

Ozanam, Jacques

Recreations Mathematiques Et Physiques Qui Contiennent Plusieurs Problèmes
d'Arithmétique, de Géométrie, de Musique, d'Optique, de Gnomonique, de
Cosmographie, de Mécanique, de Pyrotechnie, & de Physique. Avec un Traité
des Horloges Elementaires

Bd.: 1

Paris 1723

Math.u. 150-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594189-6





<36609797640012

<36609797640012

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 150-1

Matheps. Opera varia mathepsin
illustrantia 6A.

R

RECREATIONS MATHEMATIQUES

ET

PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT

Plusieurs Problèmes d'Arithmétique, de Géométrie, de Musique, d'Optique, de Gnomonique, de Cosmographie, de Mécanique, de Pyrotechnie, & de Physique. Avec un Traité des Horloges Elementaires.

Par feu M. OZANAM, de l'Academie Royale des Sciences, & Professeur en Mathematique.

NOUVELLE EDITION.

Revûe, corrigée & augmentée.

TOME PREMIER,

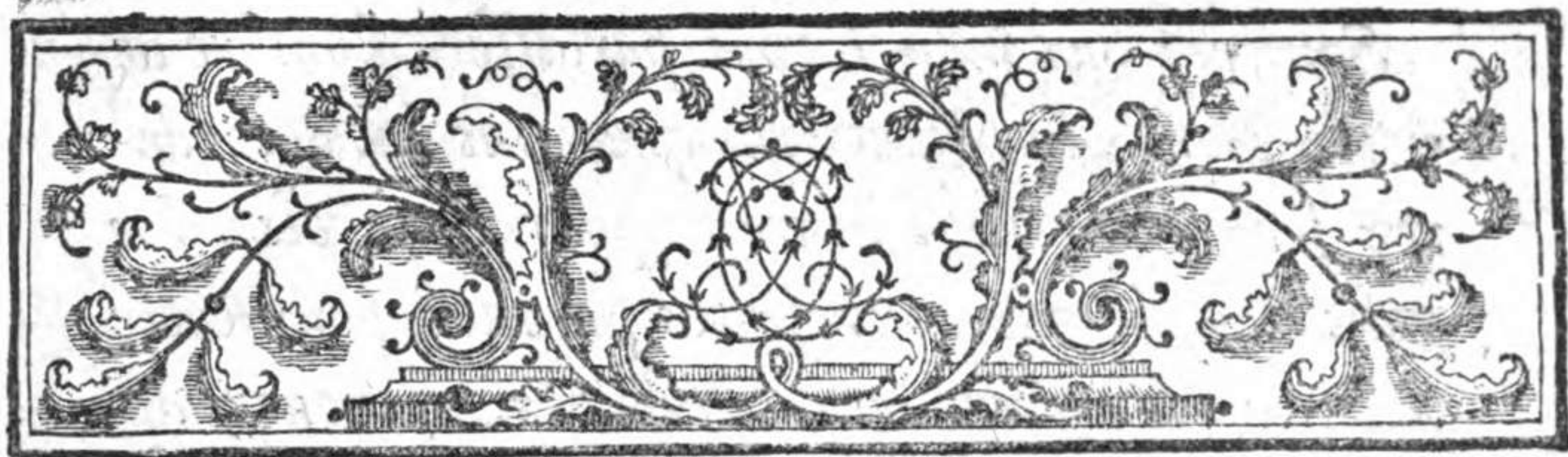
A PARIS,

Chez CLAUDE JOMBERT, rue S. Jacques, au coin
de la rue des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Bayerische
Staatsbibliothek
München



A MONSIEUR
LE CHEVALIER
D'HARCOURT.

Colonel Réformé de Dragons, & Guidon
de la Gendarmerie.



MONSIEUR;

Voici un Corps de Récréations Mathématiques que j'ai l'honneur de vous présenter. J'ose me flatter qu'il pourra vous plaire; votre inclination pour la Science qu'il renferme, m'en est un sûr garand.

ÉPIÔTE.

Souffrez que mon Livre paroisse à l'ombre de votre Nom ; la protection que vous lui accorderez sera un préjugé heureux pour le succès. Le goût exquis que vous faites paroître pour cette Science , l'ardeur avec laquelle vous vous y appliquez , les succès merveilleux que vous y faites , sur-tout dans cette Partie , qui regarde les Fortifications & la Guerre , nous font concevoir de vous de grandes esperances.

C'est l'ardeur de plaire au Roy , & de lui être un jour utile ; c'est le zele pour son service qui vous anime à vous perfectionner dans cette étude , si nécessaire à l'Etat.

Ce zele pour le service de Sa Majesté ne vous est pas étranger : il est naturel , & comme héréditaire à tous ceux qui portent votre nom. Qu'il est beau d'y joindre , comme vous faites , les sentimens de probité , d'honneur & de Religion , si rare à votre âge ! Cette politesse aisée & naturelle , cette inclination bienfaisante , d'obliger & de faire plaisir : marque certaine d'une ame noble & genereuse.

Ce sont ces vertus , MONSIEUR , qui vous ont gagné le cœur & l'affection de tous ceux qui vous connoissent ; ce seront elles qui vous feront

E P I T R E.

meriter l'estime & les bontez du plus aimable des Rois : par elles vous avancerez dans la route qui mene à la véritable gloire ; c'est celle que vous ont tracée vos illustres Ayeux. Ce seroit ici le lieu de rapporter leurs actions héroïques, & les services rendus à l'Etat ; mais nos Histoires en sont remplies.

Je ne m'arrêterai pas à vanter l'antiquité & la Noblesse de votre Maison, ni ses Alliances avec toutes les Maisons Souveraines de l'Europe, & même avec l'Auguste* Maison de France.

Je n'ose même entâmer le récit des actions du Heros qui vous donna la naissance, de peur d'en diminuer l'éclat par la foiblesse de mon stile. On sçait qu'il réunissoit en lui seul les talens qui pouvoient illustrer plusieurs personnes à la fois ; ceux de grand Capitaine, de grand Politique, & de parfait Citoyen. On l'a vû toujours intrepide & victorieux à la tête des Armées ; toujours

* En 1359. le 14. Octobre Jean VI. Comte d'Harcourt, épousa Catherine de Bourbon, petite-fille de S. Loüis, sœur de Jeanne de Bourbon, Reine de France, sœur de Blanche de Bourbon, Reine de Castille, sœur de Bonne de Bourbon, Comtesse de Savoye, & fille de Pierre I. Duc de Bourbon, Comte de Clermont.

En 1389. Jean VII. Comte d'Harcourt, épousa le 17. Mars Marie d'Alençon, Princesse du Sang Royal, fille de Pierre Comte d'Alençon, petite-fille de Charles de Valois Comte d'Alençon, fils de Philippe le Hardy, &c.

EPI T R È.

Sage & impénétrable en ses desseins , dans ses Ambassades & dans ses Negociations , toujours zelé pour la gloire de son Roy , & pour le bien de l'Etat.

La seule Negociation pour la Couronne d'Espagne ; la plus difficile qu'il y ait eu depuis l'origine de la Monarchie , & la plus glorieuse pour la Maison de France , passera toujours pour un chef-d'œuvre de politique , & immortalisera son nom à jamais.

Je ne finirois pas , si je voulois faire le détail de toutes les vertus qui brilloient en lui ; la noble passion que vous avez de marcher sur ses traces , & de l'imiter , nous fait esperer de le voir revivre en vous. Rien n'est plus digne de vos nobles efforts ; rien ne peut vous attirer plus d'honneur & plus de gloire. J'ai l'honneur d'être avec un profond respect ,

MONSIEUR,

**Votre très-humble & très-obéissant serviteur ,
CLAUDE JOMBERT.**



PREFACE.

I.



E ne m'excuserai pas de ce qu'après avoir donné au Public des Traitez serieux, qui demandent toute l'application des Lecteurs, il semble que je veuille dissiper leur application, & les en détourner par les jeux d'esprit que je leur présente dans ces derniers Volumes. La memoire des grands hommes qui ont fait la même chose que j'entreprends, est si glorieuse, que leur exemple vaut toutes les justifications que je pourrois apporter. Le docte Bachet, sieur de Meziriac, célèbre par ses excellens Ouvrages, commença à se faire connoître dans la République des Lettres par un Recueil qu'il intitula, *Problèmes plaisans, qui se font par les Nombres*. Il voulut par ce Livre s'assurer de son talent, & du jugement du Public, avant que

P R E F A C E.

de mettre au jour ses Commentaires sur l'Arithmétique de Diophante , & les autres Livres , qui lui ont acquis une gloire immortelle. Plusieurs autres Auteurs de ce siècle , comme le fameux Pere Kircher , & les Peres Schot & Bettin n'ont pas moins fait de bruit dans le Monde sçavant , par les Problèmes divertissans qu'ils ont mis dans leurs Ouvrages , que par leurs raisonnemens ; & par leurs plus serieuses observations.

Quoique ces grands exemples puissent suffire pour autoriser mon dessein , néanmoins afin que ces hommes illustres , que j'ai pris pour garants , ne soient pas eux-mêmes exposez à la censure de ceux qui voudroient les accuser de nouveauté ; je produirai des exemples bien plus anciens , qui font voir que de tout temps les plus grands hommes ont tenu la même conduite , s'étant bien apperçûs que le même fonds de raison qui fait trouver du plaisir dans l'admiration , en doit aussi faire trouver dans les choses qui sont le sujet de l'admiration.

Le commerce d'Enigmes que les Rois de Syrie entretenoient , & qui a fait durer si long-tems après eux le Stile Parabolique , n'étoit autre chose que des jeux d'esprit , & des entretiens également pro

P R E F A C E.

pres à exciter le plaisir, & à donner de l'élevation à l'esprit. Les Grands de ce temps-là étoient faits comme ceux d'aujourd'hui : la peine les rebutoit, c'étoit un coup de l'adresse & de l'habileté extraordinaire de ceux qui les vouloient instruire, que de les attacher à l'étude & à la réflexion, par le plaisir & par la curiosité. Je ne doute pas que l'éducation que Nathan donna à Salomon par cet exercice, n'ait beaucoup contribué à cette élévation d'ame, & à cette sagesse merveilleuse qui fait le caractère & la gloire de ce Prince.

C'étoit aussi par maniere de divertissement que les Chaldéens & les Egyptiens qui ont inventé l'Astronomie, marquoient par avance à leurs amis les jours & les circonstances des Eclipses, & qu'ils leur traçoient des figures qui partageoient la durée des jours, qui montroient les routes des Etoiles, & qui représentoient toutes les varietez des mouvemens des Cieux, persuadez, aussi-bien que les Grecs, que les premiers plaisirs de l'esprit sont ceux que l'on emprunte des Mathematiques, dans lesquelles ils faisoient élever leurs enfans. Il croyoient que si la raison des enfans étoit sans action, elle n'étoit pas néanmoins sans force, & qu'il n'y avoit qu'à lui

P R E F A C E.

donner du mouvement pour la perfectionner ; ce qui se pouvoit faire, en donnant aux enfans de la curiosité qui fait en eux ce qu'une longue suite de nécessitez de la vie fait dans les personnes d'un âge plus avancé. C'est-là le secret de Socrate, qui tiroit des enfans les résolutions les plus difficiles de la Géométrie & de l'Arithmétique : c'étoit la clef avec laquelle il leur ouvroit l'esprit, il connoissoit leurs forces, il prédisoit leur destinée : c'étoit le Démon ou le Génie qu'il consultoit, & qui ne le quittoit jamais.

Bien que les jeux d'esprit, dont je parle, soient des amusemens, ils ne sont peut-être pas moins utiles que les exercices, auxquels on applique les jeunes personnes de qualité, pour façonner leurs corps, & pour leur donner le bon air ; car s'accoutumer à connoître les proportions, la force des mélanges, à connoître le point qu'on cherche dans la confusion, à prendre de justes mesures dans les propositions les plus embrouillées & les plus surprenantes, c'est se faire l'esprit aux affaires, c'est s'armer contre les surprises, c'est se préparer à vaincre les difficultez imprévues ; ce qui vaut bien autant que d'assurer sa démarche par les leçons des Maîtres à danser, ou le ton de sa voix par celle des Musiciens.

P R E F A C E.

Ne faut-il pas outre cela que l'on se délasse quelquefois ? & se peut-on délasser par des divertissemens que l'on méprise, ou dont on a honte ? Un homme d'Etat voudroit-il danser au sortir du Conseil & des plus grandes affaires ? Seroit-il bien séant qu'il fût trouvé dans les exercices où il passoit son temps dans sa jeunesse ? La bienséance, les affaires, & la santé ne le permettent pas. Mais les jeux d'esprit sont de toutes les saisons & de tous les âges : ils instruisent les Jeunes, ils divertissent les Vieux, ils conviennent aux Riches, & ne sont pas au dessus de la portée des Pauvres ; les deux Sexes s'en peuvent accommoder sans choquer la bienséance.

Ceux qui ont eu la curiosité d'épier la conduite des grands Hommes dans leur particulier, ont trouvé qu'ils se sont distingués dans leurs divertissemens comme dans leur serieux. Auguste jouoit les soirs avec sa famille à des jeux d'esprit ; il ne croyoit pas cela au dessous de lui ; il écrivoit avec autant d'exactitude le détail de ses divertissemens que celui des affaires serieuses. Le sçavant Jurisconsulte Mutius Scevola après avoir répondu à ceux qui le venoient consulter, se divertissoit à jouer aux Echets, & étoit devenu un des meil-

P R E F A C E.

leurs Joueurs de son temps. Le Pape Leon X. l'un des plus grands hommes de son siècle, jouoit aussi quelquefois aux Echets, si l'on en croit Paul Jove, pour se délasser de la fatigue des affaires.

Il est certain que le Jeu des Echets a été inventé pour instruire, aussi-bien que pour divertir : en représentant les attaques & les défenses des pieces différentes, leur marche, & leurs aventures, on a voulu faire des leçons de morale, & montrer par le desastre du Roy des Echets, qu'un Prince tombe inmanquablement au pouvoir de ses Ennemis, quand il s'est dépouillé de ses Soldats ; & qu'il ne peut négliger la perte d'un seul de ses Sujets, sans s'exposer à celle de ses propres Etats.

On peut réduire tous les Jeux qui ont été inventez, ou qu'on pourroit inventer, à trois classes différentes : la premiere est de ceux qui dépendent absolument des nombres & des figures, comme les Echets, le Jeu des Dames, & quelques autres : la seconde de ceux qui dépendent du hazard, comme les Dez, & les Jeux semblables : la troisieme de ceux qui dépendent de la justesse des mouvemens, comme les Jeux de l'Arquebuse, de l'Arc, de la Paume, & du Billard. Il y en a qui sont mêlez d'adresse & de hazard, comme le Trictrac,

P R E F A C E.

le Hocca, les Cartes, & la plûpart des autres. Mais il est constant qu'il n'y en a point qu'on ne puisse tellement soumettre aux Regles des Mathématiciens, que l'on ne fut assuré de gagner, si l'on y pouvoit apporter toute l'habileté nécessaire. Les Jeux d'adresse ont tant de rapport aux principes de la Statique & de la Mécanique, que ce n'est que faute d'en bien sçavoir les Régles, ou de les bien mettre en usage, que l'on ne gagne pas dans ces Jeux-là. Il n'y a point de Jeu de hazard, où la victoire ne dépende de la rencontre d'un nombre, ou du poids, ou de l'étendue de la figure. Le Joueur qui imprime le mouvement, pourroit déterminer la fin, s'il étoit parfaitement habile, & quoique cela ne paroisse pas possible, parce qu'on ne trouve personne d'une parfaite habileté, il est néanmoins vrai que l'on pourroit le faire, & qu'une méthode infailible de gagner aux Echets, n'est pas absolument impossible; personne ne l'a encore trouvée, & je ne crois pas qu'on la trouve jamais, parce qu'elle dépend d'un trop grand nombre de combinaisons. C'est assez qu'un point de perfection soit possible, pour engager les Curieux au travail. L'Orateur parfait, disoit Cicéron, n'a jamais été, mais il est possible; son idée,

V. l'Es-
sai d'A-
nalyse sur
les Jeux
de hazard
par M. de
Mont-
mor.

P R E F A C E.

telle que ce grand Maître l'a peint, sert de modèle à ceux qui se mettent en devoir de se rendre habiles en Eloquence. Il en est de même du Poëte, du Peintre, de l'Architecte, du Medecin, & de tous les autres. Aussi quoiqu'il soit vrai que personne ne sçaura jamais la méthode inmanquable de tous les Jeux, ni peut-être d'aucun, néanmoins il ne faut pas laisser de s'y rendre le plus habile que l'on peut, en tâchant d'approcher de l'idée qu'on se fait de cette méthode, qui est enfermée dans l'exactitude des regles & des principes des Mathématiques.

C'est une chose bien extraordinaire que de vouloir mettre les Joueurs dans mon parti, & engager dans l'étude des Récréations Mathématiques les Hommes d'Etat, & les Capitaines : mais puis-je empêcher tout le monde de profiter des leçons qui sont établies sur les principes les plus naturels, & sur les veritez attachées à l'essence des choses ? Puis-je défendre des plaisirs qui sont engageans par leur utilité, & qui sont si communs, si faciles, & si propres à tous ceux qui ont de la raison, qu'on ne peut les ôter aux hommes, sans les priver de ce qu'il y a de plus agréable à la vie.

P R E F A C E.

II.

On croit depuis si long-temps, qu'il y a eu quelque Art secret entre les plus sçavans des Juifs, des Arabes, & des Disciples de cette ancienne Académie qui se tenoit en Egypte, ou Moïse fut élevé, & qui fleurissoit encore du temps de Salomon, que cela a excité la curiosité des meilleurs esprits, pour découvrir ce qui en est: mais le moyen d'apprendre un Art sans Maître & sans Livres? Les Sçavans de ces temps-là n'écrivoient point, ou s'ils écrivoient, c'étoient des Enigmes & des Discours si éloignez de ce qu'on attend, qu'on peut dire que leur silence est plus instructif que leur discours.

Le Pere Schot dit qu'il y a trois sortes de Cabales, c'est le nom qu'il donne à cet Art secret des Orientaux, celle des Rabins, celle de Raimond Lulle, & celle des Algebristes. Il ne peut dire ce que c'est que la premiere, les deux dernieres sont des Jeux de nombres & de figures; je ne doute pas que la premiere ne soit la même chose. Joseph qui étoit Prêtre, écrit hardiment que par le droit de sa naissance, il avoit été instruit dans tous les mysteres des Juifs, & qu'on lui avoit enseigné tous les secrets de leur Art. Il se flata

P R E F A C E.

par un esprit de Cour, qui l'emporta par dessus sa conscience, d'avoir prédit par la force de cet Art l'élevation de Titus qui fut Empereur. Il cacha son jeu, comme un habile homme doit faire. Il soutient le personnage de merveilleux, & quand il parle de l'aventure où il faillit à perdre la vie par le desespoir de ses Soldats, résolus de s'égorger les uns les autres plutôt que de se rendre aux Romains, il attribue sa conservation ou au hazard, ou à un miracle. Cependant il est à croire que Joseph ne fit ce miracle que par la science des nombres & des figures; il fit ranger ces desesperez de maniere que le sort tomba sur ceux que le Capitaine voulut bien laisser périr. Il sauva sa vie, parce qu'il étoit Mathématicien, & non pas parce qu'il étoit Levite. Ce qui fait voir que les connoissances les plus abstraites se peuvent réduire en pratique, & qu'on peut mettre à quelque usage, ce qui en paroît le plus éloigné.

V. page
248 du
Tome I.

Je m'étonne de ce que du temps des Empereurs Diocletian & Constantin, les Loix défendirent les Mathématiques, comme des connoissances dangereuses, en condamnant les Mathématiciens & les Sorciers aux mêmes peines, comme également criminels & pernicious à la société

P R E F A C E.

civile , selon ce qui paroît par le Titre 17. du Livre 9. du Code de Justinian. Je crois que c'est par l'ignorance qui regnoit en ce temps-là , & par le grand nombre des Charlatans , qui se servoient des Mathématiques pour imposer & pour tromper la crédulité des ignorans. Mais il faut blâmer la stupidité de ceux qui se laissent tromper , & il ne faut pas autoriser la fainéantise de ceux qui ne veulent pas cultiver assez leur esprit pour être en état de n'être jamais surpris. On a vû des Etats qui ont permis les souplesses & les petits larcins faits avec adresse , pour tenir les particuliers sur leurs gardes , & pour les accôûtumer à prendre toujours de bonnes précautions.

L'ignorance tient le monde dans une admiration perpetuelle , & dans la méfiance ; ce qui produit toujours une envie invincible de blâmer & de persécuter ceux qui sçavent quelque chose de plus que le commun , qui n'étant pas accôûtumé à s'élever au dessus des choses sensibles , & ne pouvant s'imaginer que la Nature employe des agens qui ne soient pas visibles & palpables , attribue souvent aux Sorciers & aux Démons tous les effets , dont il ne connoît pas la cause. Je veux par mes Récréations Mathématiques , enseigner tout


P R E F A C E.

le monde à faire ces forcegeries, qui faisoient peur aux gens du Conseil de Justinian ; & par-là je ferai plus qu'un sçavant homme *, qui s'est contenté du simple raisonnement, pour défendre saint Thomas d'Aquin, Albert le Grand, Salomon, & plusieurs autres grands Hommes, qui n'ont été accusez d'être Magiciens, que parce qu'ils sçavoient faire quelque chose de plus que les autres.

* Gabriel Naudé.

Un seul Livre n'étant pas capable de contenir toutes les propositions qu'on peut faire sur cette matiere, on a divisé cet Ouvrage en trois Volumes, où l'on donne les Problèmes les plus faciles, les plus utiles & les plus agréables. Le premier contient les Problèmes d'Arithmétique, de Géométrie, de Musique, & d'Optique. Le second Volume comprend les Problèmes de Gnomonique, de Cosmographie, & de Mécanique. Le troisième Volume renferme les Problèmes de Pyrotechnie, & de Physique, avec un Traité des Horloges Elementaires.





AVIS DU LIBRAIRE.

JE fais imprimer la *Nouvelle Mécanique* de feu M. Varignon, dont le *Projet* a été imprimé en 1687. ce sera un gros Volume in quarto, avec trente Planches gravées en taille douce, qui sortiront hors du Livre. On le débitera sur la fin des vacances. L'on donnera ensuite ses Lettres écrites à tous les Sçavans de l'Europe, avec les Réponses, qui pourront faire deux Volumes in quarto, & son *Traité du Mouvement*, qui fera un gros Volume aussi in-quarto. Je vais encore faire imprimer un Livre intitulé : *l'Architecture Moderne pour la distribution de toutes sortes de Bâtimens*, à commencer par une place de trois toises de face, jusqu'à vingt-quatre, dont la plupart ont trois distributions différentes, avec les Elevations & les Profils, un Devis general de toutes les parties d'un Bâtimement, & la maniere de les toiser, avec une Explication de tous les articles de la coutume concernant les Bâtimens : ce Livre fera un gros Volume in quarto, avec plus de cent Planches en taille douce.

Fautes à corriger dans le premier Tome.

P Age 39 en marge, au lieu de Problème II.
lis. Problème XI.

P age 177 Réduisez la solution Latine du Problème
de l'Asne & du Mulet au seul Vers *Mensuras
quinque hac, & septem Mulus habebat.*

P ag. 209 lig. 16 au lieu de 0-60, lis. 0+60.

P ag. 390 lig. 8 au lieu de AD, lis. AB.

P ag. 417 à la marge de la ligne 20, au lieu de Fig.
15. lisez Fig. 14.

P ag. 436 lig. 14 après ces mots, *avec un petit bâ-*
ton, ajoutez : ou plutôt avec le bout d'une plu-
me ébarbée, qui ne boit pas l'eau comme le pe-
tit bâton.



RECREATIONS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES.

Problemes d'Arithmetique.



COMME je ne prétens pas proposer des Problèmes difficiles, je ne prétens pas aussi en donner les démonstrations, pour ne pas embarrasser le Lecteur que je veux divertir. Je me contenterai de donner la solution de ces Problèmes par des regles qui ne sont sujettes à aucune erreur.

PROBLEME I.

Des Religieuses sont retirées en huit Cellules tellement disposées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du Dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres est au milieu de chaque coté. L'Abbesse,
Tome I. A

2 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

qu'on suppose aveugle , fait sa visite : elle compte le nombre des Religieuses qui sont dans les trois Cellules d'un rang ; elle trouve que le nombre des Religieuses d'un rang est égal à celui de chaque autre rang , en prenant pour un rang deux Cellules des coins & celle du milieu. Cette Abbessé fait une seconde visite , & compte dans chaque rang le même nombre de personnes que dans la première visite , quoiqu'il y soit entré quatre hommes. Enfin dans la troisième visite qu'elle fait , elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de personnes qu'auparavant , quoique les quatre hommes soient sortis , & qu'ils aient emmené chacun une Religieuse.

JE suppose qu'il y ait d'abord trois Religieuses dans chaque Cellule. L'Abbessé en comptera neuf à chaque rang dans la première visite qu'elle fera. Si ensuite une Religieuse sort de chaque Cellule du coin pour entrer avec un homme dans la Cellule du milieu , qui est à sa gauche , l'Abbessé faisant sa seconde visite , trouvera encore neuf personnes dans chaque rang du Dortoir. Enfin si chaque homme * emmène sa Religieuse , & que deux Religieuses sortant de chaque Cellule du milieu , entrent dans l'une des Cellules des coins qui est à leur droite , l'Abbessé comptera dans une troisième visite neuf personnes à chaque rang du Dortoir.

REMARQUES.

On peut aisément exécuter ce Problème avec des jettons , & le pousser plus loin , en faisant faire une quatrième visite à l'Abbessé , qui trouvera toujours neuf personnes à chaque rang du Dortoir , quoique chaque Religieuse , qui étoit sortie avec un hom-

* Qui étoit enfermé dans la Cellule du milieu.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 3

me, soit rentrée avec deux hommes avant cette quatrième visite. Il faut faire passer de chaque Cellule du coin trois Religieuses dans la Cellule du milieu, où elles entreront avec leur Compagne, qui y amenera deux hommes.

Ces Figures feront connoître sensiblement ce qu'il y a à faire pour la solution de ce Problème.

3	3	3
3		3
3	3	3

2	5	2
5		5
2	5	2

4	1	4
1		1
4	1	4

1	7	1
7		7
1	7	1

PROBLEME II.

On a mené sur le bord d'une riviere un Loup, une Chevre & un Chou. On propose à un Batelier de les passer seul à seul, de maniere qu'en son absence le Loup ne fasse aucun mal à la Chevre, & que la Chevre ne touche point au Chou.

LE Batelier commencera par passer la Chevre ; puis il retournera prendre le Loup ; quand il

4 RECREAT. MATH. ET PHYS.

aura passé le Loup, il ramenera la Chevre, qu'il laissera à bord pour passer le Chou du côté du Loup. Enfin il retournera prendre la Chevre, & la passera. Par ce moyen le Loup ne se trouvera avec la Chevre, ni la Chevre avec le Chou, qu'en la présence du Batelier.

PROBLEME III.

Trois Maris jaloux se trouvent avec leurs Femmes pendant une nuit fort obscure, au passage d'une riviere. Ils rencontrent un bateau sans Batelier. Ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter que deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront deux à deux, de sorte qu'aucune Femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux Hommes, si son Mari n'est présent.

DEux Femmes passeront d'abord, puis l'une ayant ramené le bateau, repassera avec la troisième Femme. Ensuite l'une des trois Femmes ramenera le bateau, & se mettant à terre, laissera passer les deux Hommes dont les deux Femmes sont de l'autre côté. Alors un des Hommes ramenera le bateau avec sa Femme, & la mettant à terre, il prendra le troisième Homme, & repassera avec lui. Enfin la Femme qui se trouve passée entrera dans le bateau, & ira chercher en deux fois les deux autres Femmes.

On mettra ici quatre Vers Latins qui contiennent la solution de ce Problème.

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;

Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.

Par vadit & redeunt bini; mulierque sororem

Advehit: ad propriam sine maritus abit.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

REMARQUES.

On propose encore ce Problème sous le titre de trois Maîtres & de trois Valets. Les Maîtres s'accordent bien ensemble, & les Valets aussi. Mais chaque Maître ne peut souffrir les Valets des deux autres Maîtres; de maniere que s'il se trouvoit avec l'un des deux Valets, en l'absence de son Maître, il ne manqueroit point de le bien battre.

PROBLEME IV.

Faire l'Addition d'une maniere particuliere, & qui soit inconnue à tout autre.

Cette Addition est pratiquée par les Marchands qui ne se servent point des chiffres ordinaires, pour marquer le prix de leurs marchandises. Ils se font une Arithmetique particuliere avec des lettres, ou tels autres caracteres qu'il leur plaît. Ils prennent, par exemple, ces dix lettres de nôtre Alphabet, b. o. n. e. f. a. c. i. u. s. auxquelles ils donnent la valeur des chiffres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Ainsi quand ils veulent marquer 11. ils désignent ce nombre par bb. quand ils veulent exprimer 59. ils le font par fu. Ils employent ces lettres de la même maniere qu'on a coûtume d'employer les chiffres ordinaires 1. 2. 3. &c. en sorte que ces caracteres b. o. n. &c. étant à la premiere place à droite, ne marquent que des unitez; mais quand ils se trouvent à la deuxième place, ils signifient des dizaines; à la troisième ils expriment des centaines, & ainsi des autres; de même que dans l'Arithmetique, où nous nous servons des caracteres Arabes.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

b. o. n. e. f. a. c. i. u. s.

EXEMPLES.

11. 12. 13. 14. 24. 25. 36. 48. 59. 60. 112. &c.
bb. bo. bn. be. oe. of. na. ci. fu. ao. bbo. &c.

PROBLEME V.

Soustraire par une seule operation plusieurs sommes de plusieurs autres sommes données.

Pour ôter toutes les sommes d'en bas , qui sont au dessous de la ligne en B , de toutes les sommes d'en haut , qui sont au dessus de la ligne en A ; on commencera à ajouter les nombres de la pre-

| | |
|--------|---|
| 56243 | |
| 84564 | A |
| 3252 | |
| 26848 | |
| | |
| 2942 | |
| 3654 | B |
| 2308 | |
| | |
| 162003 | |

miere colonne d'en bas à la droite , en disant 8 & 4 font 12 , & 2 font 14 , que l'on ôtera de la plus proche dixaine , c'est-à-dire , de deux dixaines , ou de 20 : le reste sera ajouté à la colonne correspondante de dessus , en disant 6 & 8 font 14 , & 2 font 16 , & 4 font 20 , & 3 font 23 , il faudra écrire 3 au dessous ; & parce qu'il y a ici deux dixaines comme auparavant, on ne retiendra rien. Ajoû-

tez de la même façon les nombres de la colonne suivante d'en bas , en disant 0 & 5 font 5 , & 4 font 9 , qu'on ôtera de la plus proche dixaine , ou de 10 : le reste 1 sera ajouté à la colonne correspondante d'en haut , en disant 1 & 4 font 5 , & 5 font 10 , & 6 font 16 , & 4 font 20 , il faudra écrire 0 au dessous ; & parce qu'il y a ici deux dixaines , & que dans la colonne d'en bas il n'y en

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 7

à eu qu'une , on retiendra la différence 1 , qu'on ôtera de la colonne suivante d'en bas , à cause qu'on a trouvé plus de dixaines en A qu'en B ; car il la faudroit ajouter , si l'on avoit trouvé moins de dixaines en A qu'en B. Quand il arrivera que cette différence ne pourra être ôtée de la colonne d'en bas , pour n'y avoir point de figures significatives , comme il arrive ici à la cinquième colonne , on l'ajoutera à la colonne d'en haut , & l'on écrira toute la somme au dessous de la ligne , de sorte que dans cet exemple l'on aura 162003 , pour le reste de la Soustraction.

PROBLEME VI.

Multiplication abrégée.

Pour multiplier un nombre quelconque , par exemple, 128 par un nombre qui soit produit par la Multiplication de deux autres , comme par 24 , qui est produit par la Multiplication de ces deux 4 , 6 , ou de ces deux autres 3 , 8 ; on multipliera le nombre proposé 128 par 4 , & le produit 512 par 6 : ou bien on multipliera le nombre proposé 128 par 3 , & le produit 384 par 8 , & l'on aura 3072 pour le produit de la multiplication qu'il falloit faire.

D'où il suit , que pour multiplier un nombre proposé par un nombre quarré , il faut multiplier le nombre proposé par le côté de ce nombre quarré , puis multiplier le produit par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 25 , dont la Racine quarrée , ou le côté est 5 , on multipliera 128 par 5 , & le produit 640 encore par 5 , & l'on aura 3200 pour le produit de la Multiplication.

3 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

Ainsi pour sçavoir combien il y a de pieds quarréz en 32 toises quarrées, on multipliera 32 par 6, & le produit 192 encore par 6, & l'on aura 1152 pour le nombre des pieds quarréz qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui soit produit par la Multiplication de trois autres, comme par 108, qui est produit par la Multiplication de ces trois 2, 6, 9, ou de ces trois 3, 6, 6; on multipliera le nombre proposé 128 par 2, le produit 256 par 6, & le second produit 1536 par 9. Ou bien l'on multipliera le nombre proposé 128 par 3, le produit 384 par 6, & le second produit 2304 encore par 6, & l'on aura 13824 pour le produit qu'il falloit trouver.

D'où il suit, que pour multiplier un nombre proposé par un nombre cubique, il faut multiplier le nombre proposé par le côté de ce nombre cubique, le produit par le même côté, & le second produit encore par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 125, dont la Racine cubique ou le côté est 5, on multipliera d'abord 128 par 5, puis le produit 640 encore par 5, enfin le second produit 3200 par 5, & l'on aura 16000 pour le produit de 128 par 125. Ainsi pour sçavoir combien il y a de pieds cubes en 32 toises cubes, on multipliera 32 par 6, ensuite le produit 192 aussi par 6, enfin le second produit 1152 encore par 6, & l'on aura 6912 pour le nombre des pieds cubes qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque par telle puissance qu'on voudra de 5, on ajoutera au nombre proposé vers la droite autant de zero que l'exposant de la Puissance comprendra d'unitéz, comme un zero pour 5, deux zero pour son quarré 25,

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 9

trois zero pour son cube 125, & ainsi de suite. On divisera ce nombre ainsi augmenté par une semblable Puissance de 2, sçavoir par 2 pour 5, par 4 pour son quarré 25, par 8 pour son cube 125, & ainsi de suite.

Comme pour multiplier 128 par 5, on divisera 1280 par 2, & le quotient 640 sera le produit qu'on cherche. Mais pour multiplier 128 par 25 quarré de 5, on divisera 12800 par 4 quarré de 2, & le quotient donnera 3200 pour le produit. Si on veut multiplier le même nombre 128 par 125 cube de 5; on divisera 128000 par 8 cube de 2, & le quotient 16000 sera le produit cherché. On fera les mêmes operations pour les autres Puissances, comme on le voit dans la Table suivante, qui n'a été continuée que jusqu'à la 7^e Puissance.

| | | | |
|------|-------|--------|---------|
| 1280 | 12800 | 128000 | 1280000 |
| 5 | 25 | 125 | 625 |
| 2 | 4 | 8 | 16 |
| 640 | 3200 | 16000 | 80000 |

| | | |
|----------|-----------|------------|
| 12800000 | 128000000 | 1280000000 |
| 3125 | 15625 | 78125 |
| 32 | 64 | 128 |
| 400000 | 2000000 | 10000000 |

Pour sçavoir combien valent 53 louis d'or à 11 livres le louis d'or, on écrira 53 sous 53, en l'avancant d'une colonne vers la gauche, en sorte que

10 RECREAT. MATH. ET PHYS.

$$\begin{array}{r} 53 \\ 53 \\ \hline 583 \end{array}$$
 le 3 réponde sous le 5, & la somme de ces deux nombres ainsi disposez, donnera 583 livres pour la valeur de 53 louis d'or, à 11 livres le louis d'or.

Pour sçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 10. s. le louis d'or, on prendra la huitième partie du nombre donné 53, augmenté de deux zero vers la droite, sçavoir la huitième partie de 5300 considéré comme 5300 livres, & l'on aura 662 liv. 10 s. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv. 10 s. le louis d'or.

Pour sçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 5 s. le louis d'or, on multipliera 53 que l'on considerera comme 53 liv. par 7, & le produit 371 liv. encore par 7. Le quart du second produit 2597 liv. donnera 649 liv. 5 s. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv. 5 s. le louis d'or.

Pour sçavoir combien il y a de pouces en 53 pieds, il faut multiplier 53 par 12. Ce qui se peut faire en multipliant 53 par 2, & le produit 106 par 6; ou bien en multipliant 53 par 3, & le produit 159 par 4. Mais cela se peut faire sans Multiplication, en écrivant 53 sous 53, & encore une fois 53 en l'avancant d'une colonne, en sorte que le 3 réponde sous le 5, car la somme de ces trois nombres ainsi disposez, donnera 636 pour le nombre des pouces qui sont compris en 53 pieds. C'est aussi le nombre des deniers qui sont compris en 53 sols.

