution donnée par l'auteur :

« Les douze pions étant placés au hasard, chacun sur une des treize cases,

Fig. 177.



on pourra, sans trop de difficulté, faire passer les pions jaunes sur les cases jaunes et les quatre premiers sur leurs cases respectives. Il en sera de même pour les pions rouges.

» En cet état, quatre cas peuvent se présenter, et, dans l'explication qui va suivre, les lettres des pions rouges seront plus hautes que celles des pions jaunes.

» *Premier cas.* — Tous les pions sont à leurs places respectives, et le problème est résolu.

» *Deuxième cas.* — Tous les pions sont à leurs places, à l'exception des deux jaunes I, E, qui sont à la place l'un de l'autre. Pour achever le problème, jouez successivement les pions

N S S U R I E S S N E E I R U S S I E E.

» *Troisième cas.* — Tous les pions sont à leurs places, excepté les deux jaunes I, E, et les deux rouges C, E. Jouez successivement les pions

C I E S N C I E S N C E E I E C N S I E C N S I E E.

» *Quatrième cas.* — Tous les pions sont à leurs places, à l'exception des deux rouges C, E. Alors, jouez les pions

N S S U R N S S U R N S S E C S S A E S S F A N R U S S N R U S S
N R A F C N E A R E N C E. »

Nous ne pouvons pas donner la description de l'*Hypertaquin*, qui est encore en préparation. Mais nous savons, par l'auteur, que le jeu contient seize pièces carrées, comme le *Taquin* ordinaire, et que le problème ne présente que des cas possibles.

Nous empruntons au journal *la Nature* un article paru, sous la signature de M. Henri Fleury, qui y donne l'explication de sa *Boîte magique*.

« La petite boîte qui constitue la récréation contient six cartons, sur chacun desquels sont inscrits trente-deux noms d'enfants. Les cartons sont une transformation des cartes dites mystérieuses, dont nous allons expliquer la construction.

» Je prends six petits cartons blancs, que je désigne par les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, placés en haut de ces cartons. En additionnant ces nombres de toutes les manières possibles, on obtient tous les autres nombres entiers jusqu'à 64. Ainsi,

$$3 = 1 + 2, \quad 5 = 1 + 4, \quad 6 = 2 + 4, \quad 7 = 1 + 2 + 4, \quad \ldots,$$
$$63 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32.$$

» Ayant la liste des 63 nombres entiers qui précèdent 64, j'écris sous le nombre que désigne chaque carton tous ceux dans la formation desquels il est entré. Par exemple, le nombre 23 sera inscrit sur les cartons 1, 2, 4, 16 puisque $23 = 1 + 2 + 4 + 16$. Lorsque cette opération est finie, j'ai six cartons qui contiennent chacun trente-deux nombres, le premier présentant les trente-deux nombres impairs qui précèdent 64.

» Voici maintenant comment s'exécute le tour. Pour que je devine le nombre que vous avez choisi, vous remettez les cartons qui le contiennent et vous gardez les autres. Par exemple, si vous me remettez les cartons 1, 2, 4, 16, je fais la somme de ces nombres et je dis que vous avez choisi le nombre 23.

» Les nombres inscrits sur les cartons peuvent aussi désigner des noms quelconques, que l'on écrit à leur droite. C'est ainsi que l'on obtient les cartes dites mystérieuses, au moyen desquelles on devine le nom choisi ou pensé, ce qui se fait en calculant le nombre correspondant.

» Le jeu des cartes mystérieuses étant depuis longtemps trop vulgairement connu, je l'ai transformé en un tour nouveau vraiment surprenant, même pour le mathématicien.

« D'abord j'ai supprimé tous les nombres, en sorte que les cartons ne contiennent que des noms d'enfants. On comprend alors qu'un calcul soit moins difficile sur des nombres connus que sur des nombres disparus. En second lieu, vous ne me remettez que les cartons qui ne contiennent pas le nom à deviner. On comprend encore qu'il devienne plus difficile de trouver ce nom sur les cartons qui ne le contiennent pas.

« Comme je l'ai dit tout à l'heure, le tour est étonnant quand on le voit exécuter. Mais le mystère disparaît quand on lit l'instruction qui accompagne le jeu. En effet, on y voit, d'une part, que les nombres qui désignent les cartes mystérieuses se trouvent remplacés sur mes cartons par un système très simple de points adroitement dissimulés dans l'encadrement. Par exemple, le nombre 32 y est remplacé par un petit groupe de six points. D'autre part, on voit comment une liste générale, collée au fond de la boîte, reste invisible pour les spectateurs pendant l'exécution du tour.