Pour multiplier ensemble deux nombres composez de plusieurs figures, par exemple 12 & 18, on réduira le premier nombre 12 en ces trois parties composées chacune d'une seule figure 2, 4, 6,

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 11

| | | | |
|-----------|---|--------|---|
| 2 | { | 4 — 8 | & pareillement le second nombre
18 en ces trois parties compo-
sées aussi chacune d'une seule
figure 4, 6, 8, dont cha-
cune sera multipliée par la pre-
miere partie 2 du premier nom-
bre, ensuite par la seconde fi-
gure 4 du même premier nombre,
enfin par la troisième figure 6
du même premier nombre: la
somme de tous les produits se-
ra celui qui doit provenir de la
multiplication de 12 par 18, ou de 18 par 12. |
| | | 6 — 12 | |
| | | 8 — 16 | |
| 4 | { | 4 — 16 | |
| | | 6 — 24 | |
| | | 8 — 32 | |
| 6 | { | 4 — 24 | |
| | | 6 — 36 | |
| | | 8 — 48 | |
| | | — | |
| Somme 216 | | | |

Multiplication par les doigts.

SI vous voulez multiplier 7 par 8, premièrement prenez la différence de 7 à 10, qui est 3, & ayant levé les dix doigts des deux mains, abaissez trois doigts d'une main qui sera, par exemple, la gauche. Secondement, prenez la différence de 8 à 10, qui est 2, & abaissez deux doigts de l'autre main qui sera la droite. Troisièmement, multipliez le nombre des doigts levez d'une main par le nombre des doigts levez de l'autre, le produit qui est 6, sera retenu pour être mis au rang des unitez. Quatrièmement, ajoutez le nombre des doigts abaissez des deux mains, & la somme qui est ici 5, doit être placée au rang des dixaines. Ainsi on trouvera que 7 multiplié par 8 produit 56.

On voit par cet exemple qu'il faut prendre la différence de 10 à chacun des deux nombres donnez, que le produit de ces deux différences dési-

12 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

gnées par les doigts levez de chaque main, donnera le nombre des unitez du produit total, & que la somme des doigts abbaisséz donnera les dixaines de ce produit total.

Autre Multiplication abrégée.

SI l'on avoit un grand nombre à multiplier par un autre grand nombre, comme 453216 par 3289, il seroit bon de se servir de cette Méthode, que nous avons tirée de Langius. Je choisís le plus petit de ces nombres 3289 pour le Multiplicateur, & je fais une Table à deux colonnes.

| | | |
|---------|---|----------------------------|
| 453216 | 1 | 453216 |
| 906432 | 2 | 3289 |
| 1359648 | 3 | <hr style="width: 100%;"/> |
| 1812864 | 4 | 4078944 |
| 2266080 | 5 | 3625728 |
| 2719296 | 6 | 906432 |
| 3172512 | 7 | 1359648 |
| 3625728 | 8 | <hr style="width: 100%;"/> |
| 4078944 | 9 | 1490627424 |

L'une de ces colonnes, qui est à droite, contient les premiers chiffres de la numération 1. 2. 3. &c. jusqu'au plus grand chiffre 9, qui se trouve dans le Multiplicateur 3289: ces chiffres sont disposés les uns sous les autres, comme on le voit dans la Table. L'autre colonne contient le nombre à multiplier 453216, qui est placé vis-à-vis de l'unité. On a mis le double de ce nombre vis-à-vis de 2, le triple vis-à-vis de 3, & ainsi de suite jusqu'au plus haut chiffre 9, qui est dans la seconde colonne.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 13

Cette Table étant ainsi faite, on disposera le nombre à multiplier & le Multiplicateur l'un sous l'autre à l'ordinaire : comme le premier chiffre du Multiplicateur est 9, on prendra le nombre qui lui répond dans la Table, & on l'écrira au dessous des nombres donnez : le second chiffre étant 8, on prendra le nombre qui lui correspond dans la Table, & on l'écrira au dessous du premier écrit, en observant de le reculer d'une place, parce que le 8 exprime des dixaines. On fera la même chose à l'égard des autres chiffres qui se trouvent dans le Multiplicateur. Enfin on fera l'addition de ces nombres ; la somme donnera le produit des deux nombres proposez.

PROBLEME VII.

Division abrégée.

Pour diviser un grand nombre par un plus petit ; comme 1492862 par 432, il faudroit mettre, selon la methode commune, le Diviseur 432 vers la gauche sous 1492, pour sçavoir combien de fois il y est contenu. Mais pour n'employer que l'addition & la soustraction, faites un tarif du diviseur 432 en le mettant vers la droite vis-à-vis de 1, & l'ajoutez à lui-même, pour avoir son double 864, que vous écrirez sous 432 vis-à-vis de 2. Puis ajoutez le même nombre 432 à son double 864, pour avoir son triple 1296, que vous écrirez en bas vis-à-vis de 3. Ajoutez pareillement le même diviseur 432 à son triple 1296, pour avoir son quadruple 1728, que vous écrirez dessous vis-à-vis de 4, & ainsi des autres, en écrivant toujours les multiples du diviseur 432, vis-à-vis des autres nombres 5, 6, 7, 8, 9, 10. Le der-

| | | | | |
|----|------|---------|---|------|
| 1 | 432 | 1492992 | (| 3456 |
| 2 | 864 | 1296... | | |
| 3 | 1296 | | | |
| 4 | 1728 | 1969 | | |
| 5 | 2160 | 1728 | | |
| 6 | 2592 | | | |
| 7 | 3024 | 2419 | | |
| 8 | 3456 | 2160 | | |
| 9 | 3888 | | | |
| 10 | 4320 | 2592 | | |
| | | 2592 | | |
| | | | | |
| | | 000 | | |

nier 10 doit avoir vis-à-vis de lui, le même diviseur 432 augmenté d'un zero vers la droite, si le tarif est bien fait.

Cette préparation étant faite, pour sçavoir tout d'un coup combien de fois le diviseur 432 est contenu dans 1492, cherchez ce nombre dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus. C'est ici 1296, qui se trouvant à côté de 3, fait voir que 3 doit être la première figure du quotient. Si vous ôtez ce nombre 1296 de 1492, il restera 196. A ce reste joignez vers la droite la figure 9 qui suit 1492 dans le dividende pour avoir 1969 que vous chercherez dans le tarif, ou celui qui étant moindre en approche le plus, & qui est ici 1728. Comme ce nombre se trouve à côté de 4, vous poserez 4 pour la seconde figure du quotient. Ensuite vous ôterez ce nombre 1728 de 1969, & il restera 241. A ce reste vous joindrez vers la droite la figure 9 qui suit 14929 dans le dividende pour avoir 2419 que vous chercherez dans le tarif ou celui qui étant moindre,

en approche le plus , & qui est ici 2160. Le nombre 5 qui est à côté du nombre 2160 sera la troisième figure du quotient. On continuera à faire les mêmes opérations qu'on vient de faire , jusqu'à ce que la division soit achevée.

Cette maniere est très-commode , quand on a plusieurs grands nombres à diviser par un même nombre , parce qu'ayant fait un tarif du diviseur , il sert pour faire toutes les divisions dont on a besoin. C'est ce qui arrive aux Arpenteurs qui ont souvent de grands nombres à diviser par 144 , lorsqu'ils veulent réduire des pouces quarrés en pieds quarrés , ou par 1728 , quand ils veulent réduire des pouces cubes en pieds cubes.

Pour diviser un nombre quelconque par telle Puissance qu'on voudra de 5 , on le multipliera par une semblable Puissance de 2. On retranchera du produit vers la droite autant de figures que le degré de la Puissance contiendra d'unitez. Les figures qui resteront vers la gauche , seront le quotient , & celles qui auront été retranchées seront le numérateur d'une fraction , dont le dénominateur sera une semblable Puissance de 10.

Comme pour diviser 128 par 5 , on retranchera le 6 qui est à la droite de 256 , double de 128 , & l'on aura $25 \frac{6}{10}$ pour le quotient. Pour diviser le même nombre 128 par 25 quarré de 5 , on retranchera les deux dernières figures 12 qui sont à la droite de 512 , quadruple de 128 , & l'on aura $5 \frac{12}{100}$ pour le quotient. Ainsi des autres.

Pour diviser un nombre quelconque par un plus petit , qui soit produit par la multiplication de deux autres plus petits , on divisera le nombre proposé par l'un de ces deux plus petits nombres , &

le quotient sera divisé par l'autre nombre. Le second quotient sera celui qu'on cherche.

Comme pour diviser 20736 par 24, qui est produit par la multiplication de ces deux nombres 3, 8, aussi bien que de ces deux, 4, 6, on prendra la huitième partie de son tiers, ou la sixième partie de son quart : ou bien, ce qui est la même chose, on prendra le tiers de sa huitième partie, ou le quart de sa sixième partie, & l'on aura 864 pour le quotient cherché.

D'où il suit que pour réduire en toises quarrées des pieds quarréz, on doit prendre la sixième partie de la sixième partie du nombre proposé des pieds quarréz, parce qu'une toise quarrée contient 36 pieds quarréz, & que 6 fois 6 font 36. Ainsi pour réduire en toises quarrées 20736 pieds quarréz, on prendra la sixième partie de la sixième partie 3456 de 20736, & l'on aura 576 pour le nombre des toises quarrées qui sont contenues en 20736 pieds quarréz. Pareillement pour réduire en toises quarrées 542 pieds quarréz, on prendra la sixième partie de la sixième partie $90\frac{2}{3}$ de 542, & l'on aura 15 toises quarrées & 2 pieds quarréz pour la valeur de 542 pieds quarréz.

P R O B L E M E V I I I.

De quelques proprietéz des Nombres.

I.

LE nombre 9 est tel, que s'il multiplie un nombre entier quelconque, la somme des figures du produit est divisible par le même nombre 9 sans reste. Si on multiplie, par exemple, 53 par 9, & qu'on

PROBLÈMES D'ARITHMETIQUE. 17
qu'on ajoûte ensemble les figures du produit 477,
la somme 18 est exactement divisible par 9.

I I.

Si on prend deux nombres quelconques ; l'un des
deux , ou leur somme , ou leur différence est divi-
sible par 3. Soient pris les deux nombres 6 , 5 ,
le premier 6 est divisible par 3. Si on choisit les
deux nombres 11 , 5 , leur différence 6 est divi-
sible par 3. Enfin si on prend les deux nombres
7 , 5 , leur somme 12 est divisible par 3.

I I I.

On peut diviser par 6 le produit de deux nom-
bres , dont les quarrés ajoûtez ensemble font un
nombre quarré ; ainsi 12 produit de ces deux
nombres 3 , 4 , dont les quarrés 9 , 16 ajoûtez
ensemble , font le nombre quarré 25 , dont le
côté est 5 , est divisible par 6.

*Pour trouver deux nombres , dont les quarrés fas-
sent ensemble un nombre quarré , multipliez deux
nombres quelconques. Le double de leur pro-
duit sera l'un des deux nombres qu'on cher-
che , & la différence de leurs quarrés fera l'autre
nombre.*

Comme si l'on multiplie ces deux nombres 2 , 3 ,
dont les quarrés sont 4 , 9 , le produit sera 6 ,
dont le double 12 , & la différence 5 des quarrés
4 , 9 , sont deux nombres tels que leurs quarrés
144 , 25 , font ensemble ce nombre quarré 169 ,
dont le côté est 13. *Voyez les Problèmes 9 & 10.*

I V.

La somme & la différence de deux nombres
quelconques , dont les quarrés différent d'un nom-

bre quarré, font chacune ou un nombre quarré, ou la moitié d'un nombre quarré.

Ainsi 16 somme des deux nombres 6, 10, dont les quarez 36, 100, different du nombre quarré 64, qui a 8 pour Racine quarrée, & leur différence 4, font chacune un nombre quarré. De même 18 somme des deux nombres 8, 10, dont les quarez 64, 100, different du nombre quarré 36, qui a 6 pour Racine, & leur différence 2, font les moitez de ces deux nombres quarez 36, 4.

Pour trouver deux nombres, dont la somme & la différence soient chacune un nombre quarré, auquel cas les quarez de ces deux nombres differeront aussi d'un nombre quarré; choisissez deux nombres à volonté, comme 2, 3, dont le produit est 6, & dont les quarez font 4, 9. La somme 13 de ces deux quarez, & le double 12 du produit 6, font les deux nombres qu'on cherche. Car leur somme 25, & leur différence 1, font chacune un nombre quarré: de plus leurs quarez 169, 144, different du nombre quarré 25, qui a 5 pour Racine quarrée.

Pour trouver deux nombres, dont la somme & la différence soient chacune la moitié ou le double d'un nombre quarré, auquel cas leurs quarez differeront aussi d'un nombre quarré; choisissez à volonté deux nombres, comme 2, 3, dont les quarez font 4, 9. La somme 13 de ces deux quarez, & leur différence 5, font les deux nombres qu'on cherche. Car leur somme 18, & leur différence 8, font les moitez de ces deux nombres quarez 36, 16, ou les doubles de ces deux autres nombres quarez 9, 4: de plus leurs quarez 169, 25, different de ce nombre quarré 144. qui a 12 pour Racine quarrée.

V.

Tout nombre quarré finit par deux zeros , ou par l'une de ces cinq figures , 1 , 4 , 5 , 6 , 9. Cette proposition sert à faire connoître quand un nombre proposé n'est point quarré : c'est lorsqu'il ne finit ni par deux zeros , ni par quelque'une des cinq figures précédentes. Quand même il finiroit par deux zeros , on peut assurer qu'il n'est point quarré, lorsque ces deux zeros ne sont pas précédés de quelque'une des cinq figures précédentes.

V I.

Toute Fraction quarrée , c'est-à-dire , qui a sa Racine quarrée , est telle que le produit du Numérateur par le Dénominateur a sa Racine quarrée. Cette proposition sert à faire connoître quand une fraction proposée est quarrée : c'est lorsqu'en multipliant le Numérateur par le Dénominateur , le produit est un nombre quarré.

Ainsi l'on connoît que cette Fraction $\frac{28}{63}$ est quarrée , parce qu'en multipliant le Numérateur 28 par le Dénominateur 63 , le produit 1764 est un nombre quarré, dont le côté est 42 : alors la Racine quarrée de la Fraction proposée $\frac{28}{63}$ sera $\frac{42}{63}$, en retenant le même Dénominateur 63 , ou bien $\frac{28}{42}$, en retenant le même Numérateur 28. Car l'une & l'autre de ces deux Fractions $\frac{28}{42}$, $\frac{42}{63}$, est égale à $\frac{2}{3}$, qui est la Racine quarrée de la Fraction proposée $\frac{28}{63}$, ou $\frac{4}{9}$.

V I I.

Toute Fraction cubique , c'est-à-dire , qui a sa

Racine cubique, est telle qu'en multipliant le Numérateur par le quarré du Dénominateur, ou le Dénominateur par le quarré du Numérateur, le produit a sa Racine cubique. Cette proposition sert à faire connoître quand une Fraction proposée est cubique : c'est lorsqu'en multipliant le Numérateur par le Dénominateur, ou le Dénominateur par le Numérateur, le produit est un nombre cubique.

Ainsi l'on connoît que cette Fraction $\frac{24}{375}$ est cubique, parce qu'en multipliant le Numérateur 24 par le quarré 140625 du Dénominateur 375, le produit 3375000 a sa Racine Cubique 150; ou bien parce qu'en multipliant le Dénominateur 375 par le quarré 576 du Numérateur 24, le produit 216000 a 60 pour Racine cubique: alors la Racine cubique de la Fraction proposée $\frac{24}{375}$ sera $\frac{150}{375}$, en retenant le même Dénominateur 375, ou bien $\frac{24}{60}$, en retenant le même Numérateur 24. Car l'une & l'autre de ces deux Fractions $\frac{150}{375}$, $\frac{24}{60}$ est égale à $\frac{2}{5}$ qui est la Racine cubique de la Fraction proposée $\frac{24}{375}$, ou $\frac{8}{125}$.

VII.

Quoiqu'il ne soit pas possible de trouver deux Puissances homogènes, dont la somme & la différence soient chacune une semblable Puissance, comme deux quarrés, dont la somme & la différence soient chacune un nombre quarré; ou deux cubes, dont la somme & la différence soient chacune un nombre cubique; néanmoins il est possible, & même très-facile de trouver deux nombres triangulaires, dont la somme & la différence soient chacune un nombre triangulaire.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 27

Voici deux nombres triangulaires 15, 21, dont les côtez sont 5 & 6 : leur somme 36, & leur différence 6, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtez sont 8 & 3. Voici encore deux autres nombres triangulaires 780, 990, dont les côtez sont 39 & 44 : leur somme 1770, & leur différence 310, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtez sont 59, 20. Si vous voulez encore deux autres nombres triangulaires, les voici; 1747515, 2185095, dont les côtez sont 1869, 2090 : leur somme 3932610, & leur différence 437580, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtez sont 2804, 935.

On appelle *Nombre triangulaire* celui qui provient de la somme de quelques-uns des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. pris de suite en commençant par l'unité. On peut en prendre autant qu'on voudra, & le dernier de ceux qui seront pris, & qui sera le plus grand, est appelé le *côté* du nombre triangulaire. Ainsi l'on connoît que ce nombre 10 est triangulaire, & que son côté est 4, parce qu'il est égal à la somme des quatre premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, dont le dernier & plus grand est 4. Il a été appelé *triangulaire*, parce que l'on peut disposer 10 points en forme de Triangle équilatéral, dont chaque côté en comprend 4; ce qui a fait dire que 4 étoit le côté du nombre triangulaire 10.

De même 21 est un nombre triangulaire, & son côté est 6, parce qu'il est égal à la somme des 6 premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont le dernier & le plus grand est 6. Ces nombres 55, 78 sont des nombres triangulaires. Consultez le *Traité du Triangle Arithmetique* par M. Pascal.

22 RECREAT. MATH. ET PHYS.

Pour connoître si un nombre proposé est Triangulaire, il faut le multiplier par 8, & ajouter 1 au produit : si cette somme a une Racine quarrée, le nombre proposé sera triangulaire. Ainsi l'on connoît que ce nombre 10 est triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 80 étant augmenté de 1, la somme 81 a pour Racine quarrée 9. On connoît aussi que ce nombre 3932610 est triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 31460880 étant augmenté de 1, la somme 31460881 est un nombre quarré, dont la Racine est 5609.

Pour avoir le côté du nombre triangulaire, il faut prendre la plus petite moitié de la Racine trouvée. Ainsi pour avoir le côté du nombre triangulaire 10, prenez 4 la plus petite moitié de 9 Racine trouvée, & 4 sera le côté de 10. De même pour avoir le côté du nombre triangulaire 3932610, prenez la plus petite moitié de 5609 racine trouvée, & 2804 sera le côté du nombre triangulaire proposé.

I X.

La différence de deux Puissances homogènes ; comme de deux nombres quarez, de deux nombres cubiques, &c. est divisible par la différence de leurs côtez. La différence 21 de ces deux quarez 25, 4, dont les côtez sont 5, 2, est divisible par 3 différence de ces côtez ; & le quotient 7 est égal à la somme des mêmes côtez. La différence 117 des deux cubes 125, 8, dont les côtez sont 5, 2, est divisible par 3 différence de ces côtez, & le quotient 39 est égal à la somme de 10 produit des côtez 5, 2, & de 29, somme de leurs quarez 25, 4.

X.

La différence de deux Puissances homogènes, dont l'exposant commun est un nombre pair, est divisible par la somme de leurs côtez. La différence 21 de ces deux quarrez 25, 4, dont les côtez sont 5, 2, est divisible par 7 somme de ces côtez; & le quotient 3 est égal à la différence des mêmes côtez. La différence 609 des deux quarrez-quarrez 625, 16, dont les côtez sont 5, 2, est divisible par 7 somme de ces côtez, & le quotient 87 est égal au produit sous la différence 3 des mêmes côtez 5, 2, & la somme 29 de leurs quarrez 25, 4.

XI.

La somme de deux Puissances homogènes, dont l'exposant commun est un nombre impair, est divisible par la somme de leurs côtez. La somme 133 des deux cubes 125, 8, dont les côtez sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtez; & le quotient 19 est égal à l'excès de 29 somme des quarrez 25, 4, des côtez 5, 2, sur le produit 10 des mêmes côtez. La somme 3157 des deux surfolides 3125, 32, dont les côtez sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtez; & le quotient 451 est égal à l'excès de la somme 741 des quarrez-quarrez 625, 16, des deux côtez 5, 2, & du quarré 100 du produit 10 sous les mêmes côtez, sur le produit 290 sous la somme 29 des quarrez 25, 4, des côtez 5, 2, & le produit 10 des mêmes côtez.

XII.

Toutes les Puissances des nombres naturels 1;

24 RECREAT. MATH. ET PHYS.

2, 3, 4, 5, 6, &c. ont autant de différences que leurs exposans contiennent d'unités, les dernières différences étant toujours égales entre elles dans chaque Puissance; sçavoir, les secondes différences, c'est-à-dire, les différences des différences dans les quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. car ces secondes différences sont 2, les premières étant les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, &c. Les troisièmes différences, c'est-à-dire, les différences des différences des premières différences dans les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. car ces troisièmes différences sont 6, les premières étant 7, 19, 37, 61, 91, &c. & les secondes, ou les différences de ces différences étant 12, 18, 24, 30, &c. qui se surpassent de 6 qui est leur troisième différence. Ainsi des autres.

| Quarrez. | 1 ^{res} Diff. | 2 ^{es} Diff. |
|----------|------------------------|-----------------------|
| 1 | 3 | 2 |
| 4 | | |
| 9 | 5 | 2 |
| 16 | 7 | |
| 25 | 9 | 2 |
| 36 | 11 | |

Cubes. 1^{res} Diff. 2^{es} Diff. 3^{es} Diff.

| | | | | | | |
|-----|---|----|---|----|---|---|
| 1 | } | 7 | } | 12 | } | |
| 8 | } | 19 | } | 18 | } | 6 |
| 27 | } | 37 | } | 24 | } | 6 |
| 64 | } | 61 | } | 30 | } | 6 |
| 125 | } | 91 | } | | | |
| 216 | } | | | | | |

Il arrive la même chose aux nombres *Polygones* ; qui se forment par une continuelle addition des nombres en progression arithmetique , qu'on appelle *Gnomons* , dont le premier est l'unité , qui est virtuellement nombre polygone de toute espece ; aux nombres *Pyramidaux* , qui sont formez par l'addition continuelle des nombres polygones considerez comme des Gnomons , dont le premier est toujours l'unité : & aux nombres *Pyramido-Pyramidaux* , qui sont formez par l'addition continuelle des nombres Pyramidaux considerez comme des Gnomons , dont le premier est toujours l'unité.

Lorsque les Gnomons se surpassent de l'unité ; comme 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , &c. les nombres Po-

26 RECREAT. MATH. ET PHYS.

lygones 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. qui s'en forment sont appellez *Triangulaires*, dont la propriété est telle que chacun étant multiplié par 8, & le produit étant augmenté de l'unité, la somme est un nombre quarré. Ce qui peut servir à faire

Art. 8. p. 22. *connoître quand un nombre proposé est Triangulaire*, comme nous avons déjà dit ailleurs. De plus la somme 9 du second & du troisiéme, en omettant le premier, est un nombre quarré. De même, en omettant les quatre premiers, la somme 36 du cinquiéme & du sixiéme, est un nombre quarré, & ainsi de suite : en sorte qu'en omettant à volonté les premiers nombres Triangulaires, les deux qui se suivent étant ajoûtez, forment un quarré.

Lorsque les Gnomons se surpassent de deux unités, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. les nombres Polygones 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. qui en sont formez, sont des *Nombres quarréz*.

Lorsque les Gnomons se surpassent de trois unités, comme 1, 4, 7, 10, 13, 16, &c. les nombres 1, 5, 12, 22, 35, 51, &c. qui en sont formez, sont appellez *Pentagones*, dont la propriété est telle que chacun étant multiplié par 24, & le produit étant augmenté de l'unité, la somme est un nombre quarré. Ce qui sert à faire *connoître quand un nombre proposé est Pentagone*. Ainsi des autres. Voyez Schooten dans ses *Sectiones Miscellanea*.

Pour trouver la somme de tant de nombres Triangulaires qu'on voudra, en commençant depuis l'unité, par exemple, de ces huit, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, on multipliera le nombre déterminé 8 par le suivant 9, & le produit 72 encore par le suivant 10 : puis l'on divisera le second

produit 720 par 6, & le quotient 120 sera la somme qu'on cherche.

La somme de toutes ces Fractions infinies $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{21}$, &c. dont le Numerateur commun est 1, & les Dénominateurs 3, 6, 10, 15, 21, &c. sont des nombres Triangulaires, vaut précisément 1.

Pour trouver la somme de tant de nombres quarrés que l'on voudra depuis l'unité, par exemple, de ces huit, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, on ôtera de 240 double de la somme 120 d'autant de nombres Triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, le dernier nombre Triangulaire 36, & le reste 204 sera la somme qu'on cherche,

XIII.

Les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. sont tels que le premier 1 est un nombre quarré, dont le côté 1 est le premier nombre Triangulaire: la somme 9 des deux premiers 1, 8, est un nombre quarré, dont le côté 3 est le second nombre Triangulaire: la somme 36 des trois premiers 1, 8, 27, est un nombre quarré, dont le côté 6 est le troisième nombre Triangulaire, & ainsi de suite. C'est pourquoi *pour trouver la somme de tant de nombres cubiques qu'on voudra depuis l'unité*, par exemple, de ces six 1, 8, 27, 64, 125, 216, on prendra le quarré 441 du sixième nombre Triangulaire 21, qui sera la somme qu'on cherche.

XIV.

Entre les nombres entiers, il n'y a que 2, qui ajouté à lui-même, fasse le même nombre qu'étant

multiplié par lui-même , sçavoir 4. Car tout autre nombre , comme 5 , étant ajouté à lui-même , fait 10 , & étant multiplié par lui-même fait 25 .

Quoiqu'on ne puisse pas trouver deux nombres entiers , dont la somme soit égale à leur produit , on peut néanmoins en trouver aisément deux en fractions , & même en raison donnée , dont la somme soit égale à leur produit. C'est en divisant la somme des deux termes de la raison donnée par chacun de ces deux termes. Si on veut , par exemple , leur donner la raison de 2 à 3 , on divisera séparément leur somme 5 par 2 & par 3 , & l'on aura ces deux nombres $2\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, qui ajoutés font autant que multipliez ensemble , sçavoir , $4\frac{1}{6}$.

X V.

Un nombre quelconque est la moitié de la somme de deux autres également éloignés de lui , l'un par défaut , & l'autre par excès : par exemple , 6 est la moitié de la somme 12 des deux nombres 5 & 7 , qui en sont également éloignés , ou des deux nombres 4 & 8 , qui en sont aussi également éloignés , &c.

X I V.

Le nombre 37 est tel , qu'étant multiplié par chacun de ces nombres 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , 21 , 24 , 27 , qui sont en progression arithmétique , tous les produits sont composez de trois figures semblables.

| | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 37 | 37 | 37 | 37 | 37 | 37 | 37 | 37 | 37 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 111 | 222 | 333 | 444 | 555 | 666 | 777 | 888 | 999 |

XVII.

Les deux nombres 5 & 6, sont appellez *Spheriques*, parce que leurs Puissances finissent par les mêmes nombres. Par exemple, les Puissances de 5, sçavoir, 25, 125, 625, &c. finissent par le même nombre 5. De même, les Puissances de 6, sçavoir, 36, 216, 1296, &c. finissent par le même nombre 6.

Le nombre 5 a cela de particulier, qu'étant multiplié par un nombre pair, comme par 8, le produit 40 se termine par un zero.

L'autre nombre 6 a aussi cela de particulier, qu'il est le premier des nombres qu'on appelle *Parfaits*, parce qu'ils sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes; car ce nombre 6 est égal à la somme de ses parties aliquotes 1, 2, 3. Le nombre 28 est aussi un nombre parfait, parce qu'il est égal à la somme de ses parties aliquotes 1, 2, 4, 7, 14.

Pour trouver autant de nombres parfaits qu'on voudra, il faut se servir de la progression double, dont le premier terme soit 2, & non pas l'unité, en écrire les termes de suite, & les séparer de deux en deux, avec cette précaution, que le second terme 4, sera répété dans la seconde séparation, & y tiendra la première place, après avoir tenu la seconde place dans la première séparation, comme vous le voyez ici. Ces termes étant ainsi séparés,

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|--|---------|---|----|--|-----------|---|-----|--|------------|---|------|
| 2 | , | 4 | | 4 | , | 8 | | 16 | , | 32 | | 64 | , | 128 |
| | | 6 | | | | 28 | | | | 496 | | | | 8128 |
| 3 par 2 | | | | 7 par 4 | | | | 31 par 16 | | | | 127 par 64 | | |

| | | | | |
|-----------|--|-------------|--|-----|
| 256 , 512 | | 1024 , 2048 | | &c. |
| 130816 | | 2096128 | | &c. |

on les prendra deux à deux dans leurs séparations; & après avoir diminué de l'unité celui qui tient la seconde place dans chaque séparation, on le multipliera par celui qui tient la première place dans la même séparation; le produit fera un nombre parfait. Ainsi pour avoir le premier nombre parfait, on considérera que la première séparation contient ces deux termes 2, 4, on ôtera 1 de 4, & l'on multipliera le reste 3 par 2; le produit 6 est le premier nombre parfait. De même, pour avoir le second nombre parfait, on considérera que la seconde séparation contient ces deux termes 4, 8, on ôtera 1 de 8, & l'on multipliera le reste 7 par 4; le produit 28 sera le second nombre parfait; on multipliera ensuite 31 par 6 pour avoir le troisième nombre parfait: & ainsi des autres.

REMARQUE.

Les nombres parfaits sont si rares, qu'il ne s'en trouve qu'un depuis un jusqu'à dix, un depuis dix jusqu'à cent, un depuis cent jusqu'à mille, un depuis mille jusqu'à dix mille, un depuis dix mille jusqu'à cent mille, &c. De plus il est à remarquer, que tous les nombres parfaits ont alternativement pour leur dernière figure 6 & 8.

Pour trouver toutes les parties aliquotes, ou tous les diviseurs d'un nombre, il faut diviser ce nombre & ses quotiens par les nombres premiers, jusqu'à ce que le dernier quotient soit l'unité. Ensuite on multipliera ces diviseurs premierement trouvez, de

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 31

la maniere qu'on l'enseignera , pour avoir tous les autres.

Soit proposé le nombre 210 , dont on veut avoir tous les diviseurs , ou toutes les parties aliquotes. Divisez 210 par 2 , il viendra au quotient

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 210 & 105 & 35 & 7 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 7 & \end{array}$$

105 , que vous diviserez par 3 ; puis vous diviserez le second quotient 35 par 5 , qui donnera 7 pour troisième quotient , lequel n'a point d'autre diviseur que lui-même , & le quotient est l'unité.

Disposez tous ces diviseurs de la maniere que vous le voyez dans la Table suivante , en commençant par le nombre 2. Mettez ensuite le nombre 3 au dessous , mais rangé un peu à côté. Vous

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| 2 | | | | | | |
| 3 . 6 . | | | | | | |
| 5 . 10 . 15 . 30 . | | | | | | |
| 7 . 14 . 21 . 42 . 35 . 70 . 105 . 210 . | | | | | | |

multiplierez ces deux nombres 2 , 3 , & vous écrirez le produit 6 à côté de 3 , & dans le même rang , comme vous le voyez. Ces nombres 2 , 3 , 6 , seront des diviseurs de 210. Puis mettez le nombre 5 troisième diviseur au dessous & un peu à côté , multipliez-le par tous les diviseurs déjà trouvez , & vous aurez pour diviseurs nouveaux 10 , 15 , 30. Enfin posez le nombre 7 au dessous & un peu à côté ; multipliez-le par tous les diviseurs déjà trouvez , & vous aurez encore pour diviseurs

32 RECREAT. MATHÈM. ET PHYS.

14, 21, 42, 35, 70, 105, 210. Tous ces nombres pris pour diviseurs, ou trouvez dans les deux Tables précédentes, joints à l'unité, seront les diviseurs cherchez, & les parties aliquotes cherchées, si on en retranche le nombre proposé 210.

On a disposé les deux Tables précédentes & les suivantes, comme on le voit, pour donner plus de lumière dans une operation qui est assez abstraite d'elle-même.

Si vous voulez trouver tous les diviseurs, ou les parties aliquotes de 2032, divisez d'abord ce nombre par 2 premier nombre premier, & tous les quotiens qui peuvent l'être, comme vous le voyez dans la Table suivante. Le dernier quotient

| | | | | | |
|------|------|-----|-----|-----|---|
| 2032 | 1016 | 508 | 254 | 127 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 127 | |

127 étant nombre premier, ne peut être divisé que par lui-même, & il a pour quotient l'unité.

Disposez tous ces diviseurs de la maniere que vous le voyez dans la Table suivante pour trouver les autres. Après avoir mis le premier diviseur 2, mettez le même 2, qui est second diviseur, au dessous & à côté : multipliez ces deux diviseurs 2, 2, & vous aurez 4, que vous rangerez à côté, comme dans cette Table. Posez encore 2 au des-

| | | | | |
|----------------------------|-----|--|--|--|
| 2. | | | | |
| 2. | 4. | | | |
| 2. | 8. | | | |
| 2. | 16. | | | |
| 127. 254. 508. 1016. 2032. | | | | |

sous :

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE 33

sous : suivant la regle précédente il faudroit multiplier tous les diviseurs trouvez par ce troisieme diviseur 2 ; mais il est inutile de multiplier 2 par 2 , qui donneroit encore 4 déjà trouvé : ainsi on neglige cette multiplication , & on multiplie seulement 4 par 2 , pour avoir 8 , qui est un nouveau diviseur.

Ensuite vous écrirez au dessous pour la quatrieme fois le diviseur 2 , & vous vous contenterez de multiplier 8 par ce nombre 2 : ce qui donne 16 ; car il est inutile de multiplier tous les 2 précédens, puisqu'ils donneroient pour produits 4 , qui a déjà été trouvé. (On observera la même chose à l'égard des autres nombres , dont la multiplication ne donneroit point de nouveau diviseur.)

Enfin vous poserez 127 au dessous des diviseurs & à côté, vous multiplierez ce nombre une fois seulement par 2 , & par tous les autres diviseurs trouvez , & vous aurez 254 , 508 , 1016 , 2032. Tous ces nombres pris pour diviseurs , ou trouvez dans la Table précédente , seront les diviseurs cherchez , & les parties aliquotes cherchées , si on en retranche le nombre proposé 2032.

On peut s'exercer sur les nombres 8128 & 2096128 , qui sont des nombres parfaits. On remarquera que toutes les puissances de 2 prises autant de fois que 2 est diviseur , sont des diviseurs , & parties aliquotes de ces deux nombres , & que la somme de ces puissances & de l'unité est égale au dernier nombre premier , qui se trouve être 127 dans 8128 , & 2047 dans 2096128.

Autre maniere de trouver les parties aliquotes , en tous les diviseurs d'un nombre proposé.

Soit proposé le nombre 8128 , l'unité est tou-

34 RECREAT. MATH. ET PHYS.

jours un diviseur de quelque nombre que ce soit ; ainsi vous la mettez à la tête d'une premiere colonne , qui contiendra une partie des parties aliquotes ou diviseurs. Divisez ensuite ce même nombre 8128 par le plus petit nombre qui se presente-

| | |
|-----|------|
| 1 | |
| 2 | 4064 |
| 4 | 2032 |
| 8 | 1016 |
| 16 | 508 |
| 32 | 254 |
| 64 | 127 |
| 127 | 8001 |
| | 127 |
| | 8128 |

ra , sçavoir par 2 , que l'on peut connoître aisément , parce que le nombre proposé 8128 est pair , & le quotient sera 4064 , que vous écrirez à la droite , vis-à-vis le 2 dans une seconde colonne , pour second diviseur , qui se peut encore diviser par le premier diviseur 2 ; ce qui fait que son quarré 4 sera aussi un diviseur , que vous écrirez au dessous de son côté 2 , & vis-à-vis le second quotient 2032 pour un

autre diviseur , qui se peut encore diviser par le premier diviseur 2 , ce qui fait son cube 8 sera aussi un diviseur , que vous écrirez au dessous du quarré 4 , & vis-à-vis le troisiéme quotient 1016 , pour un autre diviseur , & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un dernier diviseur , qui ne se puisse plus diviser par le premier 2 , comme il arrive au fixiéme quotient 127 , qui étant un nombre premier , fait connoître que tous les diviseurs du nombre proposé 8128 sont trouvez , où vous voyez que leur somme est égale à ce nombre , & que par consequent il est parfait.

C'est de la même façon que nous avonstrouvé tous les diviseurs de cet autre nombre 2096128 , qui est aussi parfait , parce qu'il est égal à la somme de ses parties aliquotes : où l'on voit que le dernier

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE: 35
 quotient 2047, qui répond à la dixième puissance
 1024 du premier diviseur 2, est aussi un nombre

| | | |
|--|--|--|
| 1 | | |
| 2 | | 1048064 |
| 4 | | 524032 |
| 8 | | 262016 |
| 16 | | 131008 |
| 32 | | 65504 |
| 64 | | 32752 |
| 128 | | 16376 |
| 256 | | 8188 |
| 512 | | 4094 |
| 1024 | | 2047 |
| <hr style="width: 50px; margin-left: 0;"/> | | |
| 2047 | | 2094081 |
| | | 2047 |
| | | <hr style="width: 50px; margin-left: 0;"/> |
| | | 2096128 |

premier : car s'il avoit pû être divisé par quelque
 autre nombre que par 2, comme par 3, il auroit
 fallu multiplier par ce nouveau diviseur 3, toutes
 les puissances du premier diviseur 2, & diviser le
 nombre proposé & tous les quotiens par ce même
 nouveau diviseur 3, pour avoir d'autres diviseurs,
 &c. comme vous allez voir dans l'exemple suivant,

XVIII.

Le nombre 120 est égal à la moitié de la somme
 me 240 de ses parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 5,
 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60. Le nom-
 bre 672 est aussi égal à la moitié de la somme
 1344 de ses parties aliquotes, que nous avons

56 RECREAT. MATH. ET PHYS.

trouvées par une Methode semblable à la préce-

| | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1 | |
| 2 | 336 |
| 4 | 168 |
| 8 | 84 |
| 16 | 42 |
| 32 | 21 |
| 3 | 224 |
| 6 | 112 |
| 12 | 56 |
| 24 | 28 |
| 48 | 14 |
| 96 | 7 |
| <hr style="width: 100%;"/> | |
| 252 | 1092 |
| | 252 |
| | <hr style="width: 100%;"/> |
| | 1344 |

dente , sans qu'il soit besoin de la repeter davantage. On peut trouver une infinité d'autres nombres qui auront la même propriété : on peut même en trouver d'autres qui seront la troisième partie , ou telle autre partie qu'on voudra de la somme de leurs parties aliquotes ; mais ce n'est pas ici le lieu d'en dire davantage.

XIX.

Ces deux nombres 220 , 284 , sont appellez *Ami-*

ables , parce que par le premier 220 est égal à la somme des parties aliquotes 1 , 2 , 4 , 71 , 142 , du second 284 , & reciproquement le second 284 est égal à la somme des parties aliquotes 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 11 , 20 , 22 , 44 , 55 , 110 du premier 220. Ces parties aliquotes sont faciles à trouver par ce qui a été enseigné auparavant.

Pour trouver tous les nombres amiables par ordre , servez-vous du nombre 2 , qui est tel que si de son triple 6 , de son sextuple 12 , & de l'octodecuple 72 de son quarré 4 , on ôte l'unité , il reste ces trois nombres premiers 5 , 11 , 71 , dont les deux premiers 5 , 11 , étant multipliez ensemble , & leur produit 55 étant multiplié par le double 4 du nombre 2 , ce second produit 220 sera le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour avoir l'autre qui est 284 , on multipliera le troisié-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 37
 me nombre premier 71 par le même double 4 du
 nombre 2 pris au commencement.

| | | |
|---|-----|-----|
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 6 | 18 |
| — | — | — |
| 6 | 12 | 72 |
| 1 | 1 | 1 |
| — | — | — |
| 5 | 11 | 71 |
| | 5 | 4 |
| | — | — |
| | 55 | 284 |
| | 4 | |
| | — | |
| | 220 | |

Pour trouver deux autres nombres amiables, au lieu de 2, servez-vous d'une de ses puissances qui

| | | |
|----|-------|-------|
| 8 | 8 | 64 |
| 3 | 6 | 18 |
| — | — | — |
| 24 | 48 | 1152 |
| 1 | 1 | 1 |
| — | — | — |
| 23 | 47 | 1151 |
| | 23 | 16 |
| | — | — |
| | 1081 | 18416 |
| | 16 | |
| | — | |
| | 17296 | |

ait la même propriété, tel qu'est son cube 8. Cap
 C ij

38 RECREAT. MATH. ET PHYS.

si de son triple 24, de son sextuple 48, & de l'octodecuple 1152 de son quarré 64, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 23, 47, 1151, dont les deux premiers 23, 47, doivent être multipliez ensemble, & leur produit 1081 doit être encore multiplié par le double 16 du cube 8, afin d'avoir 17296 pour le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour avoir l'autre, qui est 18416, on multipliera le troisième nombre premier 1151 par le même double 16 du cube 8.

Si vous voulez deux autres nombres, au lieu de deux, ou de son cube 8, servez-vous de son quarré-cube 64, qui a la même propriété. Car si de son triple 192, de son sextuple 384, & de l'octodecuple 73728 de son quarré 4096, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 191, 383, 73727, par le moyen desquels, & par ce qui a été dit auparavant, on trouvera ces deux autres nombres

| | | |
|-----|---------|--------|
| 64 | 64 | 4096 |
| 3 | 6 | 18 |
| ——— | ——— | ——— |
| 192 | 384 | 73728 |
| 1 | 1 | 1 |
| ——— | ——— | ——— |
| 191 | 383 | 73727 |
| | 191 | 128 |
| | ——— | ——— |
| | 73153 | 943705 |
| | 128 | |
| | ——— | |
| | 9363584 | |

9363584, 9437056, qui sont amiables : ainsi des autres. Consultez ce qui a été dit sur les parties ali-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 39

quotes au livre troisieme des nouveaux Elemens d'Algebre , tant dans les Problèmes , que dans les Questions. Consultez aussi Schooten dans ses *Sectiones Miscellanea.*

Regle generale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra.

FAites une Table qui contiendra plusieurs rangs de nombres. Commencez par le second de ces rangs , qui doit contenir la progression double * , dont le premier terme sera 2. Triplez les termes de cette progression ; ces nombres triples 6 , 12 , 24 , &c. placez chacun sous celui dont il est formé , composeront le troisieme rang. Ces nombres diminuez de l'unité 5 , 11 , 23 , &c. & placez chacun au dessus du terme qui lui répond , composeront le premier rang. Enfin l'on aura les termes du quatrieme rang 71 , 287 , &c. en multipliant 12 , second terme du troisieme rang par 6 , premier terme de ce même rang , le produit 72 diminué de l'unité , qui est 71 , sera le premier terme du quatrieme rang , & on le placera sous 12. On multipliera ensuite 24 , troisieme terme , par le precedent 12 , & le produit 288 diminué de l'unité qui est 287 , sera le second terme du quatrieme rang. On trouvera les autres termes par la même me-

* Voyez le Problème II.

| | | | | | |
|---|----|-----|------|------|-------|
| 5 | 11 | 23 | 47 | 95 | 191 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| 6 | 12 | 24 | 48 | 96 | 192 |
| | 71 | 287 | 1151 | 4607 | 18431 |

thode , c'est-à-dire , en multipliant un terme du troisieme rang par celui qui le precede immediate-

ment dans ce même rang , & en plaçant le produit diminué de l'unité au dessous du terme qu'on a choisi dans le troisième rang , pour le multiplier avec le précédent.

Cette Table étant ainsi construite , on choisira trois nombres premiers , dont l'un sera pris dans le quatrième rang ; les autres seront pris dans le premier rang : l'un de ceux-ci doit répondre au nombre premier choisi du quatrième rang , c'est-à-dire, à celui qui est placé dans le premier rang au dessus du nombre premier choisi dans le quatrième rang : l'autre sera celui qui précède immédiatement dans le premier rang le second dont on vient de parler. Par exemple , si l'on choisi dans le quatrième rang le nombre 71 , celui qui lui répond dans le premier rang est 11. , & 5 est celui qui précède immédiatement 11 ; ces nombres 5 & 11 étant nombres premiers , seront les termes avec lesquels on trouvera deux nombres *amiables* , en suivant ce qu'on va dire. Multipliez 71 par 4 , terme qui lui répond dans le second rang ; le produit 284 , est l'un de ces nombres *amiables*. Multipliez aussi 11 par le même terme 4 , qui lui répond dans le second-rang , & le produit 44 par 5 , terme qui précède immédiatement 11 dans le premier rang ; ce second produit 220 sera l'autre des nombres *amiables* que l'on cherche. On trouvera d'autres nombres *amiables* , en suivant la même methode.

REMARQUES.

Si on choisissoit 4607 dans le quatrième rang pour un des nombres premiers , on trouveroit que 95 , qui lui répond dans le premier rang , n'est point un nombre premier : ainsi on ne pourroit

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 45
point se servir de ce terme pour choisir des nombres amiables.

Comme il est difficile de connoître si un nombre est premier, quand il est un peu grand, nous ajoûterons à la fin de ce Problème une Table de tous les nombres premiers, qui sont compris entre 1 & 10000.

XX.

Les quarrez 961, 1156, des deux nombres 31, 34, sont tels que le premier 961 avec ses parties aliquotes 1, 31, fait une somme 993 égale à la somme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 17, 34, 68, 289, 578, du second 1156, dont le côté est 34.

XXI.

Les deux nombres suivans 26, 20, sont tels que chacun avec ses parties aliquotes fait une même somme. Car le premier 26 avec ses parties aliquotes 1, 2, 13, fait 42, & le second 20 avec ses parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, fait aussi 42.

Il arrive la même chose aux deux nombres 488, 464, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 930 : aux deux nombres 11, 6, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 12 : & aux deux nombres 17, 10, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 18.

On peut même avoir trois nombres, dont chacun avec ses parties aliquotes fera une même somme, comme 20, 26, 41, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 42 : 23, 14, 15, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 24, & 46, 55, 71, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 72.

Ces deux quarrez 106276, 165649 ont pour racines 326, 407. La somme des diviseurs de chacun

est 187131. Les diviseurs de 106276 sont 1, 2, 4, 163, 326, 652, 26569, 53138, 106276. Ceux de 165649 sont 1, 11, 37, 121, 407, 1369, 4477, 15059, 165649.

Ces deux quarrés 16, 25 sont aussi tels que la somme des diviseurs de chacun est 31. Les diviseurs de 16 sont 1, 2, 4, 8, 16. Ceux de 25 sont 1, 5, 25 : ainsi chacun avec leurs parties aliquotes fait 31.

Par le moyen de ces deux derniers quarrés 16, 25, on en peut avoir autant d'autres qu'on voudra qui ayent la même propriété. Il ne faut que les multiplier par quelqu'autre nombre quarré impair qui ne soit pas divisible par 5. Comme si on les multiplie chacun par 9, on aura ces deux autres nombres quarrés 144, 225, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 403 ; ou, ce qui est la même chose, la somme des diviseurs est 403.

X X I I.

Le nombre quarré 81, dont la racine est 9, est tel qu'avec ses parties aliquotes 1, 3, 9, 27, il fait ce nombre quarré 121, dont la racine est 11. Le nombre quarré 400, dont la racine est 20, est aussi tel, qu'avec ses parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, il fait ce nombre quarré 961, dont la racine est 31.

X X I I I.

La somme 666 de ces trois nombres Triangulaires 15, 21, 630, dont les côtes sont 5, 6, 35, est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 36. Il arrive la même chose à ces trois autres

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 43
 nombres Triangulaires 210, 780, 1711, dont les
 côtez sont 20, 39, 58. Car leur somme 2701 est
 un nombre Triangulaire, dont le côté est 73. La
 somme 9180 de ces trois autres nombres Triangu-
 laires 666, 2628, 5886, dont les côtez sont 36,
 72, 108, est aussi un nombre Triangulaire, dont
 le côté est 135, &c.

XXIV.

Le quarré 49 du nombre 7, est tel que la som-
 me 8 de ses parties aliquotes 1, 7, a pour racine
 cubique 2. Et le cube 343 du même nombre 7, est
 tel qu'avec ses parties aliquotes 1, 7, 49, il fait
 ce nombre quarré 400, dont le côté est 20.

XXV.

Le quarré 9 du nombre 3, est tel, que la somme
 4 de ses parties aliquotes 1, 3, est un nombre
 quarré, dont le côté est 2. Le quarré 2401 du
 nombre 49, a la même propriété. Car la somme
 400 de ses parties aliquotes 1, 7, 49, 343, est
 un nombre quarré, dont la racine est 20.

XXVI.

Les deux nombres 99, 63, sont tels que la
 somme 57 des parties aliquotes 1, 3, 9, 11, 33,
 du premier 99, surpasse la somme 41 des parties
 aliquotes 1, 3, 7, 9, 21, du second 63, de ce
 nombre quarré 16, dont la racine est 4. Il arrive la
 même chose à ces deux autres nombres 325, 175.
 Car la somme 109 des parties aliquotes 1, 5, 13,
 25, 65, du premier 325 surpasse la somme 73 des

parties aliquotes 1, 5, 7, 25, 35, du second 175 ;
de ce nombre quarré 36, dont la racine est 6.

XXVII.

La somme de deux nombres qui différent de l'unité est égale à la différence de leurs quarez : & la somme des quarez de leurs nombres Triangulaires est aussi un nombre Triangulaire. La somme 11 de ces deux nombres 5, 6, qui différent de l'unité, est égale à la différence de leurs quarez 25, 36 ; & leurs nombres Triangulaires 15, 21, sont tels que la somme 666 de leurs quarez 225, 441, est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 36.

XXVIII.

Les deux nombres Triangulaires 6, 10, des deux nombres 3, 4, qui différent aussi de l'unité, sont tels que leur somme 16, & leur différence 4, sont des nombres quarez, dont les racines sont 4, 2, & que la somme 136 de leurs quarez 36, 100, est un nombre Triangulaire, dont le côté 16 est aussi un nombre quarré, dont la racine 4 est encore un nombre quarré, dont la racine est 2.

Il arrive la même chose à ces deux autres nombres Triangulaires 36, 45, dont les côtez 8, 9, différent aussi de l'unité. Car leur somme 81, & leur différence 9, sont des nombres quarez, dont les racines sont 9, 3. Et la somme 3321 de leurs quarez 1296, 2025, est un nombre Triangulaire, dont le côté est 81, qui a pour racine quarrée 9, laquelle a aussi sa racine quarrée 3.

Il y a une infinité de couples d'autres nombres Triangulaires, qui ont la même propriété. On les

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 45

trouvera en ôtant & en ajoutant un nombre quarré quelconque à son quarré , & les moitez du reste & de la somme seront les deux nombres Triangulaires qu'on cherche. Les côtez de ces nombres Triangulaires ainsi trouvez , différenceront entr'eux de l'unité.

Comme si l'on ôte & qu'on ajoute ce nombre quarré 16 à son quarré 256 , les moitez du reste 240 , & de la somme 272 , donneront 120 , 136 , pour les deux nombres Triangulaires qu'on cherche , dont les côtez 15 , 16 , différent de l'unité. Voyez l'article VIII.

Ces deux nombres Triangulaires ainsi trouvez , sont encore tels que le plus grand de leurs côtez est toujours un nombre quarré ; que la différence de leurs quarez est aussi un nombre quarré : que leur somme enfin est un quarré-quarré , qui est égal au quarré de leur différence , & au côté du nombre Triangulaire que compose la somme de leurs quarez.

Si vous voulez connoître les côtez de ces nombres Triangulaires 120 , multipliez-le par 8 & au produit ajoutez l'unité , la somme sera 961 ; tirez-en la racine quarrée , qui sera 31 , prenez la plus petite moitié de cette racine 31 , qui est 15 ; ce sera le côté du nombre Triangulaire 120. Faites la même chose à l'égard de 136 , & de tous les autres nombres Triangulaires , dont vous voudrez trouver le côté. Voyez l'article VIII. p. 20.

XXIX.

La différence des quarez de deux nombres en raison double est égale à la somme de leurs cubes , divisée par la somme des deux nombres : & la même

46 RECREAT. MATH. ET PHYS.

me somme des cubes est le tiers d'un cube.

Si on prend les deux nombres 4, 8, qui sont en raison double, la différence 48 de leurs quarrés 16, 64, est égale au quotient qui vient en divisant la somme 576 de leurs cubes 64, 512, par la somme 12 des deux nombres : & la même somme 576 des cubes est le tiers de ce cube 1728, dont le côté 12 est toujours égal à la somme des deux nombres.

Je n'aurois jamais fait, si je voulois mettre ici toutes les proprietés des nombres, qui sont infinies. C'est pourquoi je finirai ce Problème par la Table des nombres premiers, que j'ai promise.



Table des nombres premiers, entre 1 & 10000.

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| 2 | 167 | 383 | 617 | 881 | 1129 | 1429 | 1693 | 1993 | 2273 | 2557 |
| 3 | 173 | 389 | 619 | 883 | 1151 | 1433 | 1697 | 1997 | 2281 | 2579 |
| 5 | 179 | 397 | 631 | 887 | 1153 | 1439 | 1699 | 1999 | 2287 | 2591 |
| 7 | 181 | 401 | 641 | 907 | 1163 | 1447 | 1709 | 2003 | 2293 | 2593 |
| 11 | 191 | 409 | 643 | 911 | 1171 | 1451 | 1721 | 2011 | 2297 | 2609 |
| 13 | 193 | 419 | 647 | 919 | 1181 | 1453 | 1723 | 2017 | 2309 | 2617 |
| 17 | 197 | 421 | 653 | 929 | 1187 | 1459 | 1733 | 2027 | 2311 | 2621 |
| 19 | 199 | 431 | 659 | 937 | 1193 | 1471 | 1741 | 2029 | 2333 | 2633 |
| 23 | — | 433 | 661 | 941 | 1201 | 1481 | 1747 | 2039 | 2339 | 2647 |
| 29 | 211 | 439 | 673 | 947 | 1213 | 1483 | 1753 | 2053 | 2341 | 2657 |
| 31 | 223 | 443 | 677 | 953 | 1217 | 1487 | 1759 | 2063 | 2347 | 2659 |
| 37 | 227 | 449 | 683 | 967 | 1223 | 1489 | 1777 | 2069 | 2351 | 2663 |
| 41 | 229 | 457 | 691 | 971 | 1229 | 1493 | 1783 | 2081 | 2357 | 2671 |
| 43 | 233 | 461 | 701 | 977 | 1231 | 1499 | 1787 | 2083 | 2371 | 2677 |
| 47 | 239 | 463 | 709 | 983 | 1237 | 1511 | 1789 | 2087 | 2377 | 2683 |
| 53 | 241 | 467 | 719 | 991 | 1249 | 1523 | 1801 | 2089 | 2381 | 2687 |
| 59 | 251 | 479 | 727 | 997 | 1259 | 1531 | 1811 | 2099 | 2383 | 2689 |
| 61 | 257 | 487 | 733 | 1009 | 1277 | 1543 | 1823 | — | 2389 | 2693 |
| 67 | 263 | 491 | 739 | 1013 | 1279 | 1549 | 1831 | 2111 | 2393 | 2699 |
| 71 | 269 | 499 | 743 | 1019 | 1283 | 1553 | 1847 | 2113 | 2399 | — |
| 73 | 271 | — | 751 | 1021 | 1289 | 1559 | 1861 | 2129 | — | 2707 |
| 79 | 277 | 503 | 757 | 1031 | 1291 | 1567 | 1867 | 2131 | 2411 | 2711 |
| 83 | 281 | 509 | 761 | 1033 | 1297 | 1571 | 1871 | 2137 | 2417 | 2713 |
| 89 | 283 | 521 | 769 | 1039 | — | 1579 | 1873 | 2141 | 2423 | 2719 |
| 97 | 293 | 523 | 773 | 1049 | 1301 | 1583 | 1877 | 2143 | 2437 | 2729 |
| — | — | 541 | 787 | 1051 | 1303 | 1597 | 1879 | 2153 | 2441 | 2731 |
| 101 | 307 | 547 | 797 | 1061 | 1307 | 1601 | 1889 | 2161 | 2447 | 2741 |
| 103 | 311 | 557 | — | 1063 | 1319 | 1607 | — | 2179 | 2459 | 2749 |
| 107 | 313 | 563 | 811 | 1069 | 1321 | 1609 | 1901 | — | 2467 | 2753 |
| 109 | 317 | 569 | 821 | 1087 | 1327 | 1613 | 1907 | 2203 | 2473 | 2767 |
| 113 | 331 | 571 | 823 | 1091 | 1361 | 1619 | 1913 | 2207 | 2477 | 2777 |
| 127 | 337 | 577 | 827 | 1093 | 1367 | 1621 | 1931 | 2213 | — | 2789 |
| 131 | 347 | 587 | 829 | 1097 | 1373 | 1627 | 1933 | 2221 | 2503 | 2791 |
| 137 | 349 | 593 | 839 | — | 1381 | 1637 | 1949 | 2237 | 2521 | 2797 |
| 139 | 353 | 599 | 853 | 1103 | — | 1399 | 1951 | 2239 | 2531 | — |
| 149 | 359 | — | 857 | 1109 | — | 1657 | 1951 | 2243 | 2539 | 2801 |
| 151 | 367 | 601 | 859 | 1109 | 1409 | 1663 | 1973 | 2251 | 2543 | 2803 |
| 157 | 373 | 607 | 863 | 1117 | 1423 | 1667 | 1979 | 2267 | 2549 | 2819 |
| 163 | 379 | 613 | 877 | 1123 | 1427 | 1669 | 1987 | 2269 | 2551 | 2833 |

Table des nombres premiers, entre 1 & 10000.

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2837 | 3187 | 3499 | 3797 | 4111 | 4451 | 4789 | 5101 | 5449 | 5791 |
| 2843 | 3191 | 3511 | 3803 | 4127 | 4457 | 4793 | 5107 | 5471 | 5801 |
| 2851 | 3203 | 3517 | 3821 | 4129 | 4463 | 4799 | 5113 | 5477 | 5807 |
| 2857 | 3209 | 3527 | 3823 | 4133 | 4481 | 4801 | 5119 | 5479 | 5813 |
| 2861 | 3217 | 3529 | 3833 | 4139 | 4483 | 4813 | 5147 | 5483 | 5821 |
| 2879 | 3221 | 3533 | 3847 | 4153 | 4493 | 4817 | 5153 | 5501 | 5827 |
| 2887 | 3229 | 3539 | 3851 | 4157 | 4507 | 4831 | 5167 | 5503 | 5839 |
| 2897 | 3251 | 3541 | 3853 | 4159 | 4513 | 4861 | 5171 | 5507 | 5843 |
| 2903 | 3253 | 3547 | 3863 | 4177 | 4517 | 4871 | 5179 | 5519 | 5849 |
| 2909 | 3257 | 3557 | 3877 | 4201 | 4519 | 4877 | 5189 | 5521 | 5851 |
| 2917 | 3259 | 3559 | 3881 | 4211 | 4523 | 4889 | 5197 | 5527 | 5857 |
| 2927 | 3271 | 3571 | 3889 | 4217 | 4547 | 4903 | 5209 | 5531 | 5861 |
| 2939 | 3299 | 3581 | 3907 | 4219 | 4549 | 4909 | 5227 | 5557 | 5867 |
| 2953 | 3301 | 3583 | 3911 | 4229 | 4561 | 4919 | 5231 | 5563 | 5869 |
| 2957 | 3307 | 3593 | 3917 | 4231 | 4567 | 4931 | 5233 | 5569 | 5879 |
| 2963 | 3313 | 3607 | 3919 | 4241 | 4583 | 4933 | 5237 | 5573 | 5881 |
| 2969 | 3319 | 3613 | 3923 | 4243 | 4591 | 4937 | 5261 | 5581 | 5897 |
| 2971 | 3323 | 3617 | 3929 | 4253 | 4597 | 4943 | 5273 | 5591 | 5903 |
| 2999 | 3329 | 3623 | 3931 | 4259 | 4603 | 4951 | 5279 | 5623 | 5923 |
| 3001 | 3331 | 3637 | 3943 | 4261 | 4621 | 4957 | 5281 | 5639 | 5927 |
| 3011 | 3343 | 3643 | 3947 | 4271 | 4637 | 4967 | 5297 | 5641 | 5939 |
| 3019 | 3347 | 3649 | 3967 | 4273 | 4639 | 4969 | 5303 | 5647 | 5953 |
| 3023 | 3359 | 3659 | 3989 | 4283 | 4643 | 4973 | 5309 | 5651 | 5981 |
| 3037 | 3361 | 3671 | 4001 | 4289 | 4649 | 4987 | 5323 | 5653 | 5987 |
| 3041 | 3371 | 3673 | 4003 | 4297 | 4651 | 4993 | 5333 | 5657 | 6007 |
| 3049 | 3373 | 3677 | 4007 | 4327 | 4657 | 4999 | 5347 | 5659 | 6011 |
| 3061 | 3389 | 3691 | 4013 | 4337 | 4663 | 5003 | 5351 | 5669 | 6019 |
| 3067 | 3391 | 3701 | 4019 | 4339 | 4673 | 5009 | 5381 | 5683 | 6029 |
| 3079 | 3407 | 3709 | 4021 | 4349 | 4679 | 5011 | 5387 | 5689 | 6037 |
| 3083 | 3413 | 3719 | 4027 | 4357 | 4691 | 5021 | 5393 | 5693 | 6043 |
| 3089 | 3433 | 3727 | 4029 | 4363 | 4703 | 5023 | 5399 | 5701 | 6047 |
| 3109 | 3437 | 3733 | 4049 | 4373 | 4721 | 5039 | 5407 | 5711 | 6053 |
| 3119 | 3449 | 3739 | 4051 | 4391 | 4723 | 5051 | 5413 | 5717 | 6067 |
| 3121 | 3457 | 3739 | 4057 | 4397 | 4729 | 5059 | 5417 | 5737 | 6073 |
| 3137 | 3461 | 3761 | 4073 | 4409 | 4733 | 5077 | 5419 | 5741 | 6079 |
| 3163 | 3463 | 3767 | 4079 | 4421 | 4751 | 5081 | 5431 | 5743 | 6089 |
| 3167 | 3467 | 3769 | 4091 | 4423 | 4759 | 5087 | 5437 | 5749 | 6091 |
| 3169 | 3469 | 3779 | 4093 | 4441 | 4783 | 5099 | 5441 | 5779 | 6101 |
| 3181 | 3491 | 3793 | 4099 | 4447 | 4787 | 5443 | 5783 | 6113 | |

Table

Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 6121 | 6449 | 6803 | 7151 | 7523 | 7853 | 8219 | 8581 | 8893 | 9241 |
| 6131 | 6451 | 6823 | 7159 | 7529 | 7867 | 8221 | 8597 | 8923 | 9257 |
| 6133 | 6469 | 6827 | 7177 | 7537 | 7873 | 8231 | 8599 | 8929 | 9277 |
| 6143 | 6473 | 6829 | 7187 | 7541 | 7877 | 8233 | 8609 | 8933 | 9281 |
| 6151 | 6481 | 6833 | 7193 | 7547 | 7879 | 8237 | 8623 | 8941 | 9283 |
| 6163 | 6491 | 6841 | 7207 | 7549 | 7883 | 8243 | 8627 | 8951 | 9293 |
| 6173 | 6521 | 6857 | 7211 | 7559 | 7901 | 8263 | 8629 | 8963 | 9311 |
| 6197 | 6529 | 6863 | 7213 | 7561 | 7907 | 8269 | 8641 | 8969 | 9319 |
| 6199 | 6547 | 6869 | 7219 | 7573 | 7917 | 8273 | 8647 | 8971 | 9323 |
| 6203 | 6551 | 6871 | 7229 | 7577 | 7927 | 8287 | 8663 | 8999 | 9337 |
| 6211 | 6553 | 6883 | 7237 | 7583 | 7933 | 8291 | 8669 | 9001 | 9341 |
| 6217 | 6563 | 6899 | 7243 | 7589 | 7937 | 8293 | 8677 | 9007 | 9343 |
| 6221 | 6569 | 6907 | 7247 | 7591 | 7949 | 8297 | 8681 | 9011 | 9349 |
| 6229 | 6571 | 6911 | 7253 | 7603 | 7951 | 8311 | 8689 | 9013 | 9371 |
| 6247 | 6577 | 6917 | 7283 | 7607 | 7963 | 8317 | 8693 | 9019 | 9377 |
| 6257 | 6581 | 6947 | 7297 | 7621 | 7993 | 8329 | 8699 | 9029 | 9391 |
| 6263 | 6599 | 6949 | 7307 | 7639 | 8009 | 8353 | 8707 | 9041 | 9397 |
| 6269 | 6607 | 6959 | 7309 | 7643 | 8011 | 8363 | 8713 | 9043 | 9403 |
| 6271 | 6619 | 6961 | 7321 | 7649 | 8017 | 8369 | 8719 | 9049 | 9403 |
| 6277 | 6637 | 6967 | 7321 | 7669 | 8017 | 8377 | 8731 | 9059 | 9413 |
| 6287 | 6653 | 6971 | 7331 | 7673 | 8039 | 8387 | 8737 | 9067 | 9419 |
| 6299 | 6659 | 6677 | 7333 | 7681 | 8053 | 8389 | 8741 | 9091 | 9421 |
| 6301 | 6661 | 6983 | 7349 | 7687 | 8059 | 8419 | 8747 | 9103 | 9431 |
| 6311 | 6673 | 6991 | 7351 | 7691 | 8069 | 8423 | 8753 | 9109 | 9433 |
| 6317 | 6679 | 6997 | 7369 | 7699 | 8081 | 8429 | 8761 | 9127 | 9437 |
| 6323 | 6689 | 7001 | 7393 | 7703 | 8087 | 8431 | 8779 | 9133 | 9439 |
| 6329 | 6691 | 7013 | 7411 | 7717 | 8089 | 8443 | 8783 | 9137 | 9461 |
| 6337 | 6701 | 7019 | 7417 | 7723 | 8093 | 8447 | 8803 | 9151 | 9463 |
| 6343 | 6703 | 7027 | 7433 | 7727 | 8101 | 8461 | 8807 | 9157 | 9467 |
| 6353 | 6709 | 7039 | 7451 | 7741 | 8111 | 8467 | 8819 | 9161 | 9473 |
| 6359 | 6719 | 7043 | 7457 | 7753 | 8117 | 8501 | 8821 | 9173 | 9479 |
| 6361 | 6733 | 7057 | 7459 | 7757 | 8123 | 8513 | 8831 | 9181 | 9491 |
| 6367 | 6737 | 7069 | 7477 | 7759 | 8147 | 8521 | 8837 | 9187 | 9497 |
| 6373 | 6761 | 7079 | 7481 | 7789 | 8161 | 8527 | 8839 | 9199 | 9511 |
| 6379 | 6763 | 7103 | 7487 | 7793 | 8167 | 8537 | 8849 | 9203 | 9521 |
| 6389 | 6779 | 7109 | 7489 | 7817 | 8171 | 8539 | 8861 | 9209 | 9533 |
| 6397 | 6781 | 7121 | 7499 | 7823 | 8179 | 8543 | 8863 | 9221 | 9539 |
| 6421 | 6791 | 7127 | 7507 | 7829 | 8191 | 8563 | 8867 | 9227 | 9547 |
| 6427 | 6793 | 7129 | 7517 | 7841 | 8209 | 8573 | 8887 | 9239 | 9551 |

Table des nombres premiers , entre 1 & 10000.

| | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 9587 | 9629 | 9679 | 9733 | 9781 | 9817 | 9859 | 9907 | 9967 |
| — | 9631 | 9689 | 9739 | 9787 | 9829 | 9871 | 9923 | 9973 |
| 9601 | 9643 | 9697 | 9743 | 9791 | 9833 | 9883 | 9929 | — |
| 9613 | 9649 | — | 9749 | — | 9839 | 9887 | 9931 | — |
| 9619 | 9661 | 9719 | 9767 | 9803 | 9851 | — | 9941 | — |
| 9623 | 9677 | 9721 | 9769 | 9811 | 9857 | 9901 | 9949 | — |

PROBLEME IX.

Des Triangles rectangles en nombres.

ON appelle *Triangle rectangle en nombres* ; trois nombres inégaux , dont le plus grand est tel , que son quarré est égal à la somme des quarez des deux autres , comme 3 , 4 , 5. Car le quarré 25 du plus grand 5 , qu'on appelle *Hypoténuse* , est égal à la somme des quarez 9 , 16 , des deux autres 3 , 4 , qu'on appelle *Côtez* , dont l'un étant pris pour la *Base* du Triangle rectangle , l'autre en sera la *Hauteur*. La moitié 6 du produit 12 sous cette Base & cette Hauteur , se nomme *Aire* , qui est toujours divisible par 3. Vous remarquerez que par le produit de deux nombres nous entendons celui qui vient de leur multiplication.

Il y a une infinité de Triangles rectangles de diverses especes , tant en nombres entiers , qu'en nombres rompus : mais on les conçoit ordinairement en nombres entiers , entre lesquels le premier & le plus petit de tous est le précédent 3 , 4 , 5 : il a une infinité de belles proprietés , qu'il seroit trop long de rapporter ici. Je me contenterai de dire que la somme 216 des Cubes 27 , 64 , 125 , de ses deux côtez 3 , 4 , & de son Hypoténuse 5 , est un Cube , dont le côté 6 est égal à son Aire.

PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 51

Pour trouver en nombres autant de Triangles rectangles qu'on voudra, prenez à volonté deux nombres, comme 2, 3, qu'on appelle *nombres générateurs*, & multipliez-les ensemble, pour avoir le produit 6, dont le double 12 sera le côté d'un Triangle rectangle; l'autre côté sera égal à la différence 5 des quarrés 4, 9, des nombres générateurs 2, 3; & l'hypoténuse sera égale à la somme 13 des mêmes quarrés 4, 9. De sorte qu'on aura ce Triangle rectangle 5, 12, 13: car le quarré 169 de l'hypoténuse 13, est égal à la somme des quarrés 25, 144, dont les racines sont 5, 12.

Le premier Triangle rectangle 3, 4, 5, dont les deux nombres générateurs sont 1, 2, est tel, que la différence des deux côtes 3, 4, est 1. Si vous voulez en *trouver un autre qui ait la même propriété*, prenez pour le plus petit nombre générateur de ce second Triangle le nombre 2, qui est le plus grand nombre générateur du premier. Doublez ce nombre 2; ajoutez à 4 double de 2, 1 le plus petit nombre générateur du premier, & vous aurez 5, qui sera le plus grand nombre générateur du second Triangle cherché, que vous trouverez en suivant la règle qu'on vient de donner. Ces trois nombres seront 20, 21, 29, dont les deux côtes 20, 21, ne différent que de l'unité.

Si vous voulez un troisième Triangle rectangle qui ait la même propriété, servez-vous des deux nombres générateurs 2, 5, du Triangle précédent, & prenez le plus grand 5 pour le plus petit du troisième Triangle rectangle. Doublez ce nombre 5, ajoutez à 10 double de 5, 2, le plus petit nombre générateur du Triangle précédent, & vous aurez 12 pour le plus grand nombre générateur du troisième Triangle rectangle, qui sera 119, 120,

169, où la différence des deux côtes 119, 120, est aussi 1. Vous suivrez la même règle pour trouver les autres. La Table que l'on a jointe ici servira à faire connoître les six premiers Triangles, dont les côtes ne diffèrent que de l'unité : on peut la continuer aussi loin qu'on voudra, en suivant les exemples qu'on vient de donner.

| Côtés. | | Hypotén. | Nomb. génér. | |
|--------|--------|----------|--------------|------|
| 3. | 4. | 5. | 1. | 2. |
| 20. | 21. | 29. | 2. | 5. |
| 119. | 120. | 169. | 5. | 12. |
| 696. | 697. | 985. | 12. | 29. |
| 4059. | 4060. | 5741. | 29. | 70. |
| 23660. | 23661. | 33461. | 70. | 169. |

Le même premier Triangle rectangle 3, 4, 5, est encore tel, que l'excès de l'hypoténuse 5 sur le côté 4 est aussi 1, parce que ses deux nombres générateurs 1, 2, diffèrent de l'unité.

| Bases. | Hauteurs. | Hypotén. | Nomb. génér. | |
|--------|-----------|----------|--------------|----|
| 3. | 4. | 5. | 1. | 2. |
| 5. | 12. | 13. | 2. | 3. |
| 7. | 24. | 25. | 3. | 4. |
| 9. | 40. | 41. | 4. | 5. |
| 11. | 60. | 61. | 5. | 6. |
| 14. | 84. | 85. | 6. | 7. |

C'est pourquoi on pourra trouver une infinité d'autres Triangles rectangles, qui auront la même propriété, si pour leurs nombres générateurs on prend deux nombres qui diffèrent de l'unité, comme vous voyez dans la Table précédente, où les premières différences des Bases 3, 5, 7, 9, &c. sont égales, & où les secondes différences des Hau-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 53

teurs 4, 12, 24, 40, &c. sont aussi égales; ce qui arrive aussi aux Hypoténuses 5, 13, 25, 41, &c.

REMARQUES.

Les secondes différences des Hauteurs sont égales; car la différence de 12 à 4 est 8, & la différence de 24 à 12 est 12: mais la différence de 12 à 8 est 4. De même la différence de 40 à 24 est 16, & la différence de 16 à 12 est aussi 4. Ainsi des autres.

Hauteurs. 1^{es} Diff. 2^{es} Diff.

| | | | | |
|----|---|----|---|---|
| 12 | } | 8 | } | |
| 4 | } | | } | 4 |
| 24 | } | 12 | } | |
| 12 | } | | } | 4 |
| 40 | } | 16 | } | |
| 24 | } | | } | 4 |

Les Hypoténuses ont aussi les secondes différences égales, comme on le voit par cette Table.