» Si l'instruction qui accompagne le jeu en dévoile le mystère, elle ne lève pourtant pas toute difficulté théorique; car elle ne dit pas par quel secret on peut trouver le nombre pensé, au moyen des cartes qui ne le contiennent pas. Mais il est bien simple, car il suffit de savoir que le nombre donné par celles-ci est le complément du nombre donné par les autres pour faire 63. Par exemple, si le nombre choisi est 23, il se trouve sur les cartes 1, 2, 4, 16 et les cartes qui ne le contiennent pas sont désignées par 8 et 32, dont la somme est 40, complément de 23. Or, l'opération même qui consiste à soustraire 40 de 63, pour avoir 23, est supprimée par l'emploi des cartons de la *Boîte magique*. Il m'a suffi pour cela de permuter les noms désignés par 23 et 40.

» J'ajouterai que le secret des jeux que j'ai inventés repose sur des propriétés numériques fort simples, mais généralement inconnues, parce qu'elles ne sont pas expliquées dans les traités classiques. »

NOTE IV.

Sur la huitième Récréation du tome I.

Dans le tome I des *Récréations mathématiques*, le paragraphe consacré au *Taquin complet* (p. 234) n'a pas reçu tous les développements nécessaires. Aussi, croyons-nous devoir revenir sur cette question et donner, d'après M. Paul Redon, quelques explications complémentaires.

Voici d'abord l'énoncé de la question :—

Les seize pions du Taquin étant placés dans un ordre donné, retirer l'un d'eux et parvenir à une position également donnée.

Nous appellerons l'ordre primitif dans lequel les pions sont placés : *position initiale*, et celle qu'il s'agit d'atteindre : *position finale*. Si tous les dés étaient rangés dans l'ordre 1, 2, 3, ..., 15, 16, nous dirions qu'ils sont dans leur *position naturelle* ou *fondamentale*.

On a vu (t. I, p. 201) que, dans n'importe quelle position, si l'on permute deux dés, on obtient un changement de classe.

Ceci rappelé, concevons le fond de la boîte du Taquin divisé en seize cases alternativement noires et blanches comme celles d'un échiquier, et convenons de dire qu'un pion est sur sa couleur naturelle lorsqu'il est placé sur une case de même couleur que celle qu'il occupe dans la position fondamentale.

Si, après avoir retiré un pion de la position initiale, on remarque la couleur de la case sur laquelle était ce pion, qu'on pousse à sa place un pion voisin et qu'on remette sur la nouvelle case vide le pion précédemment enlevé, la position aura changé de classe, et le pion enlevé, de couleur. On comprend que, en continuant ainsi, après un nombre impair de coups, joués comme il vient d'être dit, la position a changé de classe et la case vide de couleur, tandis que, après un nombre pair de coups, ni la classe ni la couleur ne sont modifiées.

Dès lors, si la position initiale et la position finale sont toutes deux de même classe, on doit jouer un nombre pair de fois et, par suite, pour réussir, il faut et il suffit que le cube enlevé occupe, dans les deux positions, un case de même couleur. Si la position initiale et la position finale appartiennent à deux classes différentes, il faut et il suffit que le cube enlevé occupe, dans les deux positions, une case de couleur différente, puisque, dans ce cas, on doit jouer un nombre impair de fois.

Cette règle est générale et s'applique à tous les problèmes du Taquin. Si, par exemple, on se propose d'atteindre la position fondamentale, il faut enlever un cube qui soit sur sa couleur naturelle. Si l'on pose comme condition de toujours enlever le numéro 16, on ne peut parvenir à la position fondamentale que si l'on est dans un des deux cas suivants : 1° la position initiale est de première classe et le numéro 16 est sur une case de même couleur que celle du coin inférieur droit du Taquin ; 2° la position est de deuxième classe et le numéro 16 occupe une case qui est de la couleur oppose à celle du coin inférieur droit.

Quand on commence, avant toute chose, par retirer le numéro 16 et qu'on met, au hasard, dans la boite les quinze autres pions, de façon que la case vide soit toujours en dernier, le problème devient très simple lorsqu'on se propose seulement d'arriver à la position naturelle. C'est avec cet énoncé que nous fut importé ce jeu qui est connu, en Amérique et en Angleterre, sous le nom de « 15 *Puzzle*, c'est-à-dire le jeu des Quinze. » Alors, il suffit de remarquer que, puisque la case vide de la position initiale et celle de la position finale se confondent en une seule et même case, il est évident que, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les quinze premiers numéros présentent une position de première classe. Dans cette question, la considération de l'échiquier est donc superflue, quoique très utile pour rendre nettement compte de la séparation infranchissable entre les cas possibles et les cas impossibles.