Hypotén. 1^{es} Diff. 2^{es} Diff.

| | | | | |
|----|---|----|---|---|
| 13 | } | 8 | } | |
| 5 | } | | } | 4 |
| 25 | } | 12 | } | |
| 13 | } | | } | 4 |
| 41 | } | 16 | } | |
| 25 | } | | } | 4 |

Les Bases sont ici des nombres impairs; & si l'on veut qu'elles soient les quarrés de ces mêmes nombres impairs, il ne faut que prendre les Hauteurs & les Hypoténuses pour les nombres géné-

54 RECREAT. MATH. ET PHYS.
 rateurs des Triangles rectangles qu'on cherche ;
 lesquels par consequent seront tels.

| Bases. | Hauteurs. | Hypotén. | Nomb. génér. | |
|--------|-----------|----------|--------------|-----|
| 9. | 40. | 41. | 4. | 5. |
| 25. | 312. | 313. | 12. | 13. |
| 49. | 1200. | 1201. | 24. | 25. |
| 81. | 3280. | 3281. | 40. | 41. |
| 121. | 7320. | 7321. | 60. | 61. |
| 169. | 14280. | 14281. | 84. | 85. |

Si au lieu d'un côté, vous voulez que l'*Hypoténuse* soit un nombre quarré, il faut que les deux nombres générateurs soient les côtez d'un Triangle rectangle, comme vous voyez ici, où l'hypoténuse est le quarré du plus grand nombre générateur augmenté de l'unité.

| Côtez. | Hypotén. | Nomb. génér. | |
|--------|----------|--------------|---------|
| 7. | 24. | 25. | 3. 4. |
| 119. | 120. | 169. | 5. 12. |
| 336. | 527. | 625. | 7. 24. |
| 720. | 1519. | 1681. | 9. 40. |
| 1320. | 3479. | 3721. | 11. 60. |
| 2184. | 6887. | 7225. | 13. 84. |

Ce Triangle rectangle 21, 28, 35, est tel que les deux côtez 21, 28, sont des nombres Triangulaires, dont les côtez 6, 7, différent de l'unité, & le quarré 1225 de l'Hypoténuse 35 est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 49.

Il arrive la même chose à cet autre Triangle rectangle 820, 861, 1189. Car les deux côtez 820, 861, sont des nombres Triangulaires, dont les côtez 40, 41, différent aussi de l'unité, & le quarré

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 55

1413721 de l'Hypoténuse 1189 est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 1681.

Il arrive encore la même chose à ce troisième Triangle rectangle 28441, 28680, 40391. Car les deux côtez 28441, 28680, sont des nombres Triangulaires, dont les côtez 238, 239, différent aussi de l'unité, & le carré 1631452881 de l'Hypoténuse 40391 est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 57121. Ainsi des autres.

Les Triangles rectangles suivans ont pour Bases & pour Hypoténuses des nombres Triangulaires, &

| Bases. | Hauteurs. | Hypotén. | Nomb. génér. | |
|--------|-----------|----------|--------------|-----|
| 6. | 8. | 10. | 1. | 3. |
| 36. | 27. | 45. | 3. | 6. |
| 120. | 64. | 136. | 6. | 10. |
| 300. | 125. | 325. | 10. | 15. |
| 630. | 216. | 666. | 15. | 21. |
| 1176. | 343. | 1225. | 21. | 28. |

pour Hauteurs des nombres cubiques. On en trouvera autant que l'on voudra, en ajoutant & en ôtant un nombre carré de son carré; car la moitié de la somme sera l'Hypoténuse, la moitié du reste sera la Base, & la hauteur sera égale au Cube du côté du premier nombre carré: ou bien en prenant pour nombres générateurs les nombres Triangulaires par ordre, comme vous voyez ici, où le plus petit nombre générateur d'un Triangle rectangle est le même que le plus grand du Triangle rectangle précédent, &c.

PROBLEME X.

De la Progression Arithmétique.

ON appelle *Progression Arithmétique*, une suite de grandeurs, dont la différence est la même à l'égard de celles qui se suivent immédiatement. Cette suite peut aller en augmentant ou en diminuant. Ces nombres 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. forment une Progression Arithmétique, dont la différence ou l'excès est 2. Cette autre suite de nombres 2. 6. 10. 14. 18. 22. &c. est une autre Progression Arithmétique, dont la différence est 4. Ces deux Progressions vont en augmentant. Celle-ci 32. 27. 22. 17. 12. 7. &c. va en diminuant, & la différence est 5. Chaque grandeur de la Progression est appelée *Terme*.

La principale propriété de la Progression Arithmétique, est que si on prend trois termes de suite 6. 10. 14. la somme 20. des deux extrêmes 6. 14. est double du moyen 10. De même si on prend quatre termes de suite 6. 10. 14. 18. la somme 24 des deux extrêmes 6. 18. est égale à celle des deux moyens 10, 14. Enfin si on prend un plus grand nombre de termes de suite, comme ces six, 2. 6. 10. 14. 18. 22. la somme 24 des deux extrêmes 2, 22, est encore égale à celle de deux autres 6, 18, qui en sont également éloignez, & à celle des deux 10, 14, qui en sont aussi également éloignez. D'où il est aisé de conclure que quand le nombre des termes est impair, la somme de deux termes également éloignez du moyen, est double de ce terme moyen, comme on le voit dans les cinq termes 2. 6. 10. 14. 18. Car la somme 20 des deux extrêmes 2, 18, ou de ces deux autres 6, 14, qui

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 37

sont également éloignez du moyen 10, aussi-bien que des extrêmes, est double de ce moyen 10.

On peut aisément trouver autant qu'on voudra de Triangles rectangles en nombres, par le moyen de cette double Progression Arithmétique $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{7}$, $4\frac{4}{9}$, $5\frac{5}{11}$, $6\frac{6}{13}$, $7\frac{7}{15}$, $8\frac{8}{17}$, &c. où l'excès est 2 dans les Fractions, & 1 dans les Nombres entiers. Car si l'on réduit l'entier avec la Fraction en une seule Fraction, comme $1\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{3}$, * le numérateur 4, & le dénominateur 3, seront les côtez de ce Triangle rectangle 3, 4, 5, dont on connoitra l'Hypoténuse 5, en prenant la racine quarrée de 25, somme des quarez 9, 16 des côtez 3, 4. De même si l'on réduit $2\frac{2}{5}$ en $\frac{12}{5}$, * le dénominateur 5 & le numérateur 12, seront les côtez de ce Triangle rectangle 5, 12, 13. Ainsi des autres: où vous voyez que tout nombre impair peut être l'un des deux côtez d'un Triangle rectangle, en nombres entiers.

Au lieu de cette double Progression Arithmétique, on peut se servir de celle-ci, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16}$, $4\frac{19}{20}$, $5\frac{23}{24}$, $6\frac{27}{28}$, $7\frac{31}{32}$, $8\frac{35}{36}$, &c. où l'excès est 4 dans les Fractions, & 1 dans les Nombres entiers. Car si l'on réduit $1\frac{7}{8}$ en $\frac{15}{8}$, * le dénominateur 8, & le numérateur 15, seront les deux côtez de ce Triangle rectangle 8, 15, 17. De même si l'on réduit $2\frac{11}{12}$, en $\frac{35}{12}$, * le dénominateur 12, & le numérateur 35, seront les deux côtez de cet autre Triangle rectangle 12, 35, 37. Ainsi des autres,

* Ce qui se fait en multipliant le nombre entier par le dénominateur, & ajoutant au produit le numérateur.

où vous voyez qu'un nombre divisible par 4 peut être l'un des deux côtés d'un Triangle rectangle en nombres entiers.

Pour trouver une infinité de semblables Progressions, on prendra à volonté deux nombres quelconques, comme 1, 2, ou 3, 5, qui sont les termes générateurs des deux Progressions précédentes, ou tels autres nombres qu'il plaira.

Prémièrement, on aura le numérateur de la première fraction en multipliant ces termes l'un par l'autre : si le produit est impair, il sera le numérateur cherché ; mais s'il est pair, il faudra prendre le double de ce produit.

Secondement, on aura le dénominateur de cette première fraction en ajoutant les deux termes choisis, & en multipliant cette somme par la différence de ces mêmes termes : si le produit est impair, il sera le dénominateur cherché ; mais s'il est pair, on en prendra la moitié.

Troisièmement, on aura le numérateur de la fraction suivante. 1°. En multipliant la différence des termes par 2, si elle est paire, ou par 4, si elle est impaire. 2°. En multipliant ce produit par le plus grand terme choisi. 3°. En ajoutant ce second produit au numérateur de la première fraction ; cette somme formera le numérateur de la seconde fraction.

Enfin on aura le dénominateur de cette seconde fraction, en ajoutant le carré de la différence des termes choisis, s'il est pair, ou le double de ce carré, s'il est impair, au dénominateur de la première fraction. Cette somme donnera le dénominateur de la seconde fraction.

Les deux premiers termes de cette Progression étant réduits en entiers & en fractions, il sera aisé

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE: 59

de trouver la suite d'autant de termes qu'on voudra ; puisqu'on connoît la différence des entiers, celle des numérateurs & celle des dénominateurs.

I.

Dans une Progression Arithmétique, la somme des termes est égale à la somme des deux extrêmes, multipliée par la moitié du nombre de tous ces termes. C'est pourquoi pour trouver la somme d'autant de termes qu'on voudra d'une Progression Arithmétique, par exemple, de ces huit, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, on multipliera par leur nombre 8, la somme 20 des deux extrêmes 3, 17, & 80 moitié du produit 160, sera la somme qu'on cherche.

II.

Si au contraire on connoît la somme des termes, leur nombre & le premier terme, on trouvera chacun de ces termes en cherchant leur excès en cette sorte. Si la somme donnée des termes est par exemple 80, que leur nombre soit 8, & que le premier terme soit 3, divisez par le nombre donné des termes 8 le double 160 de la somme donnée 80 ; ôtez du quotient 20 le double 6 du premier terme donné 3 ; enfin divisez le reste 14 par le nombre donné des termes diminué de l'unité, c'est-à-dire, dans cet exemple par 7 ; le quotient 2 sera l'excès qu'on cherche, lequel étant ajouté au premier terme donné 3, donnera 5 pour le second terme, auquel si l'on ajoute le même excès 2, on aura 7 pour le troisième terme, & ainsi de suite.

III.

Mais si l'on donne la somme des termes, leur

nombre & l'excès, on trouvera le premier terme, & par conséquent tous les autres en cette sorte. Que la somme donnée des termes soit 80, que leur nombre soit 8, & que l'excès soit 2; divisez le double 160 de la somme donnée 80 par le nombre donné des termes 8; ôtez du quotient 20 autant de fois l'excès 2, que le nombre donné des termes 8 comprend d'unités moins une, sçavoir, 7 fois, c'est-à-dire, qu'il faut ici ôter 14; la moitié 3 du reste 6 sera le premier terme, auquel ajoutant l'excès donné 2, on aura 5 pour le second terme: si l'on ajoute à ce second terme le même excès 2, on aura 7 pour le troisième terme, & ainsi de suite.

I V.

Si on connoît le premier terme, le nombre & la différence des termes, on connoîtra le dernier terme en cette sorte. Multipliez le nombre des termes diminué de l'unité par la différence, ajoutez à ce produit le premier terme, la somme donnera le dernier terme. Soit le premier terme 3, le nombre des termes 8, & leur différence 2, multipliez 7 nombre des termes diminué de l'unité par 2 différence des termes, ajoutez au produit 14 le premier terme 3, & vous aurez 17 pour le dernier terme. Nous ferons l'application de ces articles dans les Questions suivantes.

QUESTION I.

Un Propriétaire fait faire un Puits à un Masson, avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la première toise de profondeur, 5 pour la seconde, 7 pour la troisième, & ainsi de suite en

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 61
*augmentant de 2 livres à chaque toise , jusqu'à
20 toises de profondeur. On demande combien il
sera dû au Maçon , quand les 20 toises de pro-
fondeur seront achevées.*

Pour résoudre cette Question , multipliez les 2 livres d'augmentation pour chaque toise de profondeur par le nombre des toises moins une de toute la profondeur , c'est-à-dire , par 19 , & ayant ajouté au produit 38 le premier terme 3 , vous aurez 41 pour le dernier terme. Ajoûtez à ce dernier terme 41 le premier terme 3 , qui est le nombre des livres promises pour la première toise ; multipliez la somme 44 par la moitié 10 du nombre 20 des toises de toute la profondeur , & vous aurez 440 livres pour l'argent dû au Maçon sur 20 toises de profondeur.

REMARQUES.

Cette Question se résout par le quatrième & le premier article ; par le quatrième article on trouve le dernier terme 41 , & par le premier on trouve 440 livres , somme des 20 termes.

QUESTION II.

Un Voyageur a fait 100 lieues en huit jours ; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent , & le premier jour il a fait 2 lieues ; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.

Pour résoudre cette Question , divisez le double 200 des lieues données 100 , par le nombre donné 8 des jours , & ôtez du quotient 25 le

52 RECREAT. MATH. ET PHYS.

double 4 du nombre donné 2 des lieues du premier jour : divisez le reste 21 par 7 , qui est le nombre donné des jours , diminué de l'unité ; le quotient 3 fera connoître que le Voyageur a fait chaque jour 3 lieues plus que le précédent. D'où il est aisé de conclure , que comme le premier jour il a fait 2 lieues , le second il en aura fait 5 , le troisième 8 , le quatrième 11 , le cinquième 14 , le sixième 17 , le septième 20 , & le huitième 23 , ce qui fait en tout 100 lieues , comme porte la Question , & comme on le peut connoître par le premier article.

REMARQUE.

Cette seconde Question se résout par le second article.

QUESTION III.

Un Voyageur a fait 100 lieues en huit jours , & il a fait chaque jour 3 lieues plus que le précédent ; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.

Pour résoudre cette Question , divisez le double 200 des lieues données 100 , par le nombre donné 8 des jours , & ôtez du quotient 25 le nombre 21 , qui est le nombre donné 3 des lieues de surplus en chaque jour , multiplié par le nombre donné des jours moins un , c'est-à-dire , par 7 : la moitié 2 du reste 4 fera connoître que le premier jour le Voyageur a fait 2 lieues , & par conséquent qu'il en a fait 5 le second jour , 8 le troisième , 11 le quatrième , 14 le cinquième , 17 le sixième , 20 le septième , & 23 le huitième , ce qui fait en tout 100 lieues , comme porte la Question , & comme on le peut connoître par le premier article.

R E M A R Q U E.

Cette troisième Question se résout par le troisième article.

QUESTION IV.

Un Voleur en s'enfuyant fait 8 lieues par jour ; il est poursuivi par un Archer, qui n'a fait que 3 lieues le premier jour, 5 le second, 7 le troisième, & ainsi de suite en augmentant de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'Archer atteindra le Voleur, & combien de lieues chacun aura fait.

Pour résoudre cette question & ses semblables, ajoutez le nombre 2 des lieues que l'Archer fait chaque jour plus que le précédent, a 16 double de 8 nombre des lieues que le Voleur fait chaque jour, & ayant ôté de la somme 18 le double 6 du nombre 3 des lieues que l'Archer a fait le premier jour, divisez le reste 12 par 2 nombre des lieues que le même Archer fait de plus chaque jour : le quotient 6 fera connoître que l'Archer atteindra le Voleur au bout de six jours, & que par consequent chacun aura fait 48 lieues, parce que 6 fois 8 font 48, & que la somme de ces six termes de la Progression Arithmétique 3, 5, 7, 9, 11, 13, fait aussi 48.

R E M A R Q U E S.

Cette quatrième Question est trop composée ; pour pouvoir n'être résolue que par les articles précédens. Elle peut servir de modèle pour résoudre les autres semblables ; c'est-à-dire, que

dans ces sortes de questions il faut doubler le nombre des lieues donnez, où la Progression ne se rencontre point, ajouter à ce double la différence ou l'excès de la Progression Arithmétique, ôter de cette somme le double du premier terme de cette Progression, & diviser ce reste par la différence des termes de la Progression: le quotient fera le nombre des termes, qui étant multiplié par le nombre des lieues qui n'est point dans la Progression, donnera la somme de tous les termes.

QUESTION V.

On suppose que de Paris à Lyon il y a 100 lieues, que deux Couriers sont partis en même temps, & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faisant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faisant 3 lieues chaque jour plus que le précédent: & que précisément au milieu du chemin ils se sont rencontrés, le premier au bout de 5 jours, & le second au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux Couriers ont fait chaque jour.

POur sçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui pour rencontrer l'autre, a employé 5 jours, ôtez ce nombre 5 de son quarré 25, & ayant multiplié le reste 20 par 2 nombre des lieues que ce Courier a fait chaque jour plus que le précédent, ôtez le produit 40 du nombre 100 de la distance de Paris à Lyon: puis divisez le reste 60 par 10 double de 5 nombre des jours: le quotient 6 fera connoître que le Courier a fait 6 lieues le premier jour, & par consequent 8 le second

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 65
cond, 10 le troisieme, 12 le quatrieme, & 14
le cinquieme.

De même pour sçavoir combien de lieues a fait
chaque jour celui qui pour rencontrer l'autre, a
employé 4 jours, ôtez ce nombre 4 de son quarré
16, & ayant multiplié le reste 12 par 3 nombre
des lieues que ce Courier a fait ch. que jour de
plus; ôtez le produit 36 du nombre 100 de la di-
stance de Paris à Lyon: puis divisez le reste 64 par
8 double de 4 nombre des jours, & le quotient 8
fera connoître que ce Courier a fait 8 lieues le
premier jour, & par consequent 11 le second, 14
le troisieme, & 17 le quatrieme.

R E M A R Q U E.

Cette cinquieme Question comprend deux par-
ties, qui peuvent fort bien se résoudre chacune par
le troisieme article précédent, si l'on fait attention
que 50 moitié de 100, est la somme des termes.

QUESTION VI.

*Il y a un panier & cent pommes, rangées en ligne
droite, & éloignées par-tout d'un pas l'une de
l'autre. On demande combien de pas feroit celui
qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes
après les autres, & de les rapporter dans le panier,
qui resteroit toujours dans la même place.*

IL est certain que pour la premiere pomme il
faut faire 2 pas, un pour aller, & un pour re-
venir: que pour la seconde pomme il faut faire 4
pas, deux pour aller, & deux pour revenir: que
pour la troisieme pomme il faut faire 6 pas, trois
pour aller, & trois pour revenir: & ainsi du reste.

On a cette Progression Arithmétique 2, 4, 6, 8, 10, &c. dont le dernier & plus grand terme sera 200, qui est le double du nombre des pommes, auquel ajoutant le premier terme 2, & multipliant la somme 202 par la moitié 50 du nombre des pommes, qui est le nombre des termes, le produit 10100 sera la somme de tous ces termes, ou le nombre des pas qu'on cherche.

REMARQUE.

Cette sixième Question se résout par le quatrième article, pour avoir le dernier terme 202, & par le premier, pour avoir la somme des termes 10100.

QUESTION VII.

Un Marchand est convenu avec un de ses Creanciers de lui donner de l'argent chaque semaine : la première semaine il lui a donné cent livres, la seconde quatre cens livres, il a augmenté chaque semaine son paiement de trois cens livres. On demande combien il a payé la vingt-huitième semaine.

Pour résoudre cette Question, il faut multiplier 300 livres, différence de la Progression, par 27 nombre des semaines diminué de l'unité, & ajouter 100 livres premier terme au produit 8100. La somme 8200 livres sera le paiement que le Marchand aura fait la vingt-huitième semaine.

REMARQUE.

La solution de cette septième Question n'est que l'application du quatrième article. On peut s'exercer à chercher par le premier article quelle peut

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 67
être la somme qu'a payé le Marchand pendant les
vingt-huit semaines. Voyez Schooten dans ses
Sectiones Miscellanea.

QUESTION VIII.

*Un Reservoir a douze canaux : par le second il s'é-
coule dans une heure deux pintes d'eau plus que
par le premier : par le troisième deux pintes plus
que par le second, & ainsi de suite. On sçait que
tous ces canaux laissent écouler 168 pintes d'eau
dans une heure. On veut sçavoir combien chacun
de ces canaux laisse écouler d'eau pendant une
heure.*

IL faut diviser 168 somme de la Progression par
6 moitié de 12, nombre des canaux ou des
termes : du quotient 28 on ôtera 22 produit de 2
différence par 11 nombre des termes diminué de
l'unité, il restera 6, dont la moitié 3 est le pre-
mier terme de la Progression, c'est-à-dire, que le
premier canal laissera écouler 3 pintes d'eau dans
une heure, le second cinq pintes pendant le même
temps, le troisième 7 pintes, &c.

R E M A R Q U E.

Cette huitième Question étant assez composée,
ne peut se rapporter précisément à aucun des qua-
tre articles précédens : mais elle peut servir de re-
gle pour résoudre toutes les questions qui lui sont
semblables.

QUESTION IX.

Un Pere de famille ordonne par son testament que
E ij

l'aîné de ses enfans prendra sur tous ses biens dix mille livres, & le septième de ce qui restera; que le second prendra vingt mille livres, & le septième de ce qui restera; que le troisième prendra trente mille livres, & le septième de ce qui restera, & ainsi de suite, en augmentant toujours de dix mille livres avec le septième du restant. Les enfans ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partagez. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la somme que chacun a eu.

Pour résoudre cette neuvième Question, & les autres qui lui sont semblables, il faut ôter 1 du dénominateur de la fraction, qui est ici 7; le reste 6 sera le nombre des enfans. Il faut ensuite quar- rer ce reste 6, & multiplier son quarré 36 par la somme que doit prendre l'aîné des enfans, & qu'on a supposé ici être 10000 livres; le produit 360000 est le bien à partager. Divisant ce produit par 6, nombre des enfans, on trouve 60000 livres, qui est la somme que chacun des enfans a pris.

R E M A R Q U E.

Si on veut se servir de l'Algebre pour résoudre ces sortes de Questions, on peut consulter les nouveaux Elemens d'Arithmétique & d'Algèbre, par M. de Lagny de l'Académie Royale des Sciences, p. 417.

P R O B L E M E X I.

De la Progression Géométrique.

ON appelle *Progression Géométrique* une suite de plusieurs quantitez qui croissent continue-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 69

ment par la multiplication d'un même nombre , comme 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 , &c. où chaque terme est double du précédent : ou bien 2 , 6 , 18 , 54 , 162 , 486 , &c. où chaque terme est triple du précédent. Ainsi des autres.

I.

La principale propriété de la Progression Géométrique , est que si on prend trois termes en proportion continue , comme 3 , 6 , 12 , le produit 36 des deux extrêmes , 3 , 12 , est égal au quarré du moyen 6. De même si on prend quatre termes en proportion continue, comme 3 , 6 , 12 , 24 , le produit 72 des deux extrêmes 3 , 24 , est égal au produit des deux moyens 6 , 12. Enfin si on prend un plus grand nombre de termes continuellement proportionnels, comme ces six, 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 , le produit 288 des deux extrêmes 3 , 96 , est égal au produit des deux 6 , 48 , qui en sont également éloignez, ou des deux 12 , 24 qui en sont aussi également éloignez. D'où il est aisé de conclure, que lorsque le nombre des termes est impair , ce produit est égal au quarré du terme moyen , comme il arrive dans ces cinq termes 3 , 6 , 12 , 24 , 48. Car le produit 144 des deux extrêmes 3 , 48 , ou des deux 6 , 24 , qui en sont également éloignez , est le quarré du terme moyen 12.

Ainsi vous voyez que ce qui convient à la Progression Arithmétique par addition , convient à la Progression Géométrique par multiplication. Mais il y a une autre différence considerable entre ces deux Progressions ; c'est que dans la Progression Arithmétique les différences des termes sont égales , au lieu que dans la Progression Géométrique elles sont toujours inégales , elles conservent entre elles la même Progression Géométrique , & quoi-

qu'on prenne à l'infini les différences des différences, on ne peut jamais parvenir à des différences égales. Ainsi l'on voit que dans cette Progression Géométrique 2, 6, 18, 54, 162, 486, les différences des termes font cette semblable Progression Géométrique 4, 12, 36, 108, 324, où les différences des termes font aussi cette semblable Progression Géométrique 8, 24, 72, 216, & ainsi de suite.

Si on prend trois termes proportionnels, comme 2, 6, 18, le cube 216 du moyen 6 est égal au produit solide qui vient de la multiplication des trois nombres 2, 6, 18. De même si on prend quatre nombres continuellement proportionnels, comme 2, 6, 18, 54, le cube 216 du second 6 est égal au produit solide qu'on a en multipliant le quatrième 54 par 4, carré du premier 2; & le cube 5832 du troisième 18 est égal au produit solide qui vient en multipliant le premier 2 par 2916 carré du quatrième 54.

II.

On connoît aisément par ce qui a été dit jusqu'à présent, que *pour trouver un moyen géométrique proportionnel entre deux nombres donnez*, comme entre 2 & 18, il faut multiplier ensemble les deux nombres donnez 2, 18, & prendre la Racine quarrée 6 de leur produit 36, qui sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens géométriques continuellement proportionnels entre deux nombres donnez*, comme entre 2 & 54, il faut multiplier le dernier 54 par 4 carré du premier 2, & la Racine cubique 6 du produit 216 sera le premier moyen proportionnel; lequel étant multiplié par 54 second

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 71
 Nombre donné, donnera pour produit 324, dont la Racine quarrée 18 sera l'autre moyen proportionnel qu'on cherche.

III.

Mais pour trouver un moyen proportionnel Arithmétique entre deux nombres donnez, comme entre 2 & 8, il faut prendre 5 moitié de 10 somme des nombres donnez 2, 8. Cette moitié 5 sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et pour trouver deux moyens Arithmétiques continuellement proportionnels entre deux nombres donnez, comme entre 2 & 11, on ôtera 2 le plus petit nombre donné du plus grand 11; on ajoutera séparément au même plus petit 2 le tiers 3 du reste 9 & 6 double de ce tiers, & l'on aura 5 & 8 pour les deux moyens proportionnels qu'on cherche.

Ou bien on ajoutera au plus grand 11 des deux nombres donnez le double 4 du plus petit 2, & réciproquement au plus petit 2 le double 22 du plus grand 11, & les tiers des deux sommes 15, 24, donneront 5 & 8 pour les deux moyens qu'on cherche.

IV.

Il est évident que toutes les Puissances par ordre d'un même nombre, comme de 2, font une Progression Géométrique, telle qu'est la suivante,

| | | | | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|---------------|
| 1 | 2 | 4 | 8 | | | |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128, 256, &c. |
| 1 | <u>1</u> | <u>1</u> | <u>1</u> | <u>1</u> | <u>1</u> | <u>1</u> |
| 3 | 5 | 17 | | | | 257 |

où vous voyez que toutes les Puissances du nom-

bre 2, dont les exposans 1, 2, 4, 8, &c. sont les termes d'une Progression Géométrique, sçavoir, 2, 4, 16, 256, &c. sont telles que si à chacune on ajoute l'unité, les sommes 3, 5, 17, 257, &c. sont des nombres premiers. Par où il est aisé de trouver un nombre premier plus grand que quelque nombre donné que ce soit.

V.

Les termes d'une Progression Géométrique peuvent aller en augmentant ou en diminuant; mais quelle que soit la Progression, *on pourra la continuer à l'infini*, si connoissant les deux premiers termes, on divise le quarré du second terme par le premier, le quotient sera le troisième terme; si on divise ensuite le quarré du terme trouvé par le terme précédent, le quotient sera le terme suivant, & ainsi de suite. Soient donnez 2, 4 premiers termes d'une Progression. Pour la continuer à l'infini, il suffit de diviser 16 quarré du second terme 4, par le premier 2, le quotient 8 sera le troisième terme; on divisera ensuite 64 quarré du troisième terme 8 par le terme précédent 4, & le quotient 16 sera le quatrième terme. Ainsi du reste.

Quand la Progression va en augmentant, il est plus aisé de diviser le second terme par le premier, & de multiplier le second terme par le quotient qu'on appelle exposant de la raison: le produit donne le troisième terme. On multiplie ensuite ce troisième terme par le même exposant, ce produit donne le quatrième terme. On continue la même operation pour avoir autant de termes qu'on voudra.

VI.

Pour trouver quelque terme que ce soit d'une Pro-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 73

gression, dont on connoît le premier & le second terme, si elle va en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, & qu'on veuille connoître le huitième terme, il faut diviser le second terme 4 par le premier 2, il viendra 2 pour exposant de la Progression; il faut ensuite multiplier cet exposant 2, 7 fois par lui-même, nombre du terme qu'on cherche diminué de l'unité, c'est-à-dire, qu'il faut prendre la septième puissance de 2, qui est 128, qu'on multipliera par le premier terme 2; le produit 256 sera le huitième terme qu'on demande.

V I I.

Si on propose une Progression Géométrique qui aille en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, le premier terme 2 est au second 4, comme la somme de tous les termes moins le dernier 256 est à la somme de tous les termes moins ce premier 2. Ainsi pour avoir la somme de tous les termes d'une Progression qui va en augmentant, comme de la précédente, il faut multiplier le dernier terme 256 par le second 4, retrancher du produit 1024 le quarré 4 du premier terme 2, & diviser le reste 1020 par 2 différence du second terme 4 au premier 2; le quotient 510 sera la somme de tous les termes de la Progression proposée.

V I I I.

Si l'on continue à l'infini une Progression Géométrique en décroissant, comme 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. la différence 4 des deux premiers termes 6, 2, est au premier 6, comme le même premier 6, est

à la somme de tous les termes infinis. C'est pour-
 quoi *pour trouver la somme de tous les termes infi-
 nis d'une Progression Géométrique qui décroît*,
 comme de la proposée, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. il
 faut diviser le carré 36 du premier terme 6, par
 la différence 4 des deux premiers 6, 2, & le quo-
 tient 9 sera la somme qu'on cherche, de laquelle
 ôtant 8 somme des deux premiers termes 6, 2,
 il restera 1 pour la somme de ces Fractions infinies
 continuellement proportionnelles $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. On
 connoîtra de la même façon, que la somme de
 toutes ces Fractions infinies continuellement propor-
 tionnelles, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. vaut aussi 1.

R E M A R Q U E.

Quand on parle de quantitez proportionnelles
 sans spécifier, cela s'entend toujours de la Pro-
 portion Géométrique. Nous dirons ici en passant,
 que si de l'unité, comme numérateur, & des nom-
 bres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme Dénom-
 inateurs, on fait cette suite de Fractions,
 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. qui vont toujours en dimi-
 nuant, ces Fractions étant prises consecutivement
 de trois en trois, comme l'on voudra, seront en
 proportion harmonique, c'est-à-dire, que la pre-
 miere de ces trois sera à la troisième, comme la
 différence des deux premières est à la différence
 des deux dernières. Ce que l'on connoîtra encore
 mieux en réduisant ces Fractions en même déno-
 mination, ou en entiers, comme on le voit ici
 pour les cinq Fractions $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, en les
 multipliant par le même nombre 60, qui est di-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 75

visible par tous les dénominateurs 2, 3, 4, 5; car à la place de ces cinq Fractions, on aura ces cinq nombres entiers 60, 30, 20, 15, 12, dont les trois premiers 60, 30, 20, sont en proportion harmonique. Car le premier 60 est au troisième 20, qui en est la troisième partie, comme la différence 30 des deux premiers est à la différence 10 des deux derniers, qui en est aussi la troisième partie. C'est par un semblable raisonnement que l'on connoitra que ces trois nombres 30, 20, 15, sont en proportion harmonique, aussi-bien que ces trois autres 20, 15, 12.

QUESTION I.

Un grand Navire en poursuit un plus petit, dont il est éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus viste que le plus petit: ils sont sur le même Rumb. On demande le chemin que le grand Navire doit faire pour atteindre le petit.

PArce que la distance des deux Navires est 4, & que leurs vîtesses sont en raison double, continuez à l'infini cette Progression Géométrique double 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. dont le premier & le plus grand terme soit 4: cherchez la somme de tous ces termes infinis, en divisant 16 quarré du premier 4 par la différence 2 des deux premiers 4, 2, vous aurez 8 pour cette somme, qui fera connoître que lorsque le grand Navire aura fait 8 lieues, il atteindra le petit.

QUESTION II.

On suppose qu' Achille aille dix fois plus vite qu'une Tortue, qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il est possible qu' Achille attrape cette Tortue, & à quelle distance il l'attrapera.

ON a fait cette Question, parce que Zenon, Chef des Philosophes appellez Stoïciens, prétendoit qu' Achille ne pourroit jamais attraper la Tortue. Car tandis qu' Achille, disoit ce Philosophe, feroit la premiere lieue, la Tortue feroit le dixième de la seconde lieue; & tandis qu' Achille feroit le dixième de la seconde lieue, la Tortue feroit le dixième de cette dixième, ou un centième; & ainsi à l'infini.

Ce Philosophe supposoit faussement que tous ces dixièmes composoient un espace infini; mais il est aisé de faire voir qu'ils font cette Progression Géométrique, $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \&c.$ dont les termes vont en diminuant à l'infini. On trouvera la somme de tous ces termes infinis en divisant 1 quarré du premier terme par 1. moins $\frac{1}{10}$, ou $\frac{9}{10}$, différence du premier & du second terme; le reste est $\frac{10}{9}$, ou $1 \frac{1}{9}$, Ce qui fait voir qu' Achille attrapera la Tortue, quand il aura parcouru la premiere lieue, & le neuvième de la seconde lieue.

QUESTION III.

Une Pendule a deux aiguilles, l'une des heures, & l'autre des minutes. Supposant qu'elles partent

toutes deux du point de midi , on demande en quel autre point elles doivent se rencontrer.

Puisque l'une des deux aiguilles va douze fois plus vîte que l'autre , & que quand celle des heures est au point d'une heure , celle des minutes est revenue au point de midi , celle-ci a un tour d'avance plus que celle-là. Leur mouvement formera donc cette Progression Géométrique $1. \frac{1}{12} . \frac{1}{144} . \&c.$ qui décroît à l'infini : par conséquent si l'on divise le quarré du premier terme $1.$ par la différence du premier au second $\frac{1}{12}.$ on connoîtra que ces deux aiguilles se rencontreront à $1 \frac{1}{11}.$ c'est-à-dire , à une heure & un onzième d'heure.

D'où il est aisé de conclure que ces aiguilles se rencontreront à ces heures-ci , $1. \frac{1}{11} . 2 \frac{2}{11} . 3 \frac{3}{11} . 4 \frac{4}{11} . 5 \frac{5}{11} . 6 \frac{6}{11} . 7 \frac{7}{11} . 8 \frac{8}{11} . 9 \frac{9}{11} . 10 \frac{10}{11} . 11 \frac{11}{11} .$ ou 12 heures.

R E M A R Q U E .

On voit bien que ces trois premières Questions se résolvent par l'article VIII. précédent.

Q U E S T I O N I V .

Un Maquignon vend un tres-beau cheval , il se contente du prix du vingt-quatrième clou du cheval , pourvu qu'on veuille compter de manière que du premier clou on donnât 1 denier , du second 2 deniers , du troisième 4 deniers , & ainsi de suite , en doublant les deniers jusqu'au vingt-qua-

78 RECREAT. MATH. ET PHYS.
trième clou. On demande de quel prix seroit le cheval.

Puisque le prix des clous forme cette Progression 1. 2. 4. 8. 16. &c. qui va en augmentant, il faut prendre la vingt-troisième puissance de 2 exposant de la Progression, ce sera 8388608 deniers, ou trente-quatre mille neuf cens cinquante-deux livres dix sols huit deniers, pour le prix du cheval.

R E M A R Q U E.

La solution de cette Question dépend du sixième article ; on n'a point multiplié la vingt-troisième puissance de 2 par le premier terme, qui est ici l'unité, parce qu'elle ne change rien dans la multiplication. C'est une chose à remarquer dans les Progressions qui commencent par l'unité.

Q U E S T I O N V.

Une vieille Dame possède trente-deux belles Terres ; elle est fort avare, elle aime l'argent encore plus que ses Terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaisir de marcher sur l'or ; mais pour ne point effrayer un de ses héritiers, qui est homme de cœur, elle ne propose d'abord que la moindre à vendre, sous prétexte que l'argent est rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ses coffres soient pleins. On offre de lui donner pour cette Terre la somme qui conviendroit à la trente-deuxième de ses Terres, si on payoit 1 sol pour la première, 2 sols pour la seconde, 4 sols pour la troisième, & ainsi de suite en doublant les sols jusqu'à la trente-deuxième Terre.

Cette Dame appréhende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de sa Terre.

ON peut aisément la rassûrer, elle trouvera son compte à vendre sa Terre à la condition qui lui a été offerte. L'Acheteur seroit obligé de lui donner 107 millions 374 mille 182 livres huit sols.

R E M A R Q U E.

On peut s'exercer à trouver ce nombre en cherchant la trente-unième puissance de 2 exposant de la Progression, suivant l'article VI. & ce qui a été dit dans la Remarque de la Question précédente.

Q U E S T I O N V I.

On suppose qu'un grain de Bled produise 50 autres grains dans la première année; qu'on sème ces 50 grains, & qu'ils produisent chacun 50 grains la deuxième année, & ainsi de suite. On demande quel sera le nombre des grains de Bled qui seront produits pendant douze ans.

CE nombre des grains de Bled produits pendant douze ans est très-considérable. Il faut d'abord trouver le douzième terme de cette Progression Géométrique 1. 50. 2500. 125000. &c. qui va en augmentant. Ce douzième terme contient ces chiffres 48, 828, 125, accompagnez de onze zéros, & pour trouver la somme demandée, il faudroit, suivant l'article VII. multiplier encore ce douzième terme par le second 50: ôter 1 quarré du premier terme de ce produit, & diviser le reste par 49, différence du second terme au pre-

30 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.
mier. On conçoit qu'il viendrait un nombre très-
grand.

R E M A R Q U E.

Cette Question est embarrassante dans le calcul ; à cause de la grande raison qui est entre les termes : mais on pourra appliquer ici la quatrième Question , & demander quel seroit le prix des vingt-quatre clous d'un cheval , en payant le premier 1 denier , le second 2 deniers , le troisième 4 deniers , &c. On trouvera que ce prix seroit de 16 , 777 , 215 deniers , ou de 69 , 905 livres 1 sol 3 deniers.