A l'aide de cette méthode on explique avec la plus grande facilité tous les jeux qui dérivent du Taquin et dont nous nous sommes occupés dans le tome III des *Récréations* : l'Étoile nationale, le Paradoxal, le Caméléon, etc., etc.

NOTE V.

Sur les Carrés magiques.

L'impression du tome IV des *Récréations* était terminée, quand nous avons retrouvé, dans les papiers de Lucas, le carré magique restauré dont il est question à la page 89. Nous le donnons ci-contre.

Il ne reste malheureusement rien en ce qui concerne le nombre des solutions du problème que Lucas espérait donner d'après les indications de Fermat.

Restauration d'un car

23	464	459	457	109	111	108	110	132	133	
25	41	436	435	433	432	196	195	241	242	2
27	45	13	474	469	467	82	81	72	90	
461	55	15	34	450	449	447	446	156	157	1
456	56	17	42	3	484	479	477	66	65	
137	428	471	41	5	127	126	125	361	362	3
153	431	466	31	7	347	148	338	339	145	1
154	439	98	453	481	325	161	169	168	318	3
384	266	407	445	476	292	293	191	190	299	2
383	268	406	442	424	270	280	272	273	211	2
379	265	392	172	60	248	227	250	251	230	2
378	267	391	173	59	226	249	228	229	252	2
351	282	405	176	74	204	214	206	207	277	2
350	263	390	177	73	182	192	301	300	189	1
334	199	77	330	423	171	315	323	322	164	1
333	216	96	311	413	149	346	147	146	340	3
100	221	76	310	414	389	359	360	124	123	1
99	223	75	291	483	1	6	8	419	420	4
104	202	97	452	35	36	38	39	329	328	3
105	238	473	11	16	18	403	404	393	395	3
136	438	49	50	52	53	289	290	244	243	2
463	21	26	28	376	374	377	375	353	352	3

enceintes, de Fermat.

1	373	371	357	356	372	382	370	335	30	22
5	284	287	246	245	288	261	51	58	47	460
3	401	400	396	398	399	397	20	12	440	458
1	326	327	306	307	44	37	33	470	430	24
7	422	421	416	415	10	2	443	468	429	29
4	365	366	118	117	116	480	444	14	57	348
2	142	344	345	139	138	478	454	19	54	332
20	321	163	162	324	160	4	32	387	46	331
7	186	185	184	302	193	9	40	78	219	101
9	208	278	279	205	215	61	43	79	217	102
1	233	256	257	258	237	425	313	93	220	106
3	255	234	235	236	259	426	312	94	218	107
5	274	212	213	271	281	411	309	80	203	134
8	296	295	294	183	303	412	308	95	222	135
6	167	317	316	170	314	62	155	408	286	151
4	343	141	140	337	336	72	174	389	269	152
21	120	119	367	368	358	71	175	409	264	385
8	63	64	69	70	475	482	194	410	262	386
4	159	158	179	178	441	448	451	388	283	381
2	84	85	89	87	86	88	465	472	247	380
0	201	198	239	240	197	224	434	427	437	349
4	112	114	128	129	113	103	115	150	455	462

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT VII

PREMIÈRE RÉCRÉATION. — *Le Calendrier perpétuel et le Calcul automatique des résidus.*

Dédicace et épigraphe 1
Le calendrier julien et grégorien.................................... 3
De Romulus à Jules César.. 4
La réforme julienne............ 5
La réforme grégorienne.. 6
But du calendrier... 6
Règle pour le calendrier julien..................................... 8
Règle pour le calendrier grégorien................................. 9
Calcul mental des dates.. 10
Utilité du calendrier perpétuel....................................... 11
Le calcul automatique des résidus.. 12
Le calendrier perpétuel à réglettes.......... 17

Deuxième Récréation. — *L'Arithmétique en boules.*

	Pages.
Dédicace et épigraphe	21
L'Arithmétique en boules	23
L'addition	24
La multiplication	25
Les nombres triangulaires	26
La pile d'obus	27
Calcul direct des triangulaires	29
Les nombres carrés	30
La Table des carrés	32
Les restes des carrés	34
Les décompositions d'un carré	34
Les nombres pentagonaux	35
La Table des pentagonaux	36
Les nombres hexagonaux	39
Les nombres polygonaux	40
Table des nombres polygonaux	42
Deux problèmes de Fermat	44
La Table des quarts de carrés	45