La Question cinquième trouveroit ici sa place ; si l'on vouloit chercher qu'elle seroit la somme qu'il faudroit payer pour les trente-deux Terres aux conditions qui ont été offertes.

Q U E S T I O N V I I.

JE renfermerai dans cette Question plusieurs autres , que je ne ferai que proposer. On cherchera quel peut avoir été le nombre des hommes deux cens ans après Adam , en supposant qu'ils aient tous vécu , & que cette famille fût seulement augmentée de quatre personnes la première dixaine d'années , de huit la seconde dixaine , de seize la troisième dixaine , & ainsi de suite de dix ans en dix ans , suivant la Progression double , qui est 2. 4. 8. 16. &c. le nombre des termes de cette Progression est 20 , dont il faut trouver le dernier par l'article VI. & la somme de tous ces termes par l'article VII. On jugera de cette somme par le dernier terme , qui est d'un million 48 mille 576 personnes.

a. On

2. On examinera de combien la famille de Jacob qui entra en Egypte avec 70 personnes put être augmentée 200 ans après son arrivée, en supposant seulement que dans les vingt premières années elle ait été augmentée de trois fois autant, c'est-à-dire, qu'au bout de 20 ans il y ait eu 210 personnes, & ainsi de suite : ce qui est très-croyable. On trouvera qu'à la fin des vingt dernières années elle a pu être composée d'un million 177 mille 810 personnes, *art. VI.*

3. Qui croira que les revenus du Grand Seigneur ne seroient pas capables de nourrir pendant douze ans la race d'une Truie, qui auroit porté d'une ventrée 6 petits cochons, dont deux seroient mâles & les quatre autres femelles. C'est cependant une chose très-véritable, en supposant même que les quatre femelles ne portent chacune la première année que six petits cochons, dont 4 seront encore femelles & 2 mâles, & que chaque femelle en porte autant les années suivantes pendant douze ans. Cela supposé, on connoîtra que le nombre de tous les cochons pendant ce temps montera à 33 millions 554 mille 230. Supposant à présent qu'il ne faille qu'un écu par an pour chaque cochon, on jugera si le Grand Seigneur est assez puissant pour nourrir la race d'une seule Truie pendant douze ans.

R E M A R Q U E.

Il y a une attention à faire sur le calcul de cette somme. Il faut partager le nombre 6 des premiers petits cochons en deux termes, dont l'un, qui est 2, sera le premier terme de la Progression des mâles; & l'autre, qui est 4, sera le premier terme

82 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.
de la Progression des femelles. Ainsi il sera aisé de connoître que la première Progression est 2, 8, 32, 128, &c. & que la seconde est 4, 16, 64, 256, &c. On ajoutera les sommes des 12 termes de ces deux Progressions, & l'on aura le nombre des petits cochons, tant mâles que femelles.

4. On se convaincra que le monde entier ne pourra contenir toute la semence qui seroit produite d'un seul grain de moutarde pendant vingt-cinq ans, si on suppose qu'un grain de moutarde en produise mille chaque année.

5. On sera étonné du nombre prodigieux des poissons, si la plus grande partie de leurs œufs étoient féconds : il n'y auroit qu'à supputer combien il viendroit de carpes d'une seule carpe pendant quelques années, & porter un jugement semblable pour tous les autres poissons.

6. Ce n'est point les animaux les plus féconds qui peuvent nous jeter dans l'étonnement : la fécondité des brebis même qui ne portent qu'une fois par an, pourroit étonner leurs maîtres, si on avoit soin de conserver tous les agneaux qui naissent pendant quelques années.

On peut connoître, suivant ce qu'on a dit dans les articles précédens, en faisant quelques suppositions que tous les agneaux d'un grand troupeau de brebis peuvent se monter à plus de 25500 pendant l'espace de huit ans.

PROBLEME XII.

Des Quarrez Magiques.

ON appelle *Quarré Magique* un Quarré divisé en plusieurs autres petits Quarrez égaux,

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 83
 ou cases remplies de termes d'une Progression qui
 y sont tellement disposez, que tous ceux d'une
 même bande, ou d'un même rang, tant en long
 qu'en large & en diagonale ajoûtez ensemble, font
 une même somme, ou multipliez donnent un mê-
 me produit.

Il suit de la définition qu'on vient de lire, qu'il
 y a deux espèces de Quarrez Magiques, les uns
 sont formez par les termes d'une Progression
 Arithmétique, les autres sont formez par les ter-
 mes d'une Progression Géométrique.

Ces Quarrez sont pairs ou impairs; les Quarrez
 impairs sont ceux qui contiennent un nombre im-
 pair de cases, & les pairs sont ceux qui tiennent
 un nombre pair de cases.

*Des Quarrez Magiques impairs, formez par des
 termes en Progression Arithmétique.*

LE Quarré Magique suivant est un Quarré im-
 pair; il est divisé en 25 petites cases égales,
 ou les 25 premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4,
 &c. sont tellement disposez, que la somme de cha-

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 |
| 4 | 12 | 25 | 8 | 16 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 |
| 10 | 18 | 1 | 14 | 22 |
| 23 | 6 | 19 | 2 | 15 |

que rang, soit de
 haut en bas, soit de
 droit à gauche, soit
 en diagonale, est par
 tout 65.

Dans tout Quarré
impair, la somme des
 nombres de chaque
 rang ou de chaque
 diagonale, est égale

au produit de la racine du quarré impair & du
 terme moyen de la Progression Arithmétique.

84 RECREAT. MATH. ET PHYS.

La somme 65 des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale de ce quarré impair 25, est égale au produit de 5 sa racine, & de 13 terme moyen de la Progression Arithmétique 1, 2, 3, 4, &c. ce terme moyen se trouve dans la case du milieu du quarré, qui contient les nombres naturels, comme on le peut voir dans le Quarré suivant.

Cette somme 65 se trouve aussi en disposant les termes donnez de la Progression Arithmétique,

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

selon leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. dans quelques rangs de cases de ce quarré, qui sont les deux rangs du milieu qui traversent le quarré de haut en bas, & de gauche à droite, & chaque rang

diagonal, c'est-à-dire, qui va d'un angle du quarré à l'autre angle. La même chose arrivera aux quarrés pairs qui sont des quarrés qui contiennent un nombre quarré pair de cases.

Pour disposer magiquement dans les cases d'un

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 |
| 4 | 12 | 25 | 8 | 16 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 |
| 10 | 18 | 1 | 14 | 22 |
| 23 | 6 | 19 | 2 | 15 |

quarré impair, par exemple, de celui-ci, dont le côté est 5, ou qui a 25 cases, autant de nombres donnez en Progression Arithmétique, comme 1, 2, 3, 4, 5, & ainsi de suite jusqu'au

dernier & plus grand 25, écrivez le premier &

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 85

plus petit 1 dans la case qui répond immédiatement sous celle du milieu, où est le centre du quarré, & suivant la diagonale vers la droite, écrivez le second terme 2 dans la case voisine & plus basse de la bande qui suit vers la droite. Continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez rempli la plus basse case, comme il arrive ici au second terme 2.

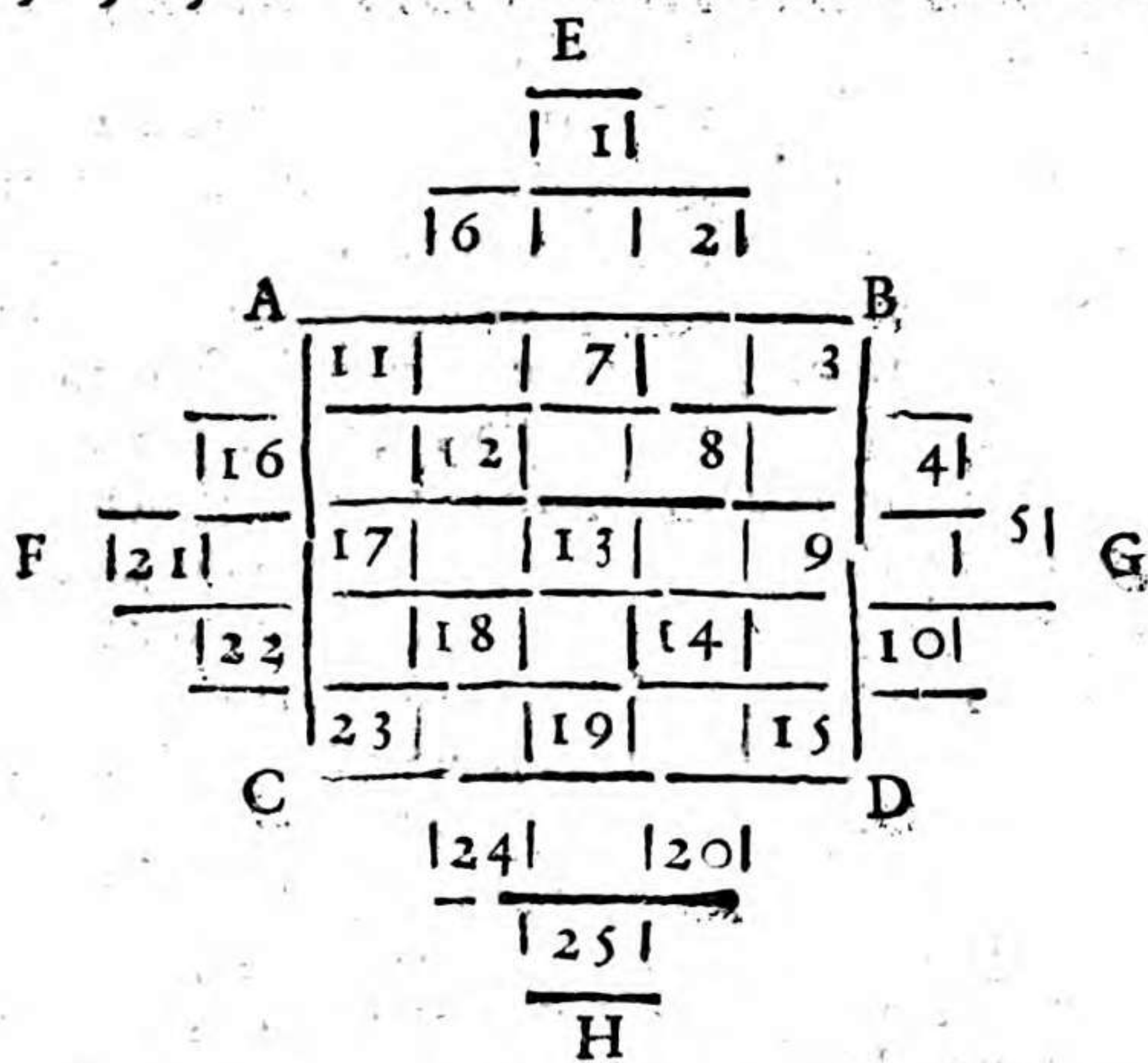
Après cela, parce qu'en continuant selon la diagonale de la gauche vers la droite, le terme suivant 3 se rencontre en dehors, on le placera à la case opposée de la bande où il se rencontrera. Et parce qu'en continuant selon la diagonale vers la droite, le terme suivant 4 se trouve aussi en dehors, on le placera dans la case opposée du rang où il se rencontre en dehors. Après quoi on continuera à placer les termes suivans toujours en descendant selon la diagonale vers la droite. Mais parce que le terme 6 tombe dans une case qui est remplie, sçavoir, dans celle où il y a 1, on rétrogradera selon la diagonale de la droite vers la gauche, & l'on écrira ce terme 6 dans la seconde case du rang, où le terme précédent 5 se rencontre; en sorte qu'entre ces deux termes il reste une case vuide; ce qu'il faut toujours pratiquer, lorsqu'une case se trouvera remplie.

Enfin on continuera selon ces règles à placer les autres termes dans les cases vuides, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'angle du quarré, où dans cet exemple le terme 15 se rencontre. Alors comme on ne peut plus se conduire selon la diagonale en descendant vers la droite, pour placer le terme suivant 16, on le placera dans la seconde case d'en haut du même rang. Après quoi les autres termes se placeront dans les autres cases vuides

86 RECREAT. MATH. ET PHYS.

comme les précédens , sans qu'il puisse arriver quelque nouvelle difficulté.

Il sera aisé d'exécuter la disposition de ce quarré & des autres de la même espèce , si on suit cette méthode. Après avoir fait un quarré impair comme celui-ci , A B C D de 25 cases , élevez de chaque côté , en continuant les cases , excepté celles qui sont aux coins , A , B , C , D , d'autres lignes hors de ce quarré , telles que vous les voyez ici représentées. Ces cases hors du quarré iront en diminuant ; en sorte qu'il s'en trouvera une qui sera la plus éloignée de chaque côté , telles que sont E , F , G , H. Vous choisirez celle d'en haut E ,



pour placer l'unité ; ensuite en tirant vers la droite B D , & suivant la diagonale , vous placerez dans une seconde case le nombre 2 , puis en suivant toujours la même diagonale , vous placerez les nombres 3 , 4 , 5 dans les cases du quarré &

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 87

hors du quarré , jusqu'à ce que vous soyez parvenu à la case unique G , la plus éloignée hors du quarré , du côté B D , qui est à droite. Après cela vous retournerez à la seconde case hors du quarré à côté de 1 vers la gauche , où vous marquerez 6 , puis en suivant toujours la diagonale , & tirant à droite vers B D , vous écrirez les chiffres 6 , 7 , 8 , 9 & 10 , qui est placé dans une dernière case hors du quarré ; alors vous reviendrez à la case gauche A , la plus proche de celle qui contient 6 ; vous y écrirez 11 , & les autres nombres 12 , 13 , 14 , 15 dans les cases suivantes , en suivant la diagonale , & tirant à droite vers B D. Vous ferez pour le reste des nombres du quarré impair la même chose qu'on vient de faire , jusqu'à ce que vous soyez arrivé au nombre quarré impair , qui est ici 25 , & qui se trouvera dans la dernière case d'en bas H hors du quarré.

Si à présent vous placez les nombres des cases

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|---|
| | | E | | | | | |
| | | 1 | | | | | |
| | | 6 | | 2 | | | |
| | A | | | | | B | |
| | | 1 | 7 | 3 | | | |
| | 16 | M | 12 | 8 | | 4 | |
| F | 21 | 17 | N | 13 | O | 9 | G |
| | 22 | P | 18 | I | 14 | 10 | |
| | | 23 | L | 19 | K | 15 | D |
| | | 24 | | 20 | | | |
| | | 25 | | | | | |
| | | H | | | | | |

hors du quarré dans les cases du quarré vuides

E iiij

& opposées des mêmes rangs où ils se trouvent ;
comme 1 dans I , 2 dans K , 6 dans L , 4 dans M ,
5 dans N , 21 dans O , & ainsi des autres , vous
aurez la disposition du quarré magique impair de

Pages 83. 25 , telle qu'elle est rapportée ci-dessus.
& 84.

Vous auriez une autre disposition des nombres dans les cases , si en commençant par la case unique hors du quarré d'en haut , au lieu de placer les nombres en tirant vers la droite , vous les placiez en tirant vers la gauche , mettant 2 dans la case où se trouve 6 , mettant 13 dans celle qui est occupée par 11 , &c.

Observez généralement que les nombres des cases uniques hors du quarré , comme E , F , G , H , se doivent trouver dans les cases vuides les plus proches , mais au-de-là de celle qui est au centre : comme on le voit dans le quarré précédent , où 1 qui est dans E , se trouve dans M ; 21 qui est dans F , se trouve dans O ; 5 qui est dans G , se trouve dans N , &c. Ce que l'on peut encore remarquer plus exactement dans le quarré suivant , qui est celui de 49 , où 1 qui est dans E case hors du quarré , se trouve près , mais au-de-là de 25 , qui est au centre du quarré , & où le nombre 9 qui est au dessous de l'unité dans une case hors du quarré , se trouve plus loin & au-de-là de 25 dans une case du quarré. On doit faire la même remarque à l'égard des autres nombres qui se trouvent dans les cases hors du quarré.

E

| | | |
|-------------|-------------------------|----------|
| | 1 1 | |
| | 18 2 | |
| | 15 9 3 | |
| | 22 16 10 4 | |
| 129 | 23 17 11 | 5 |
| 136 | 30 24 18 12 | 6 |
| 143 137 | 31 25 19 | 13 7 |
| 144 | 38 32 26 20 | 14 |
| 145 | 39 33 27 | 21 |
| | 46 40 34 28 | |
| | 47 41 35 | |
| | 48 42 | |
| | 49 | |

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 22 | 47 | 16 | 41 | 10 | 35 | 4 |
| 5 | 23 | 48 | 17 | 42 | 11 | 29 |
| 30 | 6 | 24 | 49 | 18 | 36 | 12 |
| 13 | 31 | 7 | 25 | 43 | 19 | 37 |
| 38 | 14 | 32 | 1 | 26 | 44 | 20 |
| 21 | 39 | 8 | 33 | 2 | 27 | 45 |
| 46 | 15 | 40 | 9 | 34 | 3 | 28 |

La disposition seroit encore différente ; si on commençoit à mettre l'unité dans quelque autre case unique hors du quarré , & qu'on continuât à

écrire les autres nombres dans l'ordre qu'on a indiqué : les nombres du quarré impair se trouveroient dans d'autres cases , & donneroient par conséquent plusieurs dispositions différentes du quarré impair.

Ce ne sont point-là les seuls variétez qu'on peut trouver dans le Quarré Magique impair. Il n'est pas nécessaire de commencer par l'unité , on peut encore commencer par tel nombre qu'on voudra choisir , comme par 7 , & poursuivre les nombres jusqu'à ce qu'il y en ait assez pour remplir les cases du quarré.

Ce qui donneroit cet autre Quarré Magique.

| | | | | |
|------|------|------|------|------|
| | 71 | | | |
| | 121 | | 181 | |
| 122 | 171 | 1131 | 19 | 101 |
| 1271 | 1181 | 1141 | 115 | 1111 |
| 128 | 1241 | 1201 | 161 | |
| | 291 | 1251 | 121 | |
| | 1301 | | 1261 | |
| | 1311 | | | |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 17 | 30 | 13 | 26 | 9 |
| 10 | 18 | 31 | 14 | 22 |
| 23 | 11 | 19 | 27 | 15 |
| 16 | 24 | 7 | 20 | 28 |
| 29 | 12 | 25 | 8 | 21 |

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 91

Non seulement on peut se servir des nombres pris selon leur suite naturelle, tels qu'ils soient, pourvû qu'ils puissent remplir un quarré de cases impaires, on peut encore en prendre d'autres, mais il faut qu'ils soient dans une Progression Arithmétique, comme celle-ci qui commence par 13. 17. 21. &c. dont la différence est 4, & qui donne ce quarré impair. Car en quelque sens qu'on prenne les bandes & les diagonales, la somme de chacune sera 305.

| | | | | |
|-----|-----|-----|----|----|
| 53 | 105 | 37 | 89 | 21 |
| 25 | 57 | 109 | 41 | 73 |
| 77 | 29 | 61 | 93 | 45 |
| 49 | 81 | 13 | 65 | 97 |
| 101 | 33 | 85 | 17 | 69 |

Les termes du Quarré Magique de 49, peuvent avoir d'autres dispositions magiques, telles que sont les suivantes : nous les avons trouvé par une autre manière, qui n'étant pas si aisée que la précédente, ne sera pas ici expliquée, parce qu'elle est trop difficile pour être inserée dans les Récréations Mathématiques.

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 3 | 10 | 25 | 16 | 11 |
| 20 | 8 | 19 | 12 | 6 |
| 5 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| 22 | 14 | 7 | 18 | 4 |
| 15 | 24 | 1 | 2 | 23 |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 12 | 25 | 6 | 19 | 3 |
| 5 | 11 | 24 | 8 | 17 |
| 16 | 4 | 13 | 22 | 10 |
| 9 | 18 | 2 | 15 | 21 |
| 23 | 7 | 20 | 1 | 14 |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1 | 20 | 23 | 16 | 5 |
| 4 | 18 | 9 | 12 | 22 |
| 15 | 7 | 13 | 19 | 11 |
| 24 | 14 | 17 | 8 | 2 |
| 21 | 6 | 3 | 10 | 25 |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 24 | 17 | 10 | 3 |
| 4 | 12 | 25 | 18 | 6 |
| 7 | 5 | 13 | 21 | 19 |
| 20 | 8 | 1 | 14 | 22 |
| 23 | 16 | 9 | 2 | 15 |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 22 | 9 | 20 | 3 |
| 2 | 14 | 25 | 8 | 16 |
| 19 | 5 | 13 | 21 | 7 |
| 10 | 18 | 1 | 12 | 24 |
| 23 | 6 | 17 | 4 | 15 |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

REMARQUES.

CE Carré a été appelé *Magique*, parce qu'il étoit en grande vénération parmi les Egyptiens, & les Pythagoriciens leurs Disciples, qui pour donner plus d'efficace & de vertu à ce carré, le dédient aux sept Planettes en différentes manières, & le gravoient sur une lame du métal qui simpatifioit avec la Planete, à laquelle il étoit dédié. Ils l'enfermoient dans un polygone régulier inscrit dans un cercle divisé en autant de parties égales que le côté du carré avoit d'unités, avec les noms des Anges de la Planete, & des Signes du Zodiaque, qu'ils écrivoient dans les espaces vuides entre le polygone & la circonférence du cercle circonscrit; croyant par une vaine supersti-

tion qu'une telle médaille, ou talisman, étoit favorable à celui qui la portoit sur soi en temps & lieu.

Ils attribuoient à Saturne le quarré de 9 cases, qui a 3 pour racine, & 15 pour la somme des nombres de chaque bande. A Jupiter le quarré de 16 cases, qui a 4 pour côté, & 34 pour la somme des nombres de chaque bande. A Mars le quarré de 25 cases, qui a 5 pour côté, & 65 pour la somme des nombres de chaque bande. Au Soleil le quarré de 36 cases, qui a 6 pour côté, & 111 pour la somme des nombres de chaque bande. A Venus le quarré de 49 cases, qui a 7 pour côté, & 175 pour la somme des nombres de chaque bande. A Mercure le quarré de 64 cases, qui a 8 pour côté, & 260 pour la somme des nombres de chaque bande. A la Lune le quarré de 81 cases, qui a 9 pour côté, & 369 pour la somme des nombres de chaque bande.

Enfin ils attribuoient à la matière imparfaite le quarré de 4 cases, qui a 2 pour côté, & à Dieu le quarré d'une seule case, qui a pour côté l'unité, qui étant multipliée par elle-même, ne change pas. Par le moyen de ce Problème, nous résoudrons cette

QUESTION.

Disposer en trois rangs les neuf premières Cartes ; depuis l'As jusqu'au Neuf, de sorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, fassent ensemble une même somme.

ON disposera magiquement les neuf premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

94 RECREAT .MATHEM. ET PHYS.

comme vous voyez ici, par la Méthode que nous avons enseignée. Alors on connoîtra

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

que les Cartes marquées des mêmes points que sont les chiffres de chaque case, doivent être rangées de la même façon, afin que la somme de tous les points de cha-

que rang soit par tout le même, sçavoir, 15.

Voici de quelle manière on disposera ces cartes, pour les ranger comme elles le sont dans le quarré magique précédent.

| | | | |
|---|---|--|---|
| | 1 | | |
| 4 | | | 2 |
| | 5 | | |
| 8 | | | 6 |
| | 9 | | |

Au lieu de prendre les neuf premières cartes, on en pourroit prendre neuf autres, pourvû qu'elles fussent de suite, comme celles-ci, 2, 3, 4, 5,

6, 7, 8, 9, 10 : alors elles auroient cette disposition, & la somme de chaque bande ou diagonale, seroit 18. On peut encore laisser le 2, & prendre le Valet, en le faisant valoir 11, &c.

| | | | |
|---|----|--|---|
| | 2 | | |
| 5 | | | 3 |
| | 6 | | |
| 9 | | | 7 |
| | 10 | | |

| | | |
|---|----|---|
| 5 | 10 | 3 |
| 4 | 6 | 8 |
| 9 | 2 | 7 |

Des Quarrez Magiques pairs formez par des termes en Progression Arithmétique.

LA Règle qu'on vient d'enseigner, est générale pour disposer facilement toutes sortes de quarrés impairs. Il n'en est pas de même pour les

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 95

quarrés pairs. Ceux-ci ont des règles particulières, quoique fondées sur une démonstration générale. Le quarré 4 ne peut être disposé magiquement : le quarré de 16 est celui de tous les quarrés pairs qui le peut être plus aisément. C'est même par lui qu'on doit commencer, quand on veut disposer magiquement un plus grand quarré pair. Voici ce qu'il faut faire.

Ayant fait un quarré A B C D, on remplira d'abord les diagonales A D, B C. Pour y réussir,

| | | | | | |
|---|----|----|----|--|----|
| A | | | | | B |
| | 1 | | | | 4 |
| E | | 6 | 7 | | |
| G | | 10 | 11 | | |
| C | 13 | | | | 16 |
| | | | | | D |

on commencera par compter les nombres suivant leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. sur les cases de la première bande A B de gauche à droite, & on ne marquera que 1 & 4 dans les cases A & B, qui appartiennent aux diagonales :

on comptera ensuite les autres nombres 5, 6, 7, 8, sur les cases de la seconde bande E F de gauche à droite, & l'on ne marquera que 6 & 7 dans les cases qui appartiennent aux diagonales : puis on comptera 9, 10, 11, 12 sur les cases de la troisième bande G H de gauche à droite, & l'on ne marquera que 10 & 11 dans les cases qui appartiennent aux diagonales. Enfin on comptera 13, 14, 15, 16 sur les cases de la quatrième bande C D de gauche à droite, & l'on ne marquera que les nombres 13 & 16 dans les cases C & D, qui appartiennent aux diagonales.

Ces diagonales étant ainsi remplies, on remplira les cases vuides : on commencera par compter les nombres suivant leur ordre naturel 1, 2, 3, 4, sur les cases de la bande D C, en commen-

çant par la case D, & allant ici de droite à gauche, & l'on écrira le 2 & le 3 dans les cases

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|---|
| A | 1 | 15 | 14 | 4 | B |
| E | 12 | 6 | 7 | 9 | F |
| G | 8 | 10 | 11 | 5 | H |
| C | 13 | 3 | 2 | 16 | D |

vuides : on continuera de même par les bandes HG, FE & BA, en allant toujours de droite à gauche. Le carré sera rempli de manière que la somme de chaque bande & de chaque dia-

gonale sera 34, en quelque sens qu'on les prenne.

On voit bien que pour donner quelque variété à ce carré pair, on pourroit commencer à compter par la case B, & aller de droite à gauche pour remplir les diagonales, & puis commencer à compter à la seconde reprise par la case C, & aller de gauche à droite pour remplir les cases vuides. En un mot, on peut commencer par telle case de la diagonale qu'on voudra, & aller de droite à gauche, ou de gauche à droite, de haut en bas, ou de bas en haut; mais quand on a commencé à compter d'une façon pour remplir les diagonales, il faut aller d'un sens opposé & contraire pour remplir les cases du milieu. Au reste, ce ne sont pas-là les seules variétés dont est susceptible le carré de 16, on sera peut-être étonné d'entendre dire, qu'il peut recevoir 880 dispositions différentes. Nous avons donné la manière la plus aisée.

Il n'est point nécessaire que les nombres du

| | | | |
|----|----|----|----|
| 11 | 25 | 24 | 14 |
| 22 | 16 | 17 | 19 |
| 18 | 20 | 21 | 15 |
| 23 | 13 | 12 | 26 |

carré pair commencent par l'unité, on peut prendre 16 nombres de suite, comme 11, 12, 13, 14, &c. que l'on disposera magiquement par la méthode qu'on vient d'enseigner.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 97

Ce quarré de 16 est le fondement du quarré de 36. Car quand on a formé ce quarré de 16, dont on a pris les termes qui sont le plus au milieu de 36, on forme une enceinte à l'entour, dans laquelle on dispose les dix premiers nombres, & les dix derniers de 36; de telle sorte que les deux qui correspondent dans le même rang, ou dans la même diagonale, fassent la somme de 37. Ce que l'on peut examiner dans ce quarré de 36, où la somme de chaque bande & de chaque diagonale est IIII.

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 35 | 34 | 30 | 5 | 6 |
| 33 | 11 | 25 | 24 | 14 | 4 |
| 8 | 22 | 16 | 17 | 19 | 29 |
| 28 | 18 | 20 | 21 | 15 | 9 |
| 10 | 23 | 13 | 12 | 26 | 27 |
| 31 | 2 | 3 | 7 | 32 | 36 |

Pour avoir les 16 nombres qui sont le plus au milieu de 36, il faut ôter 16 de 36, & diviser le reste 20 par 2, le quotient 10 marque qu'il faut rejeter les premiers & les derniers 10 de 36; ainsi les 16 nombres commenceront à 11, & finiront à 26.

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'avertir; qu'au lieu des nombres, dont la suite est naturelle, on peut choisir d'autres nombres qui soient dans une Progression Arithmétique. C'est une remarque qui a été faite pour les quarrés impairs, & qui convient aussi aux quarrés pairs.



On a mis ici le quarré de 64, qui a été fait à peu près de la même manière que le quarré de 36; la somme de chaque rang & de chaque diagonale du quarré de 64, est 260.

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 63 | 62 | 4 | 6 | 56 | 60 | 8 |
| 58 | 15 | 49 | 48 | 44 | 19 | 20 | 7 |
| 54 | 47 | 25 | 39 | 38 | 28 | 18 | 11 |
| 53 | 22 | 36 | 30 | 31 | 33 | 43 | 12 |
| 13 | 42 | 32 | 34 | 35 | 29 | 23 | 52 |
| 10 | 24 | 37 | 27 | 26 | 40 | 41 | 55 |
| 14 | 45 | 16 | 17 | 21 | 46 | 50 | 51 |
| 57 | 2 | 3 | 61 | 59 | 9 | 5 | 64 |

Des quarrés Magiques pairs, formez par des termes en Progression Géométrique.

AU lieu de la Progression Arithmétique, on peut prendre une Progression Géométrique, par exemple, cette Progression double, 1, 2, 4,

| | | |
|-----|-----|----|
| 8 | 256 | 2 |
| 4 | 16 | 64 |
| 128 | 1 | 32 |

8, 16, 32, 64, 128, 256, & alors il arrivera que neuf termes étant disposés magiquement, le produit qui viendra en multipliant ensemble ceux qui sont dans cha-

que rang, & dans chaque diagonale, sera 4096, qui est le cube du terme moyen 16.

Il n'y a point de règle pour les quarrés en Progression Géométrique, différente de celle que l'on

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 99
 a enseigné pour les quarez en Progression Arith-

| | | | |
|----|-----|----|----|
| | 1 | | |
| | 8 | | 2 |
| | — | — | — |
| 64 | | 16 | |
| | — | — | — |
| | 128 | | 32 |
| | 256 | | |

Ainsi on con-
 noitra aisément que le
 quarré précédent est for-
 mé selon ce qui a été dit
 touchant les quarez
 impairs, dont les ter-
 mes sont en Progression
 Arithmétique. Il suffi-
 ra d'en donner la figu-
 re, sans répéter le dis-
 cours.

On peut encore former ce quarré impair, dont
 les termes seront les mêmes que ceux de cette Pro-
 gression Géométrique 3, 9, 27, 81, 243, 729,
 2187, 6561, 19683, en suivant les mêmes règles.

| | | | |
|------|-------|-----|-----|
| | 3 | | |
| | 81 | | 9 |
| | — | — | — |
| 2187 | | 343 | 27 |
| | — | — | — |
| | 6561 | | 729 |
| | 19683 | | |

| | | |
|------|-------|------|
| 81 | 19683 | 9 |
| — | — | — |
| 27 | 343 | 2187 |
| — | — | — |
| 6561 | 3 | 729 |

Le produit des nombres de l'un des rangs , est 14348907 : il est égal au produit des nombres qui sont contenus dans chacun des autres rangs , ou dans chacune des diagonales. On conçoit que ces sortes de Quarrez Magiques peuvent recevoir toutes les variétez dont nous avons parlé dans le Quarré Magique de la Progression Arithmétique. Car on peut commencer par tel terme qu'il plaira de la Progression , comme par 1243 , & continuer jusqu'à ce qu'il y ait assez de termes pour remplir les cases du quarré.

Voici un quarré impair , dont les termes commencent par 729.

| | | |
|---------|---------|--------|
| 19683 | 4782969 | 2187 |
| 6561 | 59049 | 531441 |
| 1594323 | 729 | 177147 |

Des quarrez Magiques pairs , dont les termes sont en Progression Géométrique.

IL n'y a rien à dire de particulier sur cette sorte de quarré , on se contentera de représenter un quarré pair de 16 cases ; il sera aisé d'y appliquer toutes les règles & les observations qu'on a fait sur ceux dont les termes sont en Progression Arithmétique. Ce quarré contient les 16 premiers termes de la Progression double 1 , 2 , 4 , 8 , &c. Le produit de chaque rang ou de chaque diagonale en quelque sens qu'on les prenne , est

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 101
 1073741824 , quarré de 32768. Ce quarré peut
 recevoir 880 dispositions différentes , & donner
 le même produit. C'est une chose très-digne de
 remarque.

| | | | |
|------|-----|------|-------|
| 1 | | | 8 |
| | 32 | 64 | |
| | 512 | 1024 | |
| 4096 | | | 32768 |

| | | | |
|------|-------|------|-------|
| 1 | 16384 | 8192 | 8 |
| 2048 | 32 | 64 | 256 |
| 128 | 512 | 1024 | 16 |
| 4096 | 4 | 2 | 32768 |

Des Quarrez Magiques en proportion harmonique.

Nous ajouterons ici cet autre quarré de neuf
 cases , dont les nombres de chaque rang , de
 quelque manière qu'on les
 prenne , c'est-à-dire , en
 long , en travers , ou en
 diagonale , sont en pro-
 portion harmonique. On
 peut trouver autant d'au-
 tres nombres qu'on vou-
 dra , qui auront la même
 propriété , si au lieu des
 nombres précédens on met

| | | |
|------|-----|-----|
| 1260 | 840 | 630 |
| 504 | 420 | 360 |
| 315 | 280 | 252 |

des lettres , comme vous voyez dans la Table sui-

vante, où les grandeurs litterales de chaque rang sont harmoniquement proportionnelles. C'est pourquoi en donnant aux trois lettres indéterminées a, b, c , des valeurs différentes, on aura en la place de ces quantitez litterales des nombres qui conserveront dans chaque rang la proportion harmonique.

| | | |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|
| a | $\frac{2ac}{a+c}$ | $e.$ |
| $\frac{2ab}{a+b}$ | $\frac{2bc}{b+c}$ | $\frac{2abc}{2ab+ac-bc}$ |
| $b.$ | $\frac{2abc}{2ac+ab-bc}$ | $\frac{abc}{ab+ac-bc}$ |

A V E R T I S S E M E N T.

Ceux qui voudront être instruits plus à fond des quarrez magiques, pourront consulter la Géométrie de M. Arnaud, les Elemens du P. Prestet, & principalement ce qui en a été dit dans les Ouvrages de Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, imprimez en 1693.

PROBLEME XIII.

Du Triangle Arithmétique.

ON appelle *Triangle Arithmétique* la moitié Planche 1
1. Fig. d'un quarré divisé en plusieurs petits quarrés égaux, qui contiennent les unitez, les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c. qu'on a par l'addition continuelle des nombres précédens : les nombres pyramidaux 1, 4, 10, 20, &c. que donne l'addition continuelle des nombres triangulaires : les nombres pyramido-pyramidaux 1, 5, 15, 35, &c. qui viennent par l'addition continuelle des nombres pyramidaux, & ainsi de suite, comme vous voyez dans la Figure, qu'il suffit de regarder pour la comprendre.

On appellera diagonale, ou base du Triangle Arithmétique, les quarrés qui sont traversez par une ligne ponctuée.

Entre les différens usages du Triangle Arithmétique, je ne parlerai que de ceux qui servent aux combinaisons, aux permutations & aux partis du Jeu, parce que les autres sont trop spéculatifs pour des Récréations Mathématiques.

Des Combinaisons.

NOUS entendons ici par *Combinaisons*, tous les différens choix qu'on peut faire de plusieurs choses, dont le nombre est connu, en les prenant en diverses manières, une à une, deux à deux, trois à trois, &c. sans changer l'ordre.

I.

Si l'on propose quatre choses différentes, exprimées par ces quatre lettres a, b, c, d , toutes les diverses manières d'en prendre, par exemple, deux différentes, sçavoir, ab, ac, ad, bc, cd , ou trois différentes, sçavoir, abc, abd, acd, bcd , s'appellent *Combinaisons*. D'où il est aisé de voir, que quatre choses proposées peuvent être prises une à une en quatre façons, deux à deux en six façons, trois à trois en quatre façons, & quatre à quatre en une manière seulement. De sorte que 1 se combine dans 4, quatre fois; 2, six fois; 3, quatre fois; & 4, une fois.

II.