Troisième Récréation. — *L'Arithmétique en bâtons.*

Dédicace et épigraphe	51
Dans l'Inde, au temps de Clovis	53
Le Fakhrî d'Alkarkhî	54
Les nombres en baguettes	55
Table de multiplication des Arabes	57
Les nombres pyramidaux à base triangulaire	58
Table des pyramidaux triangulaires	60
Les pyramidaux quadrangulaires	62
Les piles de boulets	63
La pile des cubes	64

Quatrième Récréation. — *Le Jeu des Mérelles au* XIII^e *siècle.*

Pages

Épigraphe.. 67
Le Jeu des Mérelles au XIII^e siècle........................ 69

Cinquième Récréation. — *Les Carrés magiques de Fermat.*

Épigraphe.. 87
Les carrés magiques de Fermat........................ 89
Les carrés magiques de trois........................ 92
La rotation et la symétrie........................ 93
Les carrés magiques de quatre........................ 95
De l'addition et de la multiplication des carrés........................ 96
Transformations générales des carrés........................ 99
Les Tables de Frénicle........................ 101
Égalités à quatre boules........................ 102
Égalités à deux boules........................ 104
Des carrés à quartiers égaux........................ 107
La Table d'addition........................ 109
Le carré magico-magique........................ 112
Formules d'Arithmétique........................ 113
Les neuf types des carrés à quartiers........................ 114
L'addition d'équidifférences........................ 119
Les carrés δ des Tables de Frénicle........................ 120

Sixième Récréation. — *La Géométrie des réseaux et le problème des dominos.*

Dédicace et épigraphe........................ 123
Sur le jeu de dominos........................ 125
Une remarque de M. Laisant........................ 127
Solution de MM. Jolivald et Tarry........................ 128

Pages.
Les réseaux géométriques.... 129
Du tracé des réseaux.... 133
Procédé de M. Fleury.... 134
Pérégrinations d'une fourmi.... 135
Les réseaux à points impairs.... 137
Fermeture d'une impasse.... 137
Labyrinthes à un seul carrefour.... 138
Chemin de fer à double voie.... 139
Chemin de fer de ceinture.... 140
Théorème des impasses.... 141
Théorème des carrefours.... 143
Description du pentagone.... 145
Description de l'heptagone.... 147

SEPTIÈME RÉCRÉATION. — *La Géométrie des régions, le problème géographique des quatre couleurs et les réseaux à points triples.*

Dédicace et épigraphe.... 153
Les régions.... 155
Les points multiples.... 160
Les polyèdres.... 163
Les polyèdres réguliers convexes.... 166
Le Problème géographique des quatre couleurs.... 168
Le coloriage des cartes.... 168
Les surfaces simples.... 169
Sur l'anneau de Saturne.... 170
Le problème de Guthrie.... 171
Théorème du coloriage.... 172
Division de la carte.... 173
Carrefour de quatre frontières.... 174
Carrefour de cinq frontières.... 175
La contexture d'une carte.... 177
La garniture des pièces.... 178
Développement de la carte.... 180
Généralisation du théorème de Descartes.... 182
Théorème de Kempe.... 183
Les pièces auxiliaires.... 184

Pages.
Pratique du coloriage 185
Cas particuliers 187
Le problème des liaisons 187
Les réseaux à points triples 188
Théorèmes de Tait 189
Théorème de Kirkman 192
Corollaire du coloriage 193

HUITIÈME RÉCRÉATION. — *La machine à marcher.*

La machine à marcher 197

NOTES.

NOTE I. — *Le saut du cavalier au jeu des échecs* 205
Définition 205
Un problème de Guarini 207
Les rectangles de 12 cases 208
Les croix d'Euler 209
La course et le circuit 210
Le cavalier-sphinx 214
La planchette de Vandermonde 215
Le cavalier-domino 218
Le cavalier-loto 219
Les réseaux géométriques 221

NOTE II. — *Les carrés magiques* 224
Sur le carré de 3 et sur les carrés à deux degrés 224
Amusements scientifiques sur l'Arithmétique 228
Le testament du nabab 228
La multiplication rapide par 9, 99, 999 231
Multiplications curieuses 232
Le blanc et le noir 233
Les échiquiers anallagmatiques 237

Pages.

NOTE III. — *Sur la troisième Récréation du tome III*............... 240
Le Caméléon... 240
La Rose mystique.. 242
Le Paradoxal.. 243
Le Moulin rouge... 246
Le Trifolium diabolique....................................... 247
France et Russie.. 251
La Boîte magique.. 253

NOTE IV. — *Sur la huitième Récréation du tome I*................. 255

NOTE V. — *Sur les Carrés magiques*............................. 257

Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.

0