Pour trouver dans un plus grand nombre de choses différentes, par exemple, de sept, les diverses combinaisons que l'on peut faire en les prenant diversement, soit pour les ajouter ensemble, ou pour les multiplier, comme si l'on vouloit sçavoir toutes les conjonctions possibles des sept Planetes, en les prenant deux à deux: c'est-à-dire, si l'on vouloit sçavoir combien de fois 2 se combine dans 7; ajoutez l'unité à chacun des deux nombres donnez 2, 7; pour avoir ces deux autres nombres 3, 8, qui font connoître que dans la troisième case de bas en haut, ou de haut en bas, de la huitième diagonale du Triangle Arithmétique, on trouvera le nombre des combinaisons qu'on cherche, sçavoir, 21, qui marque les diverses rencontres des sept Planetes conjointes deux à deux. Et pour connoître le huitième diagonale, & la troisième case de cette diagonale; comptez huit dans le premier rang horizontal marqué d'unités en com-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 105
mençant par la gauche, ou dans le premier rang
perpendiculaire, marqué aussi d'unités en com-
mençant par le haut : puis prenez la troisième case
en comptant par l'un ou l'autre de ces deux pre-
miers rangs, & suivant la diagonale ponctuée.

Ou bien parce que les deux nombres donnez
sont 2, 7, & que le plus petit est 2, ajoutez
ensemble tous les nombres du deuxième rang jus-
qu'à la septième diagonale, parce que le plus
grand nombre donné est 7, sçavoir, 1, 2, 3, 4,
5, 6, & la somme 21 sera le nombre qu'on cher-
che.

III.

Si vous n'avez point de Triangle Arithmétique
qui même peut manquer, lorsque le nombre des
choses proposées passera 9, parce que nous ne
l'avons pas prolongé au de-là, quoique cela soit
facile, apprenez cette autre règle, qui est générale
pour quelque nombre que ce soit.

Etant donnez, par exemple, les deux nombres
2, 7, pour sçavoir combien de fois le plus petit
2 se combine dans le plus grand 7, faites des
deux nombres donnez 2, 7, ces deux Progres-
sions Arithmétiques 2, 1, & 7, 6, qui décroissent
de l'unité, & qui ne doivent avoir que deux ter-
mes, sçavoir, autant que le plus petit nombre
donné 2 comprend d'unités. Après cela multipliez
ensemble les termes de chaque Progression, sça-
voir, 7 par 6, & 2 par 1. Divisez le premier
produit 42 par le second 2, & le quotient 21 sera
le nombre des combinaisons de 2 en 7.

C'est par cette manière, ou par la précédente,
qu'on trouvera que 3 se combine dans 7, 35 fois,
& 4 aussi 35 fois, que 5 s'y combine 21 fois, &
6 seulement 7 fois.

D'où il suit que le nombre de toutes les combinaisons qui se peuvent faire dans sept choses différentes, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, sept à sept, est 127, que l'on trouve en ajoutant tous les nombres particuliers des combinaisons 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, qui conviennent aux nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

IV.

Mais cette somme 127 se peut trouver plus facilement en faisant cette Progression Géométrique double 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, qui doit être composée de sept termes, parce que le nombre proposé des choses à combiner est 7. Car la somme 127 de tous ces termes sera le nombre qu'on cherche.

D'où il suit que pour avoir toutes les combinaisons de plusieurs choses proposées, il faut mettre autant de termes de la Progression double 1, 2, 4, &c. qu'il y a de choses proposées, & faire

* Problème. une somme de tous les termes ; * cette somme
me XI. p. donnera les différentes manières, dont ces choses
68. peuvent être combinées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Si on a proposé quatre choses différentes, il faut se servir des quatre premiers termes de la Progression double 1, 2, 4, 8, dont la somme * 15 montre que quatre choses peuvent être combinées en quinze manières, en les prenant une à une, deux à deux, &c. S'il y a cinq choses proposées, il faut employer les cinq premiers termes de la Progression double 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme * 31, fait connoître qu'on peut combiner cinq choses en trente une manières. Ainsi des autres.

REMARQUE.

Au lieu de prendre la somme des termes, on peut prendre le terme qui suit immédiatement le dernier terme donné, & le diminuer de l'unité; le reste sera le nombre qui exprimera en combien de manières on pourra combiner les choses données. Ainsi dans le premier exemple de cet article IV. le terme qui suit 64 en 128, qu'il faut diminuer de l'unité; ce reste 127 est le nombre cherché. De même dans le second exemple, le terme qui suit 16 est 32, qui diminué de l'unité donne 31 pour le nombre demandé.

V.

On peut encore trouver cette somme 127 plus facilement en cette sorte. Otez l'unité du nombre proposé 7, le reste 6 fait voir qu'il faut prendre la sixième puissance de 2, qui est 64, dont le double 128 étant diminué de l'unité, donnera 127 pour nombre cherché.

VI.

J'ajouterais ici deux Méthodes particulières aux deux nombres 2 & 3, pour trouver combien de fois ils se combinent dans un nombre proposé qui doit être plus grand, par exemple, dans le même nombre donné 7.

Premièrement, pour trouver combien de fois 2 se combine dans 7, ôtez ce nombre 7 de son quarré 49, & 21 moitié du reste 42, sera le nombre des fois que 2 se combine dans 7.

Pour trouver combien de fois 3 se combine dans 7, ajoutez au cube 343 du nombre donné 7 le double 14 de ce même nombre 7, & ôtez de

la somme 357 le triple 147 du quarré 49 du même nombre 7, & 35 sixième partie du reste 210 sera le nombre des fois que 3 se combine dans 7.

V I I.

Si on proposoit de combiner quatre choses, dont il y eût deux égales & deux différentes, exprimées par ces quatre lettres a, a, b, c , on voit bien qu'on les peut prendre une à une en trois façons a, b, c , deux à deux en quatre façons, aa, ab, ac, bc , trois à trois en trois façons, aab, aac, abc , & quatre à quatre en une seule façon, $aabc$. Ce qui fait qu'on les peut combiner en tout de 11 manières différentes. Si on proposoit cinq choses, dont il y eût trois égales & deux différentes exprimées par ces lettres a, a, a, b, b , on peut les prendre une à une en deux manières, a, b , deux à deux en trois manières aa, ab, bb , trois à trois en trois manières, aaa, aab, abb , quatre à quatre en deux manières $aaab, aabb$, & cinq à cinq en une seule manière seulement. Ce qui fait encore en tout 11 combinaisons.

V I I I.

Si on veut sçavoir en combien de manières se peuvent combiner quatre choses, comme a, a, b, c , dont deux sont les mêmes, & les deux autres sont différentes, voici ce qu'il faut faire; a étant deux fois parmi les choses données, on prendra ce nombre 2 qu'on gardera à part; on ajoutera l'unité à ce 2, & l'on aura 3, qui sera multiplié par le nombre des b , qui n'est ici qu'une fois parmi les choses données: ainsi l'on aura encore 3 qu'on conservera; on ajoutera ce 3 avec le 2 déjà trouvé, on augmentera la somme 5 de l'unité, & l'on au-

ra 6 qui sera multiplié par le nombre des c , qui n'est ici qu'une fois : ainsi l'on aura 6, que l'on ajoutera aux nombres conservez 2, 3 ; la somme 11 montre qu'on peut combiner en onze manières différentes ces quatre choses, a, a, b, c .

De même, si on avoit proposé ces huit choses a, a, a, b, b, c, c, c , à cause que a est trois fois, on aura 3, que l'on conservera ; on ajoutera 1 à 3, la somme 4 sera multipliée par 2 nombre des b , le produit 8 sera conservé ; on ajoutera ensemble 3, 8, & la somme 11 sera augmentée de l'unité ; ce qui donnera 12 qu'on multipliera par 3 nombre des c . Le produit 36 sera ajouté aux nombres conservez 3, 8 ; la somme 47 montre que ces huit choses proposées peuvent être combinées en 47 manières.

Mais les choses données étant toutes égales, a, a, a, a , le nombre 4 des choses donnés fait voir qu'on ne les peut prendre qu'en quatre manières différentes, sçavoir, $a, aa, aaa, aaaa$.

IX.

On a vû dans les premiers articles que quatre choses différentes a, b, c, d , pouvoient être combinées en 15 manières, on veut sçavoir s'il n'y point un autre nombre de choses égales ou différentes qui puissent être combinées aussi en quinze manières. Ajoutez 1 à 15, vous aurez 16.

Premièrement, ayant divisé 16 par 4, il vient 4, qui étant divisé par 2 donnera 2 ; ayant divisé ce 2 par 2, il vient 1, qui ne peut plus être divisé & qu'on néglige. Prenez les trois diviseurs 4, 2, 2 ; ôtez de chacun l'unité, il restera 3, 1, 1, lesquels ajoutez font 5. Cette somme 5, & ces trois restes 3, 1, 1, montrent qu'on peut com-

biner en 15 manières différentes 5 choses, dont trois sont égales, une différente, & une autre encore différente, comme a, a, a, b, c .

Secondement, après la première division de 16 par 4, on divisera le quotient 4 par 4, & il vient au quotient 1, qui ne pouvant plus être divisé, sera négligé. On prendra les deux diviseurs 4, 4, de chacun desquels ayant ôté l'unité, il viendra 3, 3, on ajoutera ces deux restes, & l'on aura 6. La somme 6 & les deux restes 3, 3, font voir qu'on peut combiner en 15 manières six choses, dont trois sont égales, & trois autres sont encore égales, telles que sont a, a, a, b, b, b .

Troisièmement, on divisera 16 par 8, il viendra 2; ce quotient 2 divisé encore par 2 donnera 1 qui sera négligé. De chacun de ces diviseurs 8, 2, on ôtera l'unité; on ajoutera les restes 7, 1, ensemble, la somme 8 & les restes 7, 1 montrent qu'on peut combiner en 15 manières différentes huit choses, dont 7 seront égales, & une sera différente, comme a, a, a, a, a, a, a, b .

Quatrièmement, on divisera 16 par 16, le quotient est 1 qu'on négligera. Le seul diviseur est 16, dont on ôtera l'unité; le reste 15 fait connaître qu'on peut combiner en quinze façons quinze choses égales, exprimées par ces caractères, $a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a$.

Enfin si on divise 16 par 2, & son quotient 8 encore par 2, puis 4 par 2, & ce 2 par 2, on trouvera que quatre choses différentes peuvent être combinées en quinze manières différentes, parce qu'il restera quatre unitez, après avoir ôté l'unité des quatre diviseurs 2, 2, 2, 2.

R E M A R Q U E.

On voit par cet article IX. qu'on peut prendre tels diviseurs qu'on voudra, & les changer dans la suite de la division, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'unité. On pourra examiner combien de choses peuvent être combinées un certain nombre de fois, comme 11 fois, 22 fois, &c. il faut toujours ajouter 1 au nombre proposé, comme si on propose 11, j'ajoute l'unité & je divise 12 ou par 6, ou par 4, ou par 3, ou par lui-même.

Pour donner plus de facilité à distinguer ces diviseurs; on écrira d'abord le nombre proposé, augmenté de l'unité, & au-dessous on écrira son diviseur, le quotient s'écrira à côté du nombre proposé dans une colonne séparée: le même diviseur ou un autre, s'écrira au dessous de ce quotient, & le second quotient à côté du premier dans une troisième colonne; le troisième diviseur s'écrira au dessous de ce dernier quotient, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'unité, comme on le voit dans ces Tables.

| | | | | | |
|--|------|---|---|---|-------------------------------------|
| Nombre proposé
augmenté de l'unité. | 1 2. | 6 | 3 | 1 | Quotiens. |
| Premier diviseur. | 2. | 2 | 3 | | Diviseurs. |
| | | | | | |
| | 1 | 1 | 2 | | Diviseurs dimi-
nuez de l'unité. |

| | | | | |
|--|-----|---|---|-------------------------------------|
| Même nomb. prop.
augmenté de l'unité. | 1 2 | 3 | 1 | Quotiens. |
| Premier diviseur. | 4 | 3 | | Diviseurs. |
| | | | | |
| | 3 | 2 | 1 | Diviseurs dimi-
nuez de l'unité. |

| | | | | |
|--|-----|---|---|-------------------------------------|
| Même nomb. prop.
augmenté de l'unité. | 1 2 | 2 | 1 | Quotiens. |
| Premier diviseur. | 6 | 2 | | Diviseurs. |
| | | | | |
| | 5 | 1 | | Diviseurs dimi-
nuez de l'unité. |

| | | | | |
|---|-----|---|--|-----------------------------------|
| Autre nomb. prop.
augmenté de l'unité. | 2 3 | 1 | | Quotiens. |
| Premier diviseur. | 2 3 | | | Diviseur unique. |
| | | | | |
| | 2 2 | | | Diviseur dimi-
nué de l'unité. |

Ce dernier diviseur 22 marque qu'il n'y a que 22 choses égales qui puissent être combinées en 22 manières différentes, puisque le nombre 23 est un nombre premier.

On peut consulter ce qu'on a dit des moyens de trouver toutes les parties aliquotes de quelque nombre donné. Ce sera un éclaircissement pour ce qu'on dit ici.

QUESTION I.

UN Carré partagé de deux couleurs par la diagonale, peut recevoir quatre positions différentes. Car l'angle coloré peut être en bas ou en haut, mais à main gauche : ce même angle peut être encore en haut & en bas, mais à main droite. Au lieu d'un Carré, on peut donc prendre quatre Carrés, & les regarder dans ces quatre situations différentes. * Je nommerai ces quatre Carrés A, B, C, D. La règle des combinaisons rapportée

Planche
65. Fig.
212.

rapportée ci-dessus *art. IV.* fait connoître que ces quatre quarræux peuvent être combinez en 15 *Fig. 1.* manières différentes. Car si on les prend un à un, l'on aura A, B, C, D , deux à deux on aura AB, AC, AD, BC, BD, CD , trois à trois on aura ABC, ABD, ACD, BCD , & quatre à quatre on aura seulement $ABCD$. Ceci n'est qu'une application des règles qu'on a données dans les cinq premiers articles précédens.

QUESTION II.

ON propose de combiner quatre de ces mêmes quarræux, dont deux A, A , sont égaux & les deux autres sont B & C . Suivant l'article VIII. on aura A, B, C , en les prenant un à un, AA, AB, AC, BC , en les prenant deux à deux, AAB, AAC, ABC , en les prenant trois à trois, & $AABC$, en les prenant quatre à quatre; ce qui donne onze manières différentes de combiner les quarræux A, A, B, C .

Des Permutations.

IL y a une autre sorte de changemens; que l'on peut appeller *Permutation*, où l'on prend les mêmes choses deux fois; comme si l'on veut combiner ces trois nombres $2, 5, 6$, en les prenant deux à deux, pour sçavoir les différentes valeurs qu'ils peuvent produire. En considérant les deux premiers nombres en cette sorte, 25 , on dira qu'ils font vingt-cinq, & en les considérant ainsi, 52 , on prononcera qu'ils font 52. De même en considérant le premier & le troisième nombre en cette sorte 26 , on connoitra qu'ils font vingt-six,

& en les considérant ainsi, 62, on dira qu'ils font soixante-deux; ainsi des autres: où vous voyez que le nombre des Permutations est double de celui des Combinaisons.

On se sert des Permutations, quand on veut faire des Anagrammes, où l'on fait quelquefois des rencontres heureuses, c'est-à-dire, qui conviennent à leur sujet.

On se sert aussi des Permutations dans le Jeu de Dez, pour connoître le nombre des hazards qu'auroit celui qui avec deux Dez entreprendroit de faire, par exemple, 9. Il est certain qu'il auroit quatre hazards, parce que 9 se peut faire en quatre façons, sçavoir, par le 4 du premier Dé & le 5 du second, ou bien par le 5 du premier & le 4 du second: & encore par le 3 du premier Dé & le 6 du second, ou bien par le 6 du premier & le 3 du second.

I.

Planche
1. Fig. 1.

Pour trouver avec le Triangle Arithmétique le nombre des permutations de plusieurs choses, on regardera le second rang perpendiculaire de ce Triangle comme étant le premier; on cherchera dans ce second rang le nombre des choses proposées; on ne fera attention qu'à la base dans laquelle il se trouvera. On multipliera ce nombre trouvé par l'unité; celui de la case suivante, qui sera regardée comme la deuxième par 2; celui de la troisième case par 3 fois 2 ou 6; celui de la quatrième case par 4 fois 6 ou 24; celui de la cinquième case par 5 fois 24 ou 120; celui de la sixième case par 6 fois 120 ou 720, & ainsi de suite, en multipliant toujours le nombre de la case par le produit précédent. Le produit de cha,

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 115

que case de la base selon leur ordre , fera le nombre des permutations des choses proposées prises une à une , deux à deux , trois à trois , &c. Mais quand on sera parvenu à l'unité du premier rang parallele , on répétera le dernier nombre , qui sera aussi le nombre des permutations des choses prises selon le nombre qu'on les aura proposées. Un exemple éclaircira cette règle.

Planche
1. Fig. 1.

Supposant qu'on ait proposé quatre choses, a , b , c , d , pour sçavoir quel est le nombre de leurs permutations , on cherchera dans le second rang perpendiculaire le nombre 4 , qui se trouve dans la base du cinquième Triangle. Ce nombre 4 multiplié par l'unité , est le nombre des permutations de ces quatre choses prises une à une. On multipliera ensuite le nombre 6 de la case suivante , qui est regardée comme la deuxième dans la même base par 2 , le produit 12 sera le nombre des permutations des choses proposées prises deux à deux ; puis on multipliera le nombre 4 de la troisième case de la même base par 3 fois 2 ou 6 , le produit 24 est le nombre des permutations des choses proposées prises trois à trois : enfin comme on est parvenu à l'unité qui est dans le premier rang parallele , & qui est commune à la base du cinquième Triangle , on répétera le même produit qu'on vient de trouver , sçavoir , 24 , qui sera aussi le nombre des permutations des choses prises quatre à quatre.

Si l'on veut sçavoir le nombre de toutes ces permutations , on ajoutera les produits trouvez 4 , 12 , 24 , 24 ; leur somme 64 est le nombre de toutes ces permutations. C'est-à-dire , que quatre choses différentes peuvent recevoir 64 change-

116 RECREAT. MATH. ET PHYS.
mens différens, sans être prises deux fois dans au-
cune de ces permutations.

I I.

Il n'est point nécessaire de se servir du Triangle Arithmétique, pour trouver toutes les permutations, ou les transpositions possibles de plusieurs choses, par exemple, de ces quatre lettres AMOR, prises quatre à quatre; on fera cette Progression Arithmétique 1, 2, 3, 4, composée d'autant de termes qu'il y a de lettres proposées; en sorte que le premier terme soit toujours l'unité, & que le dernier exprime le nombre des lettres: & alors en multipliant ensemble tous ces termes, le produit

| | | | |
|------|------|------|------|
| AMOR | MARO | OAMR | ROMA |
| AMRO | MAOR | OARM | ROAM |
| AOMR | MOAR | OMAR | RMAO |
| AORM | MORA | OMRA | RMOA |
| ARMO | MRAO | ORAM | RAMO |
| AROM | MROA | ORMA | RAOM |

24, sera le nombre des Permutations, ou changemens différens que l'on peut faire des quatre lettres proposées AMOR, comme vous voyez ici.

I I I.

C'est de la même façon que l'on trouvera le nombre des permutations d'une autre multitude de lettres, sçavoir, en faisant une Progression d'autant de nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'il y aura de lettres à combiner ensemble, & en multipliant ensemble tous les termes de cette Progression. Ainsi vous trouverez que cinq lettres se peuvent combi-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 117

ner simplement , ou transposer en 120 manières ,
 six en 720 , & ainsi des autres , comme vous voyez
 dans la Table suivante , qui montre que les 23
 lettres de l'Alphabet se peuvent combiner en
 25852016738884976640000 façons.

| | |
|----|-----------------------------|
| 1 | 1. A. |
| 2 | 2. B. |
| 3 | 6. C. |
| 4 | 24. D. |
| 5 | 120. E. |
| 6 | 720. F. |
| 7 | 5040. G. |
| 8 | 40320. H. |
| 9 | 362880. I. |
| 10 | 3628800. K. |
| 11 | 39916800. L. |
| 12 | 479001600. M. |
| 13 | 6227020800. N. |
| 14 | 87178291200. O. |
| 15 | 1307674368000. P. |
| 16 | 20922789888000. Q. |
| 17 | 355687428096000. R. |
| 18 | 6402373705728000. S. |
| 19 | 121645100408832000. T. |
| 20 | 2432902008176640000. V. |
| 21 | 51090942171709440000. X. |
| 22 | 1124000727777607680000. Y. |
| 23 | 25852016738884976640000. Z. |
| 24 | 620448401733239439360000. |
| 25 | 15511210043330985984000000. |

Cette Table est aisée à construire ; car ayant
 connu , par exemple , que 4 lettres se peuvent com-
 biner ou transposer en 24 façons , si l'on multiplie

ce nombre 24 des permutations par le nombre 5 ; qui suit immédiatement après le 4 , on aura 120 pour le nombre des permutations de 5 lettres , lequel étant multiplié par le nombre suivant 6 , on aura 720 pour le nombre des permutations de 6 lettres , lequel étant multiplié par le nombre suivant 7 , le produit 5040 sera le nombre des permutations de 7 lettres , & ainsi de suite.

QUESTION I.

D'Où il suit que si on veut sçavoir en combien de manières différentes sept personnes peuvent se ranger à table , il n'y a qu'à multiplier les premiers nombres naturels jusqu'à sept de cette sorte , 1 fois 2 fois 3 fois 4 fois 5 fois 6 fois 7. Le produit 5040 fait voir que sept personnes peuvent être rangées à une table en 5040 manières différentes.

QUESTION II.

Après avoir fait attention à ce que l'on vient de dire , on n'aura point de peine à croire que huit Enfans de Chœur puissent tellement changer de place au Chœur trois fois par jour , à Matines , à la Messe & à Vêpres , qu'ils seroient environ 37 ans à achever ces changemens différens. Il est vrai que c'est une chose surprenante ; mais il est constant que huit choses peuvent recevoir quarante mille trois cens vingt changemens ; & comme il s'en feroit trois par jour , si on divise 40320 par 3 , on aura 13440 jours , qui font près de 37 ans , pendant lesquels il faudroit faire chaque jour trois changemens.

QUESTION III.

ON connoîtra par le même moyen que les huit mots de ce Vers fait à l'honneur de la Sainte Vierge, peuvent recevoir les mêmes chan-

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera Cælo.

gemens, étant pris huit à huit, si on ne se soucie pas d'observer la mesure du Vers: mais si on veut garder la mesure du Vers hexamètre, au lieu de 40320 permutations, ils n'en recevront que 3276. C'est-à-dire, que les mots de ce Vers pourront avoir 3276 situations, & conserver dans chacune de ces situations la mesure du Vers hexamètre.

QUESTION IV.

Les douze Apôtres ayant disputé qui d'entr'eux seroit le premier, Jesus-Christ leur déclara que celui qui voudroit être le premier seroit le dernier, & que le dernier deviendroit le premier. Supposons qu'après cette leçon d'humilité chacun voulût céder la première place, la seconde & la troisième place à son compagnon, & qu'ainsi ils eussent résolu de ne demeurer jamais ensemble dans une même disposition, on demande en combien de manières ils auroient pû changer de place, en sorte qu'ils ne se fussent jamais rencontrés les uns à l'égard des autres dans la même situation. *Réponse.* Ils auroient pû changer en quatre cens soixante dix-neuf millions mille six cens manières différentes.

Si l'on suppose que les onze Apôtres eussent toujours observé de laisser la première place à saint Pierre, ils auroient pû changer de place en trente-

120 RECREAT. MATH. ET PHYS.
neuf millions neuf cens seize mille huit cens manieres différentes.

QUESTION V.

MAis ce qui paroîtra encore bien plus surprenant, c'est le calcul énorme qu'on va faire pour les différens changemens qui arriveroient à 24 noms qui ne rempliroient que deux lignes, supposant qu'on pût écrire 1440 lignes en chaque feuille de papier, ou bien 720 fois ces 24 noms, & que chaque rame de papier fût tellement battue, qu'elle n'eût qu'un pouce d'épaisseur, je dis qu'il faudroit beaucoup plus de rames de papier pour écrire tous les changemens de ces 24 noms, qu'il n'en pourroit contenir depuis le centre de la terre jusqu'au firmament, en les mettant les unes sur les autres. Car supposant qu'il y a 28,862,640,000,000 de pouces du centre de la terre aux étoiles, il faudroit 1,751,245,560,364,553,942 rames de papier & plus pour écrire les 620448401733239439360000 changemens que peuvent recevoir ces 24 noms. Parce que chaque rame de papier contenant 500 feuilles, & chaque feuille 720 changemens, chaque rame de papier contiendrait 360000 de ces changemens. Or divisant les 24 nombres 620, &c. par celui que contiendrait chaque rame, il vient 1,751, &c. qui est un nombre de pouces plus grand que celui qu'il y a depuis le centre de la terre jusqu'au firmament.

On voit aisément qu'il est impossible d'écrire toutes les permutations de ces 24 noms : car tous les Princes du monde ne pourroient payer le papier, quand la rame ne coûteroit que 20 sols, & cent mille Scribes seroient 336,047,223,141 ans à écrire

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 121

toutes les permutations de 24 noms, quand ils écriroient chacun une rame par semaine, & travailleroient nuit & jour; en sorte que chaque personne remplît 71 feuilles par jour, qui seroient cinq millions deux cens mille rames par an. Supposons encore qu'on voulût donner à chacun de ces Scribes deux cens livres par an, ce seroit vingt millions par an, outre les cinq millions deux cens mille livres pour le papier. Comme il faudroit continuer cette dépense pendant 336,047,223,141 ans, elle se monteroit à la somme de six cens nonante-six quintillions, six cens sept quadrillions, six cens vingt trillions, deux cens trente-un billions, cinq cens trente-deux millions de livres.

L'imagination se perd dans ces sortes de supputations, qui cependant sont très-vraies, puisqu'elles sont fondées sur les principes certains de l'Arithmétique.

QUESTION VI.

ON veut sçavoir combien de permutations planche * peuvent recevoir les quatre quarreaux * A, Fig. 1. B, C, D, mipartis de deux couleurs par la diagonale, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre. Pour y procéder avec ordre on cherchera toutes les combinaisons de ces quatre quarreaux, qu'on a trouvé être A, B, C, D, pris un à un, AB, AC, AD; BC, BD, CD, pris deux à deux, ABC, ABD, ACD, BCD, pris trois à trois, & ABCD, pris quatre à quatre. Il faut ensuite chercher combien peuvent recevoir de permutations ces quarreaux suivant les quatre différentes combinaisons qu'on vient de voir.

Planche *
Fig. 1. Les quatre premières combinaisons des quarreaux A, B, C, D, pris un à un, ne donnent point d'autres permutations; les six combinaisons suivantes des quarreaux AB, AC, &c. pris deux à deux, en donnent chacune deux, *art. III. & quest. I.* Ce qui fait 12 permutations. Les quatre combinaisons des quarreaux ABC, &c. pris trois à trois, donnent chacune six permutations, *art. III.* ce qui fait 24 permutations. Enfin la seule combinaison des quarreaux ABCD pris quatre à quatre, donne encore 24 permutations, *art. III.* Si l'on ajoute toutes ces permutations 4, 12, 24, 24, elle feront la somme de 64. C'est-à-dire, que quatre quarreaux ABCD, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre, peuvent être changez en soixante-quatre manières différentes.

QUESTION VII.

SI on veut que ces quarreaux soient pris deux à deux, & que chacun soit répété, il est aisé de connoître qu'il y aura seize permutations. Car par l'article II. ou III. des Combinaisons on trouve que 2 en quatre peut être combiné six fois; & par l'article II. & question I. des Permutations, on sçait que 2 choses ne peuvent recevoir que 2 changemens; ainsi ces six combinaisons donneront 12 permutations, auxquels si l'on joint les quatre AA, BB, CC, DD de chaque quarreau répété, on aura seize Permutations.

REMARQUE.

Ce que l'on vient de dire des Combinaisons jointes aux Permutations, fait entrevoir que quatre

quarreux peuvent fournir des compartimens & des desseins à l'infini. C'est ce qu'a heureusement executé le Pere Douat dans un Traité très-curieux qu'il vient de faire paroître * sur un Mémoire que le Pere Sebastien Truchet présenta à l'Académie Royale des Sciences en 1704. On y verra que ces quatre quarreux pris quatre à quatre, répétez & permuté, forment 256 figures différentes. On verra avec étonnement qu'en prenant ces 256 figures deux à deux, trois à trois, & ainsi de suite jusqu'à 256, on peut trouver un nombre prodigieux de compartimens, dont les desseins seront tous différens. On pourra s'exercer soi-même en faisant des quarreux de cartons mipartis de deux couleurs par la diagonale, & les disposant en toutes les façons qu'on imaginera.

* 1722.

Cet Ouvrage n'est pas seulement curieux, il est encore très-utile, particulièrement aux Architectes, qui y trouveront une source intarissable pour le Carrelage.

Des Partis du Jeu.

ON appelle *Parti* en matière du Jeu, la juste distribution, ou le réglement de ce qui doit appartenir à plusieurs Joueurs de l'argent qui est au Jeu, & qu'ils jouent en un certain nombre de parties, proportionnellement à ce que chacun a droit d'espérer de la fortune par le nombre des parties qui lui manquent pour achever.

On suppose que deux Joueurs ont mis chacun 40 pistoles au Jeu. Dans ce cas cet argent ne leur appartient plus, parce qu'en le mettant au Jeu ils en ont quitté la propriété. Mais en revanche ils ont le droit d'attendre ce que le hazard peut leur

114 RECREAT. MATHEM. ET PHYS.
 en donner, suivant les conditions dont ils sont convenus avant que de jouer. On suppose encore qu'ils jouent 80 pistoles en trois parties, que le premier ait une partie, & que le second n'en ait point, c'est-à-dire, qu'il manque deux parties au premier pour gagner, & trois au second. Enfin si les Joueurs veulent se séparer en renonçant à l'attente du hazard, pour rentrer chacun dans la propriété de quelque chose, le premier à raison des 2 parties qui lui manquent, & le second à raison des 3 parties qu'il lui faut pour gagner tout l'argent, on demande quelle est la portion que chacun des Joueurs doit retirer de l'argent qu'ils ont mis au Jeu. On peut trouver cette portion ou ce parti par le moyen du Triangle Arithmétique, en cette sorte,

Planche
 1. Fig. 1.

Parce que nous avons supposé qu'il manque au premier Joueur 2 parties, & 3 au second pour gagner, & que la somme des deux nombres 2 & 3 est 5, il faut prendre dans la 5 la diagonale du Triangle Arithmétique, la somme 5 des deux premiers nombres 1, 4, à cause des deux parties qui manquent au premier Joueur, & la somme 11 des trois autres 6, 4, 1, à cause des trois parties qui manquent au second Joueur, & ces deux dernières sommes 5, 11, donneront la raison réciproque des deux partis qu'on cherche, de sorte que le parti de celui à qui il ne manque que 2 parties est au parti de celui à qui il en manque 3, comme 11 est à 5.

Mais pour déterminer ces deux partis, c'est-à-dire, pour assigner à chacun la part des 80 pistoles qui sont au Jeu, à raison des avantages qu'il a, il faut diviser ce nombre 80 en deux parties proportionnelles aux deux termes 11, 5; ce qui se fera en

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 115

multipliant séparément par ces deux termes 11, 5, le nombre 80 des pistoles qui sont au Jeu, & Planche
1. Fig. 1. divisant chacun des deux produits 880, 400, par la somme 16 des deux mêmes termes 11, 5, on aura 55 pour le nombre des pistoles que doit emporter le premier Joueur qui a une partie, & 25 pour le nombre des pistoles que doit prendre le second Joueur qui n'a point de partie.

Pareillement s'il manque 1 partie au premier Joueur, & 2 au second pour gagner, on ajoutera ensemble ces deux nombres de parties 1, 2, & parce que leur somme est 3, on prendra dans la troisième diagonale du Triangle Arithmétique le seul & premier nombre 1, & la somme 3 des deux autres 2, 1 : ces deux nombres 1, 3, font connoître que le parti du premier Joueur est au parti du second, comme 3 est à 1. Et parce que la somme de ces deux termes 1, 3, est 4, il s'en suit que le premier Joueur doit avoir les $\frac{3}{4}$ des 80 pistoles qui sont au Jeu, & le second seulement $\frac{1}{4}$. Par conséquent il appartient 60 pistoles au premier Joueur, & 20 au second, dans la supposition que nous avons faite, qu'ils veulent se séparer sans continuer le Jeu.

Par-là vous voyez que si le Jeu est dans cet état, qu'il manque au premier Joueur une partie, & au second deux parties pour achever, le premier Joueur pourroit parier au pair 3 contre 1.

On peut résoudre ces sortes de questions sans le secours du Triangle Arithmétique, en cette sorte.

Puisqu'il manque au premier Joueur une partie 1. Cas. pour achever, & qu'il en manque deux au second, on considérera que si les Joueurs continuoient de

jouer, & que le second gagnât une partie, il lui manqueroit comme au premier une partie pour achever, & que dans ce cas les deux Joueurs ayant des hazards égaux, leurs partis seroient aussi égaux par cette règle générale, qui porte, que le parti du premier Joueur est au parti du second, en même raison que le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, au nombre des hazards qui peuvent faire gagner le second. Ainsi dans cette supposition le parti de chacun seroit la moitié de l'argent qui est au Jeu.

Il est donc certain, que si le premier gagne la partie qui se va jouer, tout l'argent qui est au Jeu lui appartiendra, & que s'il la perd, il ne lui en appartiendra que la moitié. C'est pourquoi s'ils veulent se séparer sans jouer cette partie, le premier doit avoir la moitié de l'argent qui est au Jeu, & encore la moitié de la moitié du même argent, c'est-à-dire, qu'il doit avoir les $\frac{3}{4}$ de cet argent.

Le reste $\frac{1}{4}$ appartiendra au second. Car il est évident que si un Joueur prétend une certaine somme en cas de gain, & une somme moindre en cas de perte, le sort étant égal, son parti est que sans jouer, il lui appartient la moitié de ces deux sommes prises ensemble.

2. Cas. Ce premier cas servira à résoudre le suivant, qui suppose qu'il manque au premier Joueur une partie pour achever, & au second trois parties. Car si le premier gagne une partie, il doit emporter les 80 pistoles qui sont au Jeu, & s'il perd une partie, en sorte qu'il n'en faille plus que deux au second pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{3}{4}$ de l'argent, *par le 1. Cas.* Ainsi en cas de

gain, le premier emportera tout l'argent, & en cas de perte, il ne lui en appartiendra que les $\frac{3}{4}$. C'est pourquoi en cas de parti, il ne lui en doit appartenir que la moitié de ces deux sommes prises ensemble, c'est-à-dire, $\frac{7}{8}$, ou 70 pistoles. Le reste $\frac{1}{8}$, ou 10 pistoles appartiendront au second.

Ce second cas servira de la même façon à résoudre le suivant, qui suppose qu'il manque deux parties au premier Joueur pour achever, & trois au second. Car si le premier gagne une partie, il doit avoir les $\frac{7}{8}$ de l'argent qui est au Jeu, *par le 2. Cas,* & s'il perd une partie, en sorte qu'il n'en faille plus que deux au second pour gagner, sçavoir, autant qu'il en manque au premier, chacun doit avoir pour son parti la moitié de l'argent qui est au Jeu. C'est pourquoi en cas de gain, le premier emportera $\frac{7}{8}$ de l'argent qui est au Jeu, & $\frac{1}{2}$ en cas de perte, & ainsi en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux sommes prises ensemble, c'est-à-dire, $\frac{11}{16}$, ou 55 pistoles. Le reste $\frac{5}{16}$, ou 25 pistoles appartiendront au second.

Le second cas servira encore à résoudre ce quatrième, qui suppose qu'il manque au premier Joueur une partie pour achever, & quatre au second. Car si le premier gagne une partie, il remportera les 80 pistoles qui sont au Jeu, & s'il en perd une, en sorte qu'il n'en faille plus que trois au second pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{7}{8}$ de tout l'argent, *par le 2. Cas.* Ainsi

puisque en cas de gain, le premier doit emporter tout l'argent, & qu'en cas de perte il n'en doit emporter que les $\frac{2}{3}$; en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux sommes prises ensemble, c'est-à-dire, $\frac{15}{16}$, ou 75 pistoles. Le reste $\frac{1}{16}$, ou 5 pistoles, appartiendront au second.

3. Cas. Ce quatrième cas & le troisième serviront de la même façon à résoudre le suivant; qui suppose qu'il manque deux parties au premier Joueur pour achever, & quatre au second. Car si le premier gagne une partie, en sorte qu'il ne lui en manque plus qu'une pour achever, il doit remporter les $\frac{15}{16}$ de l'argent qui est au Jeu; par le 4. Cas, & s'il en perd une; en sorte qu'il n'en manque plus que trois au second, il doit en remporter seulement les $\frac{11}{16}$, par le 3. Cas. Ainsi puisque en cas de gain le premier doit remporter les $\frac{15}{16}$ de tout l'argent, & seulement les $\frac{11}{16}$ en cas de perte, il doit en cas de parti prendre la moitié de ces deux sommes prises ensemble, c'est-à-dire, $\frac{13}{16}$, ou 65 pistoles. Le reste $\frac{3}{16}$, ou 15 pistoles, appartiendront au second. Ainsi des autres.

Autrement & plus facilement.

Tous les Cas précédens, & tous les autres infinis qui peuvent arriver, peuvent encore se résoudre autrement sans le secours du Triangle Arithmétique, & plus facilement en cette sorte.

5. Cas. Pour résoudre; par exemple, le cinquième cas; où

où l'on suppose qu'il manque deux parties au premier Joueur pour achever, & 4 au second, de sorte qu'il leur manque ensemble 6 parties pour achever, ôtez 1 de cette somme 6, & parce qu'il reste 5, on supposera ces cinq lettres semblables *aaaaa* favorables au premier Joueur, & pareillement ces cinq lettres semblables *bbbbb* favorables au second Joueur. On combinera ensemble ces dix lettres, comme vous le voyez dans cette Table, ou des 32 combinaisons, les 26 premières vers la gauche, où se rencontre au moins deux *a*, seront prises pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties: & les six dernières vers la droite, où il y a au moins quatre *b*, seront prises pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le second, parce qu'il lui manque quatre parties.

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <i>aaaaa</i> | <i>aaabb</i> | <i>aabbb</i> | <i>abbbb</i> |
| <i>aaaab</i> | <i>aabba</i> | <i>abbba</i> | <i>bbbba</i> |
| <i>aaaba</i> | <i>abbaa</i> | <i>bbaaa</i> | <i>babbb</i> |
| <i>aabaa</i> | <i>bbaaa</i> | <i>ababb</i> | <i>bbabb</i> |
| <i>abaaa</i> | <i>aabab</i> | <i>abbab</i> | <i>bbbab</i> |
| <i>baaaa</i> | <i>abaab</i> | <i>ababb</i> | <i>bbbbb</i> |
| | <i>baaab</i> | <i>baabb</i> | |
| | <i>baaba</i> | <i>babba</i> | |
| | <i>babaa</i> | <i>bbaba</i> | |
| | <i>ababa</i> | <i>babab</i> | |

Ainsi le parti du premier Joueur sera au parti du second, comme 26 est à 6, ou comme 13 est à 3, &c.

Pareillement pour résoudre le troisième Cas, 3. Cas. où l'on suppose qu'il manque deux parties au premier Joueur pour achever, & trois parties au se-

cond, de sorte qu'il leur manque ensemble 5 parties pour achever, ôtez 1 de cette somme 5, & parce qu'il reste 4, supposez ces quatre lettres semblables *aaaa* favorables au premier, & ces quatre lettres semblables *bbbb* favorables au second.

Combinez ensemble ces huit lettres, comme vous le voyez dans cette Table, ou des 16 combinaisons, les 11 premières à la gauche, où il y a au moins deux *a*, seront prises pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties: & les 5 dernières vers la droite, où il y a au moins trois *b*, seront prises pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le second, parce qu'il lui manque trois parties. Ainsi le parti du premier Joueur est au parti du second, comme 11 est à 5, &c.

4. Cas. Parce que pour résoudre le quatrième Cas, où l'on a supposé qu'il manquoit au premier Joueur une partie pour achever, & quatre au second, il vient la même somme 5 des parties qui manquent ensemble à ces deux Joueurs, on se servira des 16 combinaisons précédentes, entre lesquelles on en trouvera 15, où il y a au moins une lettre *a*, parce qu'il manque au premier Joueur une partie, pour le nombre des hazards qui le peuvent faire gagner, & seulement une, où il y a quatre *b*, parce qu'il manque au second Joueur quatre parties; pour un seul hazard qui le peut faire gagner; de sorte que le parti du même Joueur est au parti du second, comme 15 est à 1. Ainsi des autres.

Du Jeu des Dez.

Pour ſçavoir entre deux Joueurs l'avantage que peut avoir celui qui entreprend d'amener, par exemple, 6 avec un Dé en un certain nombre de coups, & premièrement au premier coup; on conſiderera que le parti à l'entreprendre du premier coup eſt de 1 contre 5, parce que celui qui tient le Dé, n'a qu'un hazard pour gagner, & qu'il en a 5 pour ne rien gagner. Par conféquent pour l'entreprendre en un ſeul coup, il ne doit mettre que 1 contre 5, ou ce qui eſt la même choſe, parier 1 contre 5. Ce qui fait voir que d'entreprendre d'amener 6 avec un Dé en un coup, il y a deſavantage.

Pour entreprendre d'amener 6 en deux coups avec un Dé, on conſiderera que c'eſt la même choſe que d'entreprendre en jettant deux Dez à la fois d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le Dé, n'a que 11 hazards pour gagner; car il peut amener 6 avec le premier Dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le ſecond; ou bien 6 avec le ſecond Dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le premier; ou bien encore 6 avec chaque Dé. Mais il a 25 ha-

| | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1, 1 | 2, 1 | 3, 1 | 4, 1 | 5, 1 |
| 1, 2 | 2, 2 | 3, 2 | 4, 2 | 5, 2 |
| 1, 3 | 2, 3 | 3, 3 | 4, 3 | 5, 3 |
| 1, 4 | 2, 4 | 3, 4 | 4, 4 | 5, 4 |
| 1, 5 | 2, 5 | 3, 5 | 4, 5 | 5, 5 |

zards pour ne rien gagner, comme vous voyez ici. D'où il eſt aiſé de conclure, que celui qui entreprend en deux coups d'amener 6 avec un Dé, ne

doit mettre que 11 contre 25, & qu'ainsi il y a desavantage de l'entreprendre au pair.

Vous prendrez garde que la somme 36 de tous les hazards 11, 25, est le quarré du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en deux coups avec un Dé : & que le nombre 25 des hazards qui peuvent empêcher celui qui tient le Dé de gagner, est le quarré du même nombre donné 6 moins 1, c'est-à-dire, de 5. C'est pourquoi pour trouver le nombre des hazards favorables à celui qui tient le Dé, il n'y a qu'à ôter 1 du double 12 du nombre donné 6, & le reste 11 sera le nombre qu'on cherche ; on ôtera ce reste 11 de 36 quarré du même nombre donné 6 : ce second reste 25 qui sera toujours un nombre quarré, sera le nombre des hazards contraires à celui qui tient le Dé.

Pour entreprendre d'amener 6 en trois coups avec un Dé, on considérera pareillement que c'est la même chose que d'entreprendre en jettant trois Dez à la fois, d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le Dé, a 91 hazards favorables, & 125 contraires, & ainsi il ne doit mettre que 91 contre 125, où vous voyez qu'il y a encore desavantage à entreprendre au pair d'amener 6 en trois coups avec un Dé.

Vous remarquerez que la somme 216 de tous les hazards 91, 125, est le cube du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en trois coups avec un Dé, & que le nombre 125 des hazards contraires à celui qui tient le Dé, est le cube du même nombre donné 6 moins 1, c'est-à-dire, de 5. C'est pourquoi pour trouver le nombre des hazards qui peuvent faire gagner celui qui tient le Dé, il n'y a qu'à ôter du cube 216 du

nombre donné 6 , le cube 125 du même nombre donné 6 moins 1 , ou de 5.

C'est de la même façon qu'on trouvera l'avantage que peut avoir celui qui entreprendroit en quatre coups d'amener 6 avec un Dé. Car si l'on ôte de la quatrième puissance , ou du quarré-quarré 1296 du nombre donné 6 , le quarré-quarré 625 du même nombre donné 6 moins 1 , ou de 5 , le reste donnera 671 hazards favorables à celui qui tient le Dé : & le plus petit quarré-quarré précédent 625 , sera le nombre des hazards contraires à celui qui tient le Dé. Où vous voyez que celui qui entreprend en quatre coups d'amener 6 avec un Dé , peut mettre 671 contre 625 , & qu'ainsi il y a avantage à l'entreprendre au pair.

L'avantage sera plus grand à entreprendre d'amener 6 en cinq coups avec un Dé , comme on le connoîtra en ôtant de la cinquième puissance , ou sursolide 7776 du nombre donné 6 , le sursolide 3125 du même nombre donné 6 moins 1 , ou de 5. Car le reste 4651 sera le nombre des hazards favorables à celui qui tient le Dé : & le plus petit sursolide précédent 3125 sera le nombre des hazards contraires à celui qui tient le Dé. Où l'on voit que celui qui entreprend en cinq coups d'amener 6 avec un Dé , peut mettre 4651 contre 3125 , & qu'ainsi il y a de l'avantage à l'entreprendre au pair.

Si vous voulez sçavoir le parti de celui qui voudroit entreprendre d'amener en un coup avec deux ou plusieurs Dez une Rasse déterminée , par exemple , Terne , vous considererez que s'il l'entreprendoit avec deux Dez , il n'auroit qu'un hazard pour gagner , & 35 pour perdre : parce que deux Dez peuvent se combiner en 36 façons différentes , c'est-

à-dire , que leurs faces qui sont au nombre de 6 , peuvent avoir 36 assietes différentes , comme vous le voyez dans cette Table , ce nombre 36 étant le

| | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 1, 1 | 2, 1 | 3, 1 | 4, 1 | 5, 1 | 6, 1 |
| 1, 2 | 2, 2 | 3, 2 | 4, 2 | 5, 2 | 6, 2 |
| 1, 3 | 2, 3 | 3, 3 | 4, 3 | 5, 3 | 6, 3 |
| 1, 4 | 2, 4 | 3, 4 | 4, 4 | 5, 4 | 6, 4 |
| 1, 5 | 2, 5 | 3, 5 | 4, 5 | 5, 5 | 6, 5 |
| 1, 6 | 2, 6 | 3, 6 | 4, 6 | 5, 6 | 6, 6 |

quarré du nombre 6 des faces de deux Dez. S'il y avoit trois Dez au lieu de 36 quarré de 6 , on auroit le cube 216 pour le nombre des combinaisons entre trois Dez ; & s'il y avoit quatre Dez , on auroit le quarré-quarré 1296 du même nombre 6 , pour le nombre des combinaisons entre quatre Dez , & ainsi de suite.

D'où il suit qu'on ne doit mettre que 1 contre 35 , pour faire une Raffle déterminée avec deux Dez en un coup. On connoitra par un semblable raisonnement , qu'on ne doit mettre que 3 contre 213 , pour faire une Raffle déterminée avec trois Dez en un coup , & 6 contre 1290 , ou 1 contre 215 avec quatre Dez , & ainsi de suite ; parce que des 216 hazards qui se trouvent entre trois Dez , il y en a trois pour celui qui tient le Dé , puisque trois choses se peuvent combiner deux à deux en trois façons , & par conséquent 213 contraires à celui qui tient le Dé : & que des 1296 hazards qui se trouvent entre quatre Dez , il y en a six qui sont favorables à celui qui tient le Dé , puisque quatre choses se combinent deux à deux en six façons , & par conséquent 1290 contraires à celui qui tient le Dé.

Mais si vous voulez sçavoir le parti de celui qui entreprendroit de faire une Raffle quelconque du premier coup avec deux ou plusieurs Dez, il ne sera pas difficile de connoître qu'il doit mettre 6 contre 30, ou 1 contre 5 avec deux Dez : parce que si des 36 hazards qui se trouvent entre deux Dez, on ôte 6 hazards qui peuvent produire une Raffle, il reste 30. On connoitra aussi aisément qu'avec trois Dez il peut mettre 18 contre 198, ou 1 contre 11 : parce que si des 216 hazards qui se rencontrent entre trois Dez, on ôte 18 hazards qui peuvent produire une Raffle, il reste 198, &c.

PROBLEME XIV.

Plusieurs Dez étant jettez, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.

SI quelqu'un a jetté sur une table, par exemple, trois Dez, que nous appellerons A, B, C, dites-lui d'ajouter tous les points de dessus, & ceux de dessous de deux Dez seulement tels qu'on voudra, comme des deux derniers B, C, puis de mettre à part le troisième A, sans en changer l'assiete. Dites-lui ensuite de jeter de nouveau les deux mêmes Dez B, C, d'ajouter à la somme précédente tous les points de dessus, & ceux de dessous de l'un de ces Dez, comme du second C, pour avoir une seconde somme, & de mettre à part le premier B, proche du précédent A, sans en changer l'assiete. Enfin faites-lui jeter le dernier Dé C, & dites-lui d'ajouter à la seconde somme précédente le nombre des points de dessus, pour avoir une troisième somme, que vous trouverez en cette sorte. Le troisième Dé C, ayant été mis près des deux autres, sans

en changer la situation , approchez-vous de la table , comptez tous les points qui se trouveront au-dessus de ces trois Dez , ajoutez à leur somme autant de fois 7 , qu'il y a de Dez , comme ici trois fois 7 , ou 21 , (ce nombre 7 étant le nombre des points des deux faces opposées d'un Dé , quand il est bien fait ;) la somme sera celle qu'on cherche.

Supposons qu'ayant jetté pour la première fois les trois Dez A , B , C , il soit venu en dessus ces trois points 1 , 4 , 5 , & ayant mis , par exemple , le premier 1 à part , faites ajouter à ces trois points 1 , 4 , 5 , les deux 3 , 2 , qui se trouvent au-dessous des deux autres , dont les points de dessus sont 4 , 5 , pour avoir la première somme 15. Supposons maintenant , que les deux mêmes Dez étant jettés il vienne en dessus ces deux points 3 , 6 , celui qui a 3 ayant été mis à part près de celui qui avoit 1 , faites ajouter ces deux points 3 , 6 , & encore 1 , qui se trouve au-dessous du troisième Dé restant , qui a 6 au dessus ; la somme 10 étant ajoutée à 15 première somme trouvée , on aura cette seconde somme 25. Supposons enfin que ce troisième Dé étant jetté seul une troisième fois , il vienne 6 en dessus , vous ferez mettre ce Dé avec les autres , sans le changer , & ajouter le 6 à la seconde somme 25 , pour avoir cette troisième somme 31 : vous devinerez cette dernière somme en ajoutant 21 à la somme 10 des points 1 , 3 , 6 , qui se trouvent au-dessus des trois Dez restans , dont vous vous ferez approché pour connoître cette somme 10 de leurs points 1 , 3 , 6.

R E M A R Q U E S.

Ce Problème peut se résoudre avec plus de trois

Dez, il ne faut qu'observer combien de fois on fait ajouter les points de deux faces opposées d'un Dé, & retenir autant de fois 7 pour les ajouter, après que le dernier Dé aura été jetté, à la somme des faces du dessus de tous les Dez qu'on aura fait mettre à part. Si l'on avoit jetté quatre Dez, par exemple, on trouveroit qu'en faisant la même chose qu'on vient de faire, on fait prendre six fois les points des deux faces opposées d'un Dé, & qu'ainsi il faudroit ajouter 6 fois 7, ou 42 à la somme des points des faces de dessus des Dez, dont on se seroit approché. De même, on trouveroit que pour cinq Dez, on auroit fait prendre dix fois les points des deux faces opposées d'un Dé, & que par conséquent il faudroit ajouter 10 fois 7 ou 70 à la somme des faces de dessus des cinq Dez dont on se seroit approché. Ce sera la même règle pour tel nombre de Dez qu'on aura choisi.

Il faut prendre garde que les Dez soient marquez, comme on l'a déjà dit, en sorte que les points de deux faces opposées étant ajoutez fassent 7. La démonstration de ce Problème n'est fondée que sur cette structure; car toutes les fois qu'on fait prendre les points de deux faces opposées, on est assuré que leur somme est 7. Donc puisqu'avec trois Dez on fait prendre trois fois les points de deux faces opposées, c'est la même chose que de faire prendre 21. Par conséquent ajoutant 21 à tous les autres points qu'on assemble, il est évident qu'on a la somme de tous les points. Il en est de même pour tel autre nombre de Dez qu'on aura fait jeter.

PROBLEME XV.

Deux Dez étant jettez , trouver les points de dessus de chaque Dé , sans les voir.

Quelqu'un ayant jetté deux Dez sur une table , faites-lui ajouter 5 au double des points de dessus de l'un de ces deux Dez , puis lui ayant fait multiplier la somme par le même nombre 5 , dites-lui d'ajouter au produit le nombre des points de dessus du second Dé. Enfin ayant demandé cette seconde somme , ôtez-en 25 quarré du même nombre 5 : le reste sera un nombre composé de deux figures , dont la première vers la droite , qui représente les dixaines , sera le nombre des points de dessus du premier Dé , & la seconde vers la gauche qui représente les unitez , sera le nombre des points de dessus du second Dé.

Supposons que le nombre des points de dessus du premier Dé soit 2 , & que le nombre des points de dessus du second Dé soit 3. Si on double 2 , nombre des points de dessus du premier Dé , & qu'au double 4 on ajoute 5 , on aura 9 , qui étant multiplié par le même nombre 5 , donnera 45 , auquel ajoutant 3 , nombre des points de dessus du second Dé , on aura 48 , d'où ôtant 25 quarré du même nombre 5 , il reste 23 , dont la première figure 2 , montre le nombre des points de dessus du premier Dé , & l'autre figure 3 fait connoître le nombre des points de dessus du second Dé.

Autrement.

Ou bien demandez à celui qui a jetté les deux Dez , combien font ensemble les points de dessous,

& de combien le nombre des points de dessous de l'un des Dez surpasse le nombre des points de dessous de l'autre Dé; si cet excès est, par exemple, 1, & que la somme de tous les points de dessous soit 9, ajoutez ces deux nombres 1, 9, & ôtez 10 leur somme de 14: la moitié 2 du reste 4 sera le nombre des points de dessus de l'un des deux Dez. Pour avoir le nombre des points de dessus de l'autre Dé, au lieu d'ajouter l'excès 1 à la somme 9, il le faut ôter, & ayant ôté de 14 le reste 8, on aura ce second reste 6, dont la moitié 3 sera le nombre qu'on cherche.

Encore autrement.

Ou bien encore, dites à celui qui a jetté les deux Dez, d'ajouter les points de dessus, & de vous dire leur somme, qui sera, par exemple, 5. Dites-lui encore de multiplier le nombre des points de dessus d'un Dé par le nombre des points de dessous de l'autre Dé, & de vous dire leur produit, que nous supposons 6. Par le moyen de ce produit & de la somme précédente 5, vous trouverez le nombre des points de dessus de chaque Dé en cette sorte. Multipliez la somme 5 par elle-même, pour avoir son quarré 25, duquel vous ôterez 24 quadruple du produit 6, & il reste 1, dont vous prendrez la racine quarrée, qui est aussi 1; laquelle étant ajoutée & ôtée de la somme précédente 5, donnera ces deux nombres 6, 4, dont les moitez 3, 2, seront les nombres des points de dessus de chaque Dé.

PROBLEME XVI.

Trois Dez étant jettez, trouver les points de dessus de chaque Dé sans les voir.

Quelqu'un ayant jetté trois Dez sur une table, faites-les ranger en ligne droite l'un près de l'autre. Demandez la somme des points de dessous du premier & du second Dé, qui sera, par exemple, 9; celle des points de dessous du second & du troisième Dé, que nous supposerons 5; enfin la somme des points de dessous du premier & du troisième Dé, qui soit 6. Par le moyen de ces trois sommes, ou nombres connus 9, 5, 6, on trouvera le nombre des points de dessus du premier Dé: car en ôtant de 15 somme du premier & du troisième nombre le second 5, & en ôtant de 14 le reste 10, on aura cet autre reste 4, dont la moitié 2 sera le nombre des points de dessus du premier Dé. Pour trouver le nombre des points de dessus du second Dé, ôtez de 14 somme des deux premiers nombres 9, 5, le troisième 6; puis ôtez de 14 le reste 8, pour avoir un second reste 6, dont la moitié 3 sera le nombre des points de dessus du second Dé. Enfin pour avoir le nombre des points de dessus du troisième Dé, ôtez de 11 somme du second nombre 5, & du troisième 6, le premier 9; ensuite ôtez de 14 le reste 2, pour avoir un second reste 12, dont la moitié 6 sera le nombre des points de dessus du troisième Dé.

Autrement.

Les trois Dez ayant été jettez, faites doubler le nombre des points de l'un de ces Dez, puis

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 141

vous ferez ajouter 5 à ce double , multiplier la somme par 5 , & ajouter 10 à ce produit. Faites ensuite ajouter à ce total le nombre des points du second Dé , & multiplier cette somme par 10. Enfin ayant ajouté à ce dernier produit le nombre des points du troisième Dé , vous demanderez la somme qui sera venue après toutes ces opérations. Vous en ôterez 350 , & les trois nombres qui resteront , marqueront le nombre des points de chaque Dé , en sorte que celui qui sera à la place des centaines , sera le nombre des points du premier Dé ; celui qui sera à la place des dizaines , sera le nombre des points du second Dé , & celui qui sera à la place des unités , sera le nombre des points du troisième Dé.

Si , par exemple , on amène ces trois nombres 2 , 3 , 6 , le double de 2 est 4 , auquel ajoutant 5 , il vient 9 , qui étant multiplié par 5 , donne 45 , auquel on ajoutera 10 , & l'on aura 55. Ensuite ayant ajouté 3 nombre des points du second Dé à cette somme 55 , on aura 58 , qui étant multiplié par 10 , donnera 580. Enfin on ajoutera 6 , nombre des points du troisième Dé , à 580 , la somme sera 586. Toutes ces opérations auront été faites en secret. Mais lorsque vous sçauvez que le total est 586 , vous en ôterez 350 , il restera 236. Chacun de ces chiffres pris desuite , marque le nombre des points de chaque Dé 2 , 3 , 6.

REMARQUES.

On vient de voir que quand on a jetté trois Dez , il falloit ôter 350 de la somme demandée & connue ; mais si l'on avoit jetté quatre Dez , il faudroit continuer à faire la même chose pour le qua-

trième Dé , que ce qu'on a fait pour les trois autres , & ôter de la somme demandée 3500. Il en est de même pour un plus grand nombre de Dez, il faudra ôter de la somme demandée le nombre 350 , augmenté d'autant de zeros qu'il y aura de Dez qui surpasseront les trois qu'on a d'abord jetté. Par exemple , s'il y avoit quatre Dez , dont les points fussent 3 , 5 , 8 , 2 , ayant fait doubler le 3 , point du premier Dé , il viendra 6 , auquel faisant ajouter 5 , la somme fera 11 , qui multiplié par 5 , donne 55 : & faisant ajouter 10 à ce produit , on aura 65. Ensuite on fera ajouter à 65 le 5 , point du second Dé , & l'on aura 70 , qui multiplié par 10 , donnera 700 , auquel on fera ajouter le 8 , point du troisième Dé , & la somme fera 708 : cette somme ayant été multipliée par 10 , il viendra 7080. On fera ajouter le 2 , point du quatrième Dé à ce produit , on aura 7082. Enfin après avoir connu cette somme 7082 , on en ôtera 3500 , & le reste 2582 exprimera par ordre les points de chaque Dé 3 , 5 , 8 , 2.

On voit que les points 8 , 2 des deux derniers Dez , n'ont point été changez par les opérations : c'est pourquoi afin de mieux couvrir l'artifice , il seroit à propos de faire ajouter à la somme totale 7082 quelque nombre , comme 12 , l'on auroit 7094 : puis ayant demandé cette dernière somme , on en ôteroit 3512 , & il resteroit le même nombre qu'auparavant 3582.

La méthode qu'on vient de proposer pour deviner les points de plusieurs Dez jettez , peut très-bien servir à deviner plusieurs nombres pensez. Ainsi on peut l'ajouter à toutes les diverses manières qu'on va enseigner dans les Problèmes suivans.

PROBLEME XVII.

Deviner le nombre que quelqu'un a pensé.

I.

FAites multiplier par lui-même le nombre pensé ; dites ensuite d'ajouter à ce quarré le double du nombre pensé ; puis faites ajouter l'unité à la somme du quarré & du double : enfin ayant demandé quelle est cette somme , vous en tirerez la racine quarrée , d'où ayant ôté l'unité , il restera le nombre pensé.

Comme si quelqu'un a pensé 6 , le quarré de ce nombre est 36 , auquel si on ajoute 12 double de 6 , on aura 48 : ce nombre augmenté de l'unité , donnera 49. On tirera la racine quarrée de 49 , qui est 7 , ôtant 1 de 7 , on aura 6 pour le nombre pensé.

II.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé , faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double , faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition , ajoutez-y 3 ; la troisième partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on en ôte 1 , il restera 4 , dont le double 8 étant diminué de 1 , & le reste 7 étant augmenté du nombre pensé 5 , on a cette somme 12 , à laquelle ajoutant 3 , on a cette autre somme 15 , dont la troisième partie 5 est le nombre pensé.

III.

Ou bien après avoir fait ôter 1 du nombre pen-

fé, faites tripler le reste, & après avoir aussi fait ôter 1 de ce triple, faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, vous y ajouterez 4 ; la quatrième partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reste 11 étant augmenté du nombre pensé 5, on a cette somme 16, à laquelle ajoutant 4, on a cette autre somme 20, dont la quatrième partie 5 est le nombre pensé.

I V.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin demandez le nombre qui vient de cette dernière addition, dont vous ôterez 3, la troisième partie du reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la somme 13 étant augmentée du nombre pensé 5, on a cette somme 18, de laquelle ôtant 3, il restera 15, dont la troisième partie 5 est le nombre pensé.

V.

Ou bien après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé, faites tripler la somme, & après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette dernière addition, vous en ôterez 4 ; la quatrième partie du reste sera le nombre pensé.

Comme

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le triple 18 étant augmenté de 1, & la somme 19 étant augmentée du nombre pensé 5, on a cette somme 24, de laquelle ôtant 4, il restera 20, dont la quatrième partie 5 est le nombre pensé.

V I.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé, faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ôter du reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette dernière soustraction, vous y ajouterez 3 ; la somme fera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le double 8 étant diminué de 1, & le reste 7 étant encore diminué du nombre pensé 5, il reste 2 : auquel ajoutant 3, la somme 5 est le nombre pensé.

V I I.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ôter de la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette soustraction, vous en ôterez 3 ; le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1 ; on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la somme 13 étant diminuée du nombre pensé 5, il restera 8, dont ôtant 3, le reste 5 est le nombre pensé.

V I I I.

Après avoir fait ôter 1 du nombre pensé, faites tripler le reste, & après avoir aussi fait ôter 1 de

ce triple , faites ôter du reste le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette dernière soustraction , vous y ajouterez 4 ; la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on en ôte 1 , il restera 4 , dont le triple 12 étant diminué de 1 , & le reste 11 étant encore diminué de 10 double du nombre pensé 5 , il reste 1 , auquel ajoutant 4 , la somme 5 est le nombre pensé.

IX.

Après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé , faites tripler la somme , & après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple , faites ôter de la somme le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste , vous en ôterez 4 ; le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on y ajoute 1 , l'on aura 6 , dont le triple 18 étant augmenté de 1 , & la somme 19 étant diminuée de 10 double du nombre pensé 5 , on a ce reste 9 , dont ôtant 4 , le reste 5 est le nombre pensé.

X.

Dites à celui qui aura pensé un nombre , de multiplier ce nombre par 3 , & de prendre la moitié de ce triple , au cas qu'il le puisse faire sans reste ; s'il ne peut le faire sans reste , vous lui ferez ajouter 1 à ce triple , pour en pouvoir prendre justement la moitié , que vous ferez encore multiplier par 3. Après quoi vous demanderez combien il y a de fois 9 dans ce dernier triple , & vous prendrez autant de fois 2 , qu'il y aura de fois 9 , pour le nombre qui aura été pensé. Mais vous vous souviendrez d'ajouter 1 , si vous l'avez fait ajout-

ter auparavant, lorsque la division par 2 n'aura pû se faire sans reste.

Comme si l'on a pensé 5, son triple est 15, dont on ne peut prendre exactement la moitié; c'est pourquoi on y ajoutera 1, & l'on aura 16, dont la moitié 8 étant multipliée encore par 3, on a ce produit 24, dans lequel 9 est compris 2 fois: donc prenant 2 fois 2, on a ce nombre 4, auquel ajoutant 1, qu'on a fait ajouter auparavant, la somme 5 est le nombre pensé.

Remarquez que le nombre pensé sera 1, lorsque le nombre 9 ne sera point contenu dans le dernier triple.

Pour ôter les 9 autant de fois qu'il se pourra, faites ôter 27, ou 36, ou 72, &c. si ces nombres y sont contenus, puis faites ôter 9 du reste, si cela se peut, & ainsi autant de fois qu'il sera possible, il paroîtra que c'est une manière différente de celle qu'on vient d'enseigner.

XI.

Faites ajouter & ôter 1 du nombre pensé, pour avoir une somme & un reste, que vous ferez multiplier ensemble, & demandez le produit qui vient de la multiplication: si vous ajoutez 1 à ce produit, la racine quarrée de la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à 5, on a la somme 6, & ôtant 1 de 5, on a le reste 4; puis multipliant la somme 6 par le reste 4, on a au produit 24, auquel ajoutant 1, la racine quarrée 5 de la somme 25 est le nombre pensé.

XII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites

148 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

multiplier la somme par le nombre pensé, & faites ôter du produit le même nombre pensé : enfin demandez le nombre qui restera de cette soustraction, la racine quarrée de ce reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à 5, on a 6, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, donne 30, d'où ôtant le même nombre pensé 5, il reste 25, dont la racine quarrée 5 est le nombre pensé.

XIII.

Ou bien ayant fait ôter 1 du nombre pensé, faites multiplier le reste par le nombre pensé ; puis faites ajouter au produit le même nombre pensé : enfin demandez la somme qui vient de cette addition ; la racine quarrée de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ôtant 1 de 5, il reste 4, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, donne 20, auquel ajoutant le même nombre pensé 5, on a 25, dont la racine quarrée 5 est le nombre pensé.

XIV.

Ayant fait ajouter 2 au nombre pensé, faites ajouter à la somme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 12 ; vous ferez encore ajouter à la somme un 0 vers la gauche, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 320 : enfin vous demanderez le reste, dont les figures significatives vers la gauche, en retranchant les deux zeros, qui se rencontreront toujours à la droite, représenteront le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en y ajoutant 2, on a 7, auquel ajoutant un 0 vers la droite, on a 70,

auquel si l'on ajoute 12, on a 82; puis ajoutant encore un 0 vers la droite, on a 820, d'où ôtant 320, il reste 500, dont retranchant les deux zeros à la droite, le reste 5 est le nombre pensé.

X V.

Ayant fait ajouter 5 au double du nombre pensé, faites ajouter à la somme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre 10 fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 20: puis vous ferez encore ajouter à la somme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 700: enfin vous demanderez le reste, dont vous retrancherez les deux zeros, qui se rencontreront toujours à la droite, & la moitié du nombre qui restera vers la gauche, sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ajoutant 5 à son double 10, on a 15, auquel ajoutant un 0 vers la gauche, on a 150, auquel si l'on ajoute 20, on a 170; puis ajoutant à ce nombre un 0 vers la droite, on a 1700, d'où ôtant 700, on a 1000, dont retranchant deux zeros à la droite, la moitié 5 du reste 10 est le nombre pensé.

X V I.

Ces deux dernières méthodes ne sont pas extrêmement subtiles, parce que le dernier nombre étant connu, il est aisé en rétrogradant de connaître les autres nombres, & par conséquent le nombre pensé. C'est pourquoi il vaudra mieux se servir des deux méthodes suivantes, dont le secret est plus caché.

Ayant fait ajouter 1 au triple du nombre pensé, faites multiplier la somme par 3; puis ayant fait

ajouter à ce triple le nombre pensé, demandez le nombre qui viendra de cette addition ; car si vous ôtez 3 de cette somme, & que du reste vous retranchiez le 0 qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à son triple 15, on a 16, dont le triple est 48, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 53, d'où ôtant 3, & retranchant du reste 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

XVII.

Ayant fait ôter 1 du triple du nombre pensé, faites multiplier le reste par 3 ; puis ayant fait ajouter au produit le nombre pensé, demandez le nombre qui vient de cette addition ; car si vous ajoutez 3 à cette somme, & que de cette seconde somme vous retranchiez le 0, qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ôtant 1 de son triple 15, il reste 14, dont le triple est 42, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 47, auquel ajoutant 3, & retranchant de la somme 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

COROLLAIRES.

Il suit de ces deux dernières méthodes, que, si on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme, on aura une seconde somme qui se terminera par 3. Comme si on ajoute l'unité au triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6 au

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 151
triple 57 de la somme 19 , on a cette seconde somme 63 , qui se termine par 3.

Il s'ensuit aussi que si on ôte l'unité du triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple du reste, on aura une somme qui se terminera par 7. Comme si on ôte l'unité du triple 18 du nombre 6 , & qu'on ajoute le même nombre 6 au triple 51 du reste 17 , on a cette somme 57 , qui se termine par 7.

Enfin il s'ensuit que ce Problème double est impossible ; Trouver un nombre tel , qu'e si on ajoute l'unité à son triple, ou qu'on ôte l'unité de son triple, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme ou du reste, la somme soit un quarré parfait ; parce que tout nombre qui finit par 3 , ou par 7 , ne peut avoir une racine quarrée exacte , comme on a dit au *Probl. VIII. p. 19.* Voyez le Problème suivant.

PROBLEME XVIII.

Trouver le nombre qui reste à quelqu'un après quelques opérations , sans lui rien demander.

Ayant fait penser un nombre à volonté , faites ajouter à son double un nombre pair , tel qu'il vous plaira , par exemple , 8 ; puis faites ôter de la moitié de la somme le nombre pensé : ce qui restera sera la moitié du nombre pair que vous aviez fait ajouter auparavant , sçavoir , 4. Ainsi vous direz hardiment qu'il reste 4 ; ce qui surprendra agréablement ceux qui n'en verront pas d'abord la raison , quoique la démonstration en soit facile.

C'est pourquoi pour sçavoir adroitement le nombre qui aura été pensé , faites semblant d'ignorer le reste 4 , & faites-le ôter du nombre pensé , si le

nombre pensé est plus grand , ou faites-en ôter le nombre pensé , si le nombre pensé est plus petit ; puis demandez le reste. Si vous ajoutez ce reste à la moitié 4 du nombre 8 , que vous aviez fait ajouter au nombre pensé , si le nombre pensé a été trouvé plus grand que cette moitié 4 , ou si vous ôtez ce reste de la même moitié 4 , si le nombre pensé a été trouvé plus petit que cette moitié 4 , vous aurez le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on ajoute 8 à son double 10 , on aura 18 , dont la moitié est 9 , d'où ôtant le nombre pensé 5 , il reste 4 , moitié de 8 nombre ajouté , & si l'on ôte cette moitié 4 du nombre pensé 5 , qui est plus grand , il restera 1 ; ce reste étant ajouté à la même moitié 4 , parce que le nombre pensé 5 s'est trouvé plus grand que cette moitié 4 , on aura la somme 5 , qui est le nombre pensé.

De même , si on ajoute 12 au double 10 du nombre pensé 5 , on aura 22 , dont la moitié est 11 , d'où ôtant le nombre pensé 5 , il reste 6 , moitié du nombre ajouté 12 ; & si de cette moitié 6 on ôte le nombre pensé 5 , qui est plus petit , il restera 1 ; ce reste étant ôté de la même moitié 6 , parce que le nombre pensé 5 s'est trouvé moindre que cette moitié 6 , on aura un autre reste 5 , qui est le nombre pensé.

Autrement.

Faites ôter du double du nombre pensé un nombre pair moindre & tel qu'il vous plaira , par exemple , 4 : faites encore ôter la moitié du reste du nombre pensé , le reste sera 2 , moitié du nombre ôté 4 : c'est pourquoi pour trouver le nombre pensé , faites ajouter à cette moitié 2 le nombre

pensé, & demandez la somme, qui soit, par exemple, 7, dont si vous ôtez la même moitié 2, le reste 5 sera le nombre pensé.

Autrement.

On peut encore trouver plus facilement le nombre que quelqu'un aura pensé, en lui faisant ajouter un nombre à volonté, & en faisant multiplier la somme par le nombre pensé. Ensuite ayant fait ôter du produit le quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ajouter; le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute, par exemple, 4, on aura 9, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, on a 45, d'où ôtant le quarré 25 du nombre pensé 5, & le reste 20 étant divisé par le nombre 4, qui a été ajouté auparavant, le quotient donne 5 pour le nombre pensé.

Autrement.

Ou bien faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira: faites multiplier le reste par le nombre pensé; faites ôter ce produit du quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ôter du nombre pensé, le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, produit 10. Ce nombre 10 étant ôté de 25, quarré du nombre pensé 5, il reste 15, qui étant divisé par le nombre 3, qui a été ôté du nombre pensé, donne pour quotient 5, qui est le nombre pensé.

Autrement.

La manière la plus facile de toutes pour deviner le nombre que quelqu'un aura pensé, est la suivante. Faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira, & mettre le reste à part. Faites ajouter le même nombre au nombre pensé, & ajouter à la somme le reste précédent, pour avoir une seconde somme, que vous demanderez; la moitié de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2; si l'on ajoute le même nombre 3 au nombre pensé 5, on aura 8, auquel ajoutant le précédent reste 2, on a 10, dont la moitié 5 est le nombre pensé.

PROBLEME XIX.

Trouver le nombre que quelqu'un aura pensé, sans lui rien demander.

FAites ajouter au nombre pensé sa moitié, s'il est pair, ou sa plus grande moitié, s'il est impair, pour avoir une première somme. Faites aussi ajouter à cette somme sa moitié, ou sa plus grande moitié, selon qu'elle sera un nombre pair ou impair, pour avoir une seconde somme, dont vous ferez ôter le double du nombre pensé; ensuite faites prendre la moitié du reste, ou sa plus petite moitié, au cas que ce reste soit un nombre impair: continuez à faire prendre la moitié de la moitié, jusqu'à ce qu'on vienne à l'unité. Cela étant fait, remarquez combien de subdivisions on aura faites, & pour la première division retenez 2, pour la se-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 159

conde 4, pour la troisième 8, & ainsi des autres en proportion double. Observez qu'il faut ajouter 1 pour chaque fois que vous aurez pris la plus petite moitié, parce qu'en prenant cette plus petite moitié, il reste toujours 1, & qu'il faut seulement retenir 1, lorsqu'on n'aura pu faire aucune soustraction; car ainsi vous aurez le nombre dont on a pris les moitiés des moitiés, & alors le quadruple de ce nombre sera le nombre pensé, au cas qu'il n'ait point falu prendre au commencement la plus grande moitié, ce qui arrivera seulement lorsque le nombre pensé sera parement pair, ou divisible par 4; autrement on ôtera 3 de ce quadruple si à la première division l'on a pris la plus grande moitié, ou bien seulement 2, si à la seconde division l'on a pris la plus grande moitié, ou bien enfin 5, si à chacune des deux divisions on a pris la plus grande moitié, & alors le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 4, en lui ajoutant sa moitié 2, on a 6, auquel si l'on ajoute pareillement sa moitié 3, on a 9, d'où ôtant le double 8 du nombre pensé 4, il reste 1, dont on ne sçauroit prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité; c'est pourquoi on retiendra 1, dont le quadruple 4 est le nombre pensé,

Si l'on a pensé 5, en lui ajoutant sa plus grande moitié 3, on a 8, auquel si l'on ajoute sa moitié 4, on a 12, d'où ôtant le double 10 du nombre pensé 5, il reste 2, dont la moitié est 1: & comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une soustraction. Si de 8 quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 3, parce que dans la première division l'on a pris la plus grande moitié, le reste 5 est le nombre pensé.

Si le nombre pensé est 6, en lui ajoutant sa moitié 3, on a 9, auquel si l'on ajoute sa plus grande moitié 5, on a 14, d'où ôtant le double 12 du nombre pensé 6, il reste 2, dont la moitié est 1: comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une soudivision. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 2, parce que dans la seconde division l'on a pris la plus grande moitié, le reste 6 est le nombre pensé.

Si l'on a pensé 7, en lui ajoutant sa plus grande moitié 4, on a 11, auquel si l'on ajoute pareillement sa plus grande moitié 6, on a 17, d'où ôtant le double 14 du nombre pensé 7, il reste 3, dont la plus petite moitié est 1. Et comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité, on retiendra 2, auquel on ajoutera 1, parce qu'on a pris la plus petite moitié; ainsi on aura 3, dont le quadruple est 12, duquel ôtant 5, parce que dans la première & dans la seconde division l'on a pris la plus grande moitié, le reste 7 est le nombre pensé. Ainsi des autres.

PROBLEME XX.

Deviner deux nombres que quelqu'un aura pensé.

I.

Ayant fait ajouter ensemble les deux nombres pensez, pour avoir leur somme, & ayant fait ôter le plus petit du plus grand, pour avoir leur différence, faites multiplier la somme par la différence, & ajouter au produit le quarré du plus petit nombre pensé. Alors demandez le nombre qui vient de cette addition, & prenez-en la racine

quarrée, qui sera le plus grand des deux nombres pensez. Pour avoir le plus petit, au lieu de faire ajouter au produit le quarré du plus petit nombre pensé, faites ôter ce produit du quarré du plus grand nombre pensé, & demandez le nombre qui restera : la racine quarrée de ce reste sera le plus petit nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 3 & 5, en multipliant leur somme 8 par leur différence 2, on a le produit 16, auquel ajoutant le quarré 9 du plus petit nombre pensé 3, on a 25, dont la racine quarrée 5 est le plus grand des deux nombres pensez : & ôtant le même produit 16 de 25 quarré du plus grand nombre pensé 5, il reste 9, dont la racine quarrée 3 est le plus petit nombre pensé.

I I.

Faites ajouter à la somme des deux nombres pensez leur différence, & demandez le nombre qui vient de cette addition ; la moitié de ce nombre sera le plus grand des deux nombres pensez. Pour avoir le plus petit, faites ôter la différence des deux nombres pensez de leur somme, & demandez le nombre qui restera ; la moitié de ce reste sera le plus petit nombre pensé.

Comme dans cet exemple, en ajoutant la différence 2 des deux nombres pensez à leur somme 8, on a 10, dont la moitié 5 est le plus grand des deux nombres pensez ; & en ôtant la différence 2 de la somme 8, il reste 6, dont la moitié 3 est le plus petit nombre pensé.

I I I.

Faites multiplier la somme de deux nombres pensez par elle-même, pour avoir son quarré ;

puis ayant fait ajouter au plus petit des deux nombres pensez le double du plus grand , & ayant fait multiplier la somme par le plus petit , faites ôter le produit du précédent carré , & demandez le reste ; la racine carrée de ce reste sera le plus grand des deux nombres pensez. Pour avoir le plus petit , ayant fait ajouter au plus grand le double du plus petit , & ayant fait multiplier la somme par le plus grand , faites ôter le produit du précédent carré , & demandez le reste , dont la racine carrée sera le plus petit nombre pensé.

Comme dans cet exemple , où l'on a supposé que les deux nombres pensez sont 3 & 5 , leur somme est 8 , qui étant multipliée par soi-même , donne 64 pour son carré. En ajoutant au plus petit nombre pensé 3 le double 10 du plus grand 5 , on a 13 , qui étant multiplié par le plus petit 3 , donne 39 ; ce produit 39 étant ôté du précédent carré 64 , il reste 25 , dont la racine carrée 5 est le plus grand des deux nombres pensez. En ajoutant au plus grand nombre pensé 5 le double 6 du plus petit 3 , on a 11 , qui étant multiplié par le plus grand 5 , produit 55 ; ce produit 55 étant ôté du précédent carré 64 , il reste 9 , dont la racine carrée 3 est le plus petit nombre pensé.

I V.

Faites multiplier ensemble les deux nombres pensez , pour avoir leur produit. Faites aussi multiplier la somme des deux mêmes nombres par celui que vous voulez trouver , & faites ôter de ce produit le produit des deux nombres : après quoi vous demanderez le reste , dont la racine carrée sera le nombre que vous cherchez.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 159

Comme dans cet exemple, si l'on multiplie ensemble les deux nombres pensez 3, 5, on aura leur produit 15 : & si l'on multiplie leur somme 8 par le plus grand nombre 5, si vous le voulez trouver, on a ce produit 40, d'où ôtant le précédent produit 15, il reste 25, dont la racine quarrée 5, est le nombre qu'on cherche.

V.

Après avoir fait multiplier ensemble les deux nombres pensez, pour avoir leur produit, faites multiplier leur différence par le nombre que vous cherchez, & faites ajouter à ce produit le produit des deux nombres, si vous demandez le plus grand nombre, ou bien faites ôter ce produit du produit des deux nombres, si vous demandez le plus petit : alors si vous demandez le nombre qui vient de cette addition, ou de cette soustraction, & que vous en preniez la racine quarrée, vous aurez le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, après avoir multiplié ensemble les deux nombres pensez 3, 5, pour avoir leur produit 15, si l'on fait multiplier leur différence 2 par le plus grand nombre 5, & qu'on ajoute le produit 10 au premier produit 15, on aura 25, dont la racine quarrée 5 est le plus grand nombre. De même, si l'on multiplie leur différence 2 par le plus petit nombre 3, & qu'on ôte le produit 6 du premier 15, il restera 9, dont la racine quarrée 3 est le plus petit nombre pensé.

V I.

Lorsque le plus petit des deux nombres pensez ne passera pas 9, on les pourra deviner très-facilement en cette sorte. Ayant fait ajouter 1 au tri-

ple du plus grand des deux nombres pensez, faites encore ajouter au triple de cette somme les deux nombres pensez, & demandez le nombre qui vient de cette addition; si vous en ôtez 3, la première figure du reste vers la droite sera le plus petit nombre pensé, & ce qui restera vers la gauche, sera le plus grand.

Comme dans l'exemple qui vient d'être proposé, où les deux nombres sont 3, 5, ajoutant 1 à 15, triple du plus grand 5, on a 16, & ajoutant à 48 triple de cette somme 16 les deux nombres pensez 3, 5, ou 8, on a 56, d'où ôtant 3, il reste 53, dont la première figure 3 vers la droite est le plus petit nombre pensé, & l'autre figure 5 qui reste vers la gauche, est le plus grand.

P R O B L È M E X X I.

Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensé.

I.

S I la multitude des nombres pensez est impaire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisième, du troisième & du quatrième, & ainsi de suite jusqu'à la somme du premier & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en sorte que la somme du premier & du dernier soit la dernière, ôtez toutes les sommes qui seront dans les lieux pairs de toutes celles qui seront dans les lieux impairs, & la moitié du reste sera le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la première somme, il restera le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme, le reste sera le troisième nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme

Comme si l'on a pensé ces cinq nombres, 2, 4, 5, 7, 8, les sommes du premier & du second, du second & du troisième, & ainsi des autres jusqu'à la somme du premier & du cinquième sont 6, 9, 12, 15, 10 : ôtant 24, somme des deux 9, 15, qui sont dans les lieux pairs, de la somme 28 des trois 6, 12, 10, qui sont dans les lieux impairs, il reste 4, dont la moitié 2 est le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la première somme 6, le reste 4 est le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme 9, il reste 5 pour le second nombre pensé, &c.

II.

Si la multitude des nombres pensez est paire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisième, du troisième & du quatrième, & ainsi de suite jusqu'à la somme du second & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en forte que la somme du second & du dernier soit la dernière, ôtez de toutes les sommes qui seront dans les lieux pairs toutes celles qui seront dans les lieux impairs, excepté la première; la moitié du reste sera le second nombre pensé, par le moyen duquel il sera facile de trouver les autres. Car si on l'ôte de la première somme, il restera le premier nombre pensé, & si on l'ôte de la seconde somme, le reste sera le troisième nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la troisième somme, on aura pour reste le quatrième nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme si l'on a pensé ces six nombres, 2, 4, 5, 7, 8, 9, les sommes du premier & du second, du second & du troisième, du troisième & du quatrième, & ainsi de suite jusqu'à la somme du second

& du sixième, seront 6, 9, 12, 15, 17, 13 : ôtant 29 somme de la troisième 12, & de la cinquième 17, qui sont dans les lieux impairs, en omettant la première, de 37 somme des trois 9, 15, 13, qui sont dans les lieux pairs, il reste 8, dont la moitié 4 est le second nombre pensé, lequel étant ôté de la première somme 6, le reste 2 est le premier nombre pensé, & étant ôté de la seconde somme 9, le reste 5 est le troisième nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la troisième somme 12, il reste 7 pour le quatrième nombre pensé, & ainsi de suite.

I I I.

Lorsque chacun des nombres pensez ne sera composé que d'une figure, on les pourra trouver très-facilement en cette sorte. Ayant fait ajouter 1 au double du premier nombre pensé, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le second nombre pensé. S'il y a un troisième nombre, ayant fait pareillement ajouter 1 au double de la somme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le troisième nombre pensé. De même, s'il y a un quatrième nombre, ayant fait aussi ajouter 1 au double de la dernière somme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatrième nombre pensé, & ainsi de suite, s'il y a davantage de nombres pensez. Après cela demandez le nombre qui vient de l'addition du dernier nombre pensé, & ôtez-en 5 pour deux nombres pensez, 55 pour trois nombres pensez, 555 pour quatre nombres pensez, & ainsi de suite : alors la première figure du reste vers la gauche sera le premier nombre pensé, la suivante en allant vers la droite sera le second nom-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 163
bre pensé , & ainsi de suite jusqu'à la dernière figure vers la droite , qui représentera le dernier nombre pensé.

Comme si l'on a pensé ces quatre nombres 3 , 4 , 6 , 9 , en ajoutant 1 au double 6 du premier nombre pensé 3 , & en multipliant la somme 7 par 5 , on a 35 , auquel ajoutant le second nombre pensé 4 , on a 39 , dont le double est 78 , auquel ajoutant 1 , & multipliant la somme 79 par 5 , on a 395 , auquel ajoutant le troisième nombre pensé 6 , on a 401 , dont le double est 802 , auquel ajoutant 1 , & multipliant la somme 803 par 5 , il vient 4015 , auquel ajoutant le quatrième nombre pensé 9 , & ôtant de la somme 4024 ce nombre 555 , il reste 3469 , dont les quatre figures sont les quatre nombres pensez.

I V.

On peut encore résoudre très-facilement le Cas précédent par cette méthode. Ayant fait ôter 1 du double du premier nombre pensé , & ayant fait multiplier le reste par 5 , faites ajouter au produit le second nombre pensé , & demandez la somme , s'il n'y a plus de nombres pensez ; autrement faites ajouter 5 à cette somme , pour avoir une seconde somme , & ayant fait pareillement ôter 1 du double de cette seconde somme , faites aussi multiplier le reste par 5 , & faites ajouter au produit le troisième nombre pensé , & demandez la somme , s'il n'y a plus de nombres pensez ; autrement il faudra , comme auparavant , faire ajouter 5 à cette somme , pour avoir une autre somme ; & ayant fait de la même façon ôter 1 du double de cette autre somme , faites encore multiplier le reste par 5 , & faites ajouter au produit le qua-

trième nombre pensé , & si ce quatrième nombre est le dernier , demandez la somme , à laquelle si vous ajoûtez 5 , vous aurez une dernière somme , dont les figures représenteront comme auparavant les nombres pensez.

Comme dans la supposition que nous venons de faire de ces quatre nombres pensez 3 , 4 , 6 , 9 , en ôtant 1 du double 6 du premier nombre pensé 3 , & multipliant le reste 5 par 5 , on a 25 , auquel ajoûtant le second nombre pensé 4 , on a cette somme 29 , à laquelle si l'on ajoûte 5 , on a cette seconde somme 34 , dont le double est 68 , d'où ôtant 1 , il reste 67 , qui étant multiplié par 5 , donne 335 , auquel ajoûtant le troisième nombre pensé 6 , on a cette somme 341 , à laquelle ajoûtant 5 , on a cette autre somme 346 , dont le double 692 étant diminué de 1 , & le reste 691 étant multiplié par 5 , on a 3455 , auquel ajoûtant le quatrième nombre pensé 9 , on a cette somme 3464 , à laquelle ajoûtant 5 , on a cette dernière somme 3469 , dont les quatre figures représentent les quatre nombres pensez.

PROBLEME XXII.

Une personne tenant dans une main un certain nombre pair de pistoles , & un nombre impair en l'autre main , deviner en quelle main est le nombre pair.

FAites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair tel qu'il vous plaira , comme par 2 , & le nombre de la main gauche par un nombre impair , aussi tel qu'il vous plaira , comme par 3 ; puis ayant fait ajoûter ensemble les deux produits , faites prendre la moitié de leur somme.

Si cette moitié est juste, en sorte que la somme soit un nombre pair, vous connoîtrez que le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, est impair, & par conséquent que celui de la main gauche, qui a été multiplié par un nombre impair, est pair. Il arrivera tout le contraire, lorsque la moitié de la somme ne sera pas juste, c'est-à-dire, quand cette somme sera un nombre impair; car dans ce cas le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, sera pair, & celui de la main gauche, qui a été multiplié par un nombre impair, sera aussi impair.

Comme si dans la main droite il y a 9 pistoles, & 8 en la gauche, en multipliant le nombre 9 de la droite par 2, & le nombre 8 de la gauche par 3, & ajoutant ensemble les deux produits 18, 24, on aura leur somme 42, qui étant un nombre pair, fait connoître que le nombre impair 9, qui a été multiplié par le nombre pair 2, est en la main droite, & par conséquent le nombre pair 8 dans la gauche.

Mais si dans la main droite il y a 10 pistoles, & 7 en la gauche, en multipliant le nombre 10 de la droite par 2, & le nombre 7 de la gauche par 3, & en ajoutant ensemble les deux produits 20, 21, on aura leur somme 41, laquelle étant un nombre impair, fait connoître que le nombre pair 10, qui a été multiplié par le nombre pair 2, est en la main droite, & par conséquent le nombre impair 7 dans la main gauche. C'est par le moyen de ce Problème qu'on peut résoudre la Question suivante.

REMARQUE.

On voit bien qu'au lieu des deux mains de la même personne, on peut supposer que deux personnes auront pris l'un le nombre pair des pistoles, & l'autre le nombre impair. On fera à l'égard de ces deux personnes ce qu'on a fait à l'égard des deux mains.

QUESTION.

*Une personne tenant une pièce d'or dans une main ;
& une pièce d'argent en l'autre, trouver en quelle
main est la pièce d'or, & en quelle main est la
pièce d'argent.*

Après avoir dit qu'on donne secrettement à l'or une certaine valeur, qui soit un nombre pair, comme 8, & à l'argent une certaine valeur qui soit un nombre impair, comme 5, faites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair quelconque, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair quelconque, comme par 3. Puis ayant fait ajouter ensemble les deux produits, demandez si leur somme est un nombre pair ou impair. Vous sçauvez que le nombre est pair, en demandant si on en peut prendre la moitié, & qu'il est impair, si on vous répond qu'on n'en peut pas prendre la moitié. Si cette somme est un nombre impair, l'or sera dans la main droite, & l'argent dans la gauche; & tout au contraire, si elle est un nombre pair, l'or sera dans la main gauche, & l'argent en la droite.

PROBLEME XXIII.

*Trouver deux nombres, dont on connaît la Raison
& la Différence.*

I.

Pour trouver deux nombres, dont le premier soit au second, par exemple, comme 5 est à 2, & dont la Différence, ou l'excès du plus grand sur le plus petit, soit, par exemple, 12; multipliez cette différence 12 par le plus petit terme 2 de la Raison donnée, & divisez le produit 24 par la Différence 3 des deux termes 5, 2, de la même Raison donnée; le quotient 8 sera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, auquel ajoutant la Différence donnée 12, la somme 20 sera le plus grand.

II.

Ou bien multipliez la Différence donnée 12 par 5 le plus grand terme de la Raison donnée, & divisez le produit 60 par la Différence 3 des deux termes 5, 2, de la même Raison donnée; le quotient 20 sera le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel ôtant la Différence donnée 12, le reste 8 sera le plus petit, comme auparavant.

III.

Ou bien encore multipliez chacun des deux termes 5, 2, de la Raison donnée, par la Différence donnée 12, & divisez chacun des deux produits 60, 24, par la Différence 3 des deux mêmes termes 5, 2; les quotiens 20, 8, seront les deux nombres qu'on cherche, comme auparavant. Par

le moyen de ce Problême, l'on peut aisément résoudre la Question suivante.

Q U E S T I O N

Quelqu'un ayant dans une main autant de pièces de monnoye que dans l'autre, deviner combien il y en a en chaque main.

FAites mettre quelques pièces de la main gauche dans la main droite, par exemple, deux, en sorte qu'il y ait quatre pièces plus dans la main droite que dans la gauche, & demandez la Raison du nombre des pièces de la main droite au nombre des pièces de la main gauche, qui soit, par exemple, égale à celle de 5 à 3. Alors il faudra multiplier la Différence 4 du nombre des pièces d'une main au nombre des pièces de l'autre, par le plus petit terme 3 de la Raison donnée, & diviser le produit 12 par la Différence 2 des deux termes 5, 3, de la même Raison donnée, & le quotient 6 sera le nombre des pièces de la main gauche, auquel ajoutant la Différence 4 des deux nombres des pièces qui sont en chaque main, on aura 10 pour le nombre des pièces de la main droite, auquel si l'on ajoute le nombre 6 des pièces de la main gauche, on aura 16 pièces en tout, dont la moitié 8 fait connoître qu'au commencement il y avoit 8 pièces de monnoye dans chaque main.



PROBLEME XXIV.

QUESTION I.

Une personne ayant pris autant de jettons, ou piéces de monnoye dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout.

Dites-lui de transporter de la main droite, par exemple, dans la gauche, un certain nombre de jettons, qui soit au dessous de celui qu'il a dans l'une des mains. Dites-lui encore que de la main gauche, où il a mis ce nombre de jettons, il en transporte dans la droite autant qu'il y en étoit resté. Le nombre des jettons qui sera dans la main gauche, sera double du nombre qu'on a ordonné d'y transporter. Si vous demandez donc de combien les jettons qui sont dans la main gauche surpassent ceux qui sont dans la droite, vous connoîtrez combien il y a de jettons dans cette main droite: ainsi il n'y aura plus qu'à ajoûter les jettons qui sont dans les deux mains, pour sçavoir combien il y en a en tout.

Si on avoit pris dans chaque main 12 jettons, & que vous en eussiez fait transporter 7 de la main droite dans la gauche, il faudroit faire passer de la main gauche dans la droite autant qu'il en étoit resté dans cette main droite, c'est-à-dire, 5 jettons. Vous seriez assuré pour lors qu'il y auroit dans la main gauche 14 jettons, qui est le double de 7, que vous aviez ordonné d'y transporter. Alors vous demanderez de combien le nombre des jettons de la main gauche est plus grand que celui de la main droite, on vous répondra qu'il y en a quatre de plus dans celle-ci que dans l'autre: ayant

donc ôté 4 de 14 , il restera 10 , que vous ajouterez à 14. La somme 24 est le total des jettons qu'on avoit pris.

I. REMARQUE.

Au lieu de demander de combien le nombre des jettons de la main gauche est plus grand que celui de la main droite , on peut demander de combien le nombre des jettons de la main gauche surpasse celui qu'on avoit pris au commencement , qu'on suppose être 12 , ou de combien le nombre des jettons de la main droite est plus petit que celui qu'on avoit pris au commencement. Par ce moyen on connoîtroit que le nombre des jettons de la main droite étoit 10 , qu'il faudroit ajouter à 14 pour avoir la somme 24.

II. REMARQUE.

On a donné dans le Problème XVII. plusieurs manières de deviner un nombre que quelqu'un aura pensé , en voici encore une autre qu'on peut proposer sous ce titre : *Deviner combien une personne aura de jettons ou de pièces de monnaie dans la main.*

FAites multiplier le nombre des jettons par 3, ce triple sera pair ou impair.

I.

Si ce triple est pair , il en faudra faire prendre la moitié , & faire encore multiplier cette moitié par 3 : ce second triple sera pair ou impair.

II.

Si ce second triple est pair , il en faut faire

prendre la moitié, puis demander combien cette moitié contient de fois 9. Sçachant combien cette moitié contient de fois 9, vous prendrez autant de fois 4 qu'il y a de fois 9, sans vous embarrasser s'il y a du surplus: le produit sera le nombre des jettons qu'on tiendra dans la main.

Exemple où le premier & le second Triple sont pairs.

Si on a pensé 8, ou qu'on ait pris 8 jettons, il faut faire multiplier 8 par 3, le produit est 24, qui est pair: faites prendre la moitié de 24, qui est 12, que vous ferez encore multiplier par 3. Ce second triple est 36, qui est aussi pair, sa moitié est 18. Demandez combien cette moitié 18, que vous ne sçavez point, contient de fois 9; on vous répondra qu'elle contient 2 fois 9: prenez donc 2 fois 4, & vous aurez 8 pour le nombre des jettons.

III.

Si le second triple est impair, il y faut faire ajouter 1, & retenir 2 en vous-même; vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9: vous prendrez autant de fois 4 qu'elle contiendra de fois 9, sans vous embarrasser s'il y a du surplus. Mais vous vous souviendrez d'y ajouter le 2 que vous avez retenu, à cause du second triple impair; la somme sera le nombre pensé ou pris.

Exemple où le premier Triple est pair, & le second est impair.

Si on a pris 6 jettons, vous ferez multiplier 6

par 3, le produit 18 est pair, dont la moitié est 9 : vous ferez aussi multiplier cette moitié 9 par 3, le produit est 27, auquel vous ferez ajouter 1, & l'on aura 28 ; mais vous retiendrez 2 en vous-même. La moitié de 28 est 14, qui ne contient qu'une fois 9 : ainsi ayant sçû que cette moitié, qui vous est inconnue, contient une fois 9, vous prendrez une fois 4, & vous y ajouterez 2, que vous avez retenu, à cause du second triple impair ; la somme 6 est le nombre des jettons qu'on a pris.

IV.

Si le premier triple est impair, vous y ferez ajouter 1, & retiendrez 1 en vous-même, pour l'ajouter à la fin, comme on le dira. Vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous ferez encore tripler cette somme. Ce second triple sera pair ou impair.

V.

Si ce second triple est pair, vous en ferez prendre la moitié, & vous demanderez combien elle contient de fois 9 : puis vous prendrez autant de fois 4, qu'elle contiendra de 9, & vous augmenterez ce produit de l'unité, que vous avez retenu, à cause du premier triple impair ; la somme sera le nombre pensé ou pris.

Exemple où le premier Triple est impair, & le second est pair.

Si on a pris 5 jettons, vous ferez prendre le triple de 5, qui est 15, auquel vous ferez ajouter 1, parce qu'il est impair, la somme sera 16, dont la moitié est 8 : vous ferez multiplier cette moitié 8 par 3, le produit est 24, dont la moitié est 12,

qui ne contient qu'une fois 9 ; ce que vous connoîtrez après l'avoir demandé. Ainsi vous prendrez une fois 4 , auquel vous ajouterez 1 , à cause du premier triple impair , & vous aurez 5 , qui est le nombre pris.

V I.

Mais si le second triple est impair , vous y ferez ajouter 1 ; vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité , & vous retiendrez 2 en vous - même. Vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9 , vous prendrez autant de fois 4 qu'elle contiendra de fois 9 , & vous y ajouterez 3 , à cause de 1 retenu en premier lieu pour le premier triple impair , & de 2 retenu en second lieu pour le second triple impair : la somme sera le nombre pris.

Exemple où les deux Triples sont impairs.

Si on a pris 7 jettons , vous ferez multiplier 7 par 3 , le triple sera 21 , que vous ferez augmenter de l'unité , à cause qu'il est impair , on aura 22 , & vous retiendrez 1 en vous-même. Faites ensuite prendre la moitié de 22 , qui est 11 , que vous ferez encore multiplier par 3 , & l'on aura 33 , qui est encore impair : ainsi vous retiendrez 2 en vous-même , à cause de ce second triple impair : vous ferez augmenter 33 de l'unité , & l'on aura 34 , dont la moitié est 17 , qui ne contient qu'une fois 9. Ayant donc sçû que cette moitié contient une fois 9 , vous prendrez une fois 4 , auquel vous ajouterez 3 , somme de 1 retenu pour le premier triple , & de 2 retenu pour le second triple : la somme 7 est le nombre des jettons.

VII.

Observez qu'en suivant cette méthode, 1^o. si l'on a pensé 3, ou qu'on ait pris 3 jettons, vous ne trouverez que 1 retenu, à cause du premier triple impair, & 2 retenu, à cause du second triple impair, dont la somme est 3 : c'est à-dire, que si on a pris 3 jettons, les deux triples 9, 15, seront impairs, & que 8 moitié du second triple, ne contenant point 9, il suffit d'ajouter 1 retenu, à cause du premier triple impair, & 2 retenu, à cause du second triple impair; cette somme 3 sera le nombre cherché.

2^o. Si l'on a pris 2 jettons, le premier triple 6 sera pair, & le second 9 sera impair; ainsi la moitié 5 du second triple, ne contenant point 9, vous ne ferez attention qu'au 2 retenu, à cause du second triple impair, qui sera par conséquent le nombre des jettons qu'on aura pris.

3^o. Si on n'a pris qu'un jetton, le premier triple 3 sera impair, & le second 6 sera pair; ainsi vous ne ferez attention qu'à 1 retenu, à cause du premier triple impair, qui sera le nombre pris.

4^o. Si l'on n'a point pris de jettons, il n'y a point de triple, & par conséquent rien à retenir; il n'y a pas non plus de 9 : on trouvera donc qu'on a pris 0, c'est-à-dire, rien.

VIII.

Au lieu de faire prendre la moitié du second triple, vous pouvez demander combien ce second triple combien de fois 9 : alors vous prendrez autant de fois 2, qu'on vous aura dit qu'il y a de fois 9, & vous aurez soin d'ajouter 1 à ce produit, si le premier triple étant impair, vous avez fait ajouter 1.

Exemple.

Si on a pensé 11, ou qu'on ait pris 11 jettons, faites multiplier 11 par 3, il viendra 33; ayant fait ajouter 1 à 33 pour avoir 34, vous retiendrez 1 en vous-même; puis vous ferez prendre la moitié de 34, qui est 17. Vous direz encore de multiplier ce 17 par 3, le produit fera 51. Enfin ayant scû que 9 est 5 fois dans 51, vous prendrez 2 fois 5, qui font 10, auquel vous ajouterez 1, à cause du premier triple impair, & la somme 11 sera le nombre pensé, ou celui des jettons qu'on a pris.

I X.

Cette manière de deviner un nombre pensé proposée dans ce dernier article VIII. est la même que celle qui a été proposée au *Problème XVII. art. X.* Lorsque le premier triple sera pair, on n'ajoutera rien à 2 pris autant de fois que le second triple contiendra de fois 9.

QUESTION II.

Une personne charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres. Il veut leur distribuer l'argent qu'il a sur lui: donnant à chacun de ces pauvres neuf sols, il trouve qu'il lui manque trente-deux sols; mais leur distribuant à chacun sept sols, il lui reste vingt-quatre sols. On demande combien il y avoit de pauvres, & combien cette personne avoit d'argent dans sa bourse.

IL faut ajouter 24 & 32, la somme fera 56, dont la moitié 28 est le nombre des pauvres.

Si l'on multiplie 28 , nombre des pauvres , par 7 , nombre des sols qu'on leur a donné , & qu'au produit 196 on ajoute les 24 sols de surplus , on aura 220 sols pour l'argent de la personne charitable.

R E M A R Q U E.

On auroit encore eu la même somme 220 sols , si l'on avoit multiplié 28 , nombre des pauvres par 9 , nombre des sols qu'on a voulu donner , & que du produit 252 on eût ôté les 32 sols qui manquoient.

QUESTION III.

D E L'ASNE ET DU MULET.

Il arriva qu'un Mulet & une Asne faisant voyage ensemble , portoient chacun un certain nombre de barils de vin. L'Asne se plaignoit de ce qu'il étoit trop chargé. Le Mulet lui dit : Vous n'avez point raison de vous plaindre ; car si vous me donniez un de vos barils , j'en aurois deux fois autant que vous , & si je vous en donnois un des miens , nous en porterions l'un autant que l'autre. Combien de barils avoient-ils chacun ?

LE Mulet avoit sept barils de vin , & l'Asne en avoit cinq : l'Asne donnant un baril au Mulet , n'en auroit plus eu que quatre , & le Mulet en auroit eu huit , qui est le double de la charge de l'Asne : mais si le Mulet avoit donné un de ses barils à l'Asne , il en auroit encore eu six , & l'Asne en auroit aussi eu six.

R E M A R Q U E.

On me permettra de mettre ici cette Question avec sa solution en Vers Latins.

Unà

*Unà cum Mulo vinum portabat Afella,
Atque suo graviter ceu pondere pressa gemebat.
Talibus at dictis mox increpat ille gementem:
Mater, quid lugens teneræ de more puella?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto;
At si mensuram capias, equalia porto.*

Dic mihi mensuras sapiens Geometer istas
Non aliter Phæbi nomine dignus eris.

S O L U T I O.

*Unam Asina accipiens, amittens Mulus & unam,
Si fiant equi, certè utrique antè duobus
Distabant à se. Accipiat si Mulus at unam
Amittatque Asina unam, tunc distantia fiet
Inter eos quatuor. Muli at cum pondera dupla
Sint Asina; Huic simplex, Mulo est distantia
dupla:
Ergo habet hæc quatuor tantum, Mulusque habet
octo.*

*Unam Asinae si addas, si reddat Mulus & unam
Tunc ignota priùs tibi pondera clara patebunt;
Mensuras quinque hæc, & septem Mulus habebat.*

On peut exprimer cette Question en différentes manières. En voici une en Latin avec sa réponse.

*Ova olim juvenes duo ferebant,
Horum sic comitem laceffit alter;
Unum si dederis mihi tuorum
Ovorum, numerus mihi tibi que
Par erit: cui mox regressit alter;
Tu si mi dederis unum tuorum,
Duplo plura ego bajulabo quam tu.
Dic ergo tulerit quot ova uterque?*

SOLUTION.

*Tot prior ova tulit , lustrum quot continet annos.
Posterior vaga quot sidera mundus habet.*

Ce que les deux jeunes gens viennent de dire touchant les œufs qu'ils portent, ou ce que l'on fait dire au Mulet & à l'Asne, se met dans la bouche de deux amis, qui se trouvent ensemble: l'un dit à l'autre, si je vous donnois une de mes pistoles, vous en auriez autant que moi: l'autre répond, & moi si je vous en donnois une des miennes, vous en auriez deux fois autant que moi. Il paroît que chacun sçait le nombre des pistoles de son ami. Mais il n'en est pas de même de ceux à qui on propose cette Question: il faut qu'ils le devinent.

QUESTION IV.

Les trois Graces portant des couronnes de fleurs, rencontrèrent les neuf Muses, à qui elles présentèrent chacune un nombre égal de couronnes. La distribution faite, il se trouva que les Graces & les Muses en avoient chacune autant l'une que l'autre. On demande combien les Graces avoient de couronnes, & combien elles en donnerent.

LEs Graces avoient chacune douze couronnes, & chacune en donna une. On peut supposer encore qu'elles en avoient 24, & que chacune en donna deux; ou bien qu'elles en avoient 36, & que chacune en donna trois, & ainsi de suite, pourvû qu'en prenant les multiples de 12, on augmente à proportion le nombre des couronnes qui seront présentées.

QUESTION V.

Trois personnes veulent acheter une maison 26000 livres : mais ils sont convenu que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troisième le quart. On demande combien ils doivent donner chacun.

Celui qui a promis la moitié de l'argent, doit donner 12000 livres : celui qui a promis le tiers doit donner 8000 livres, & celui qui a promis le quart doit donner 6000 livres. Ces trois sommes font ensemble 26000 livres.

QUESTION VI.

Un pere en mourant laisse sa femme enceinte : il ordonne par son testament que si elle accouche d'un garçon, il héritera des deux tiers de son bien, qui est de 3000 écus, & l'autre tiers sera pour la mere. Mais si elle accouche d'une fille, cette fille n'héritera que d'un tiers, & les deux autres tiers seront pour la mere. Il arrive que la mere accouche d'un garçon & de deux filles. On demande quel doit être le bien de chacun.

LA part qui doit revenir au garçon est de 1500 écus, moitié du bien du pere ; celle qui reviendra à la mere est de 750 écus, & les filles auront chacune 375 écus. Ces quatre sommes font ensemble 3000 écus.

QUESTION VII.

On dit d'une personne qu'elle a passé le quart de sa vie en l'enfance ; la cinquième partie en la jeunesse ;

le tiers en l'âge viril, & qu'il y a 13 ans qu'elle a commencé à entrer dans la vieillesse. On demande l'âge de cette personne.

IL est facile de répondre que cette personne a soixante ans, qu'elle a passé 15 ans dans l'enfance, 12 ans dans la jeunesse, 20 ans dans l'âge viril; qu'enfin à 47 ans elle a commencé à entrer dans la vieillesse.

QUESTION VIII.

Quarante-une personnes se sont trouvées à un repas: il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépense a été de 40 sols; les hommes ont payé 4 sols par tête, les femmes 3 sols chacune, & les enfans 4 deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans.

IL y avoit cinq hommes, trois femmes, & trente-trois enfans. Les cinq hommes ont payé 20 sols, les trois femmes ont payé 9 sols, & les trente-trois enfans ont payé 11 sols. Ces sommes font ensemble 40 sols; & le nombre des hommes, des femmes & des enfans fait quarante & une personnes.

QUESTION IX.

Un Lion de bronze, placé sur le bassin d'une fontaine, peut jeter l'eau par les yeux, par la gueule & par le pied droit. S'il jette l'eau par l'œil droit, il emplira le bassin en deux jours: s'il la jette par l'œil gauche, il l'emplira en trois jours: s'il la jette par le pied, il l'emplira en quatre jours: enfin s'il la jette par la gueule, il l'emplira en six heures. On demande en combien de temps le bassin

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 181
*sera rempli , si le Lion jette l'eau en même temps
par les yeux , par le pied , & par la gueule.*

Toutes ces ouvertures laissant écouler l'eau en même temps , le bassin sera rempli en quatre heures , & environ quarante-quatre minutes. *Voyez les Remarques de la Question suivante.*

QUESTION X.

Trois Imprimeurs veulent entreprendre l'impression d'un livre : l'un le peut imprimer en six mois ; l'autre ne le peut qu'en neuf mois , & le troisième moins diligent , ou ayant moins d'Ouvriers , ne le peut imprimer qu'en douze mois. On demande en combien de temps cet ouvrage sera imprimé , si on fait travailler les trois Imprimeurs en même temps.

Ces Imprimeurs travaillant tous en même temps à différentes parties de ce livre , ils l'auront imprimé en deux mois vingt-trois jours & une heure ou environ.

REMARQUES.

L'un de ces Imprimeurs fait en un mois la sixième partie de l'ouvrage ; l'autre la neuvième , & l'autre la douzième : ces fractions ajoutées ensemble font $\frac{13}{36}$. Pour avoir le temps demandé , il faut faire une règle de trois , dont le premier terme sera 13 , le second sera un mois , & le troisième sera 36 : le quatrième terme donnera le temps demandé , après avoir réduit les restes dans les parties des mois & des jours.

Il en est de même à l'égard de la Question précédente ; mais il faut réduire les jours en heures , à cause des six heures dont il est parlé. L'œil droit du Lion jettera en une heure un quarante-huitième d'eau pour emplir le bassin ; l'œil gauche en jettera un soixante & douzième ; la gueule en jettera un quatre-vingt-douzième , & le pied droit en jettera un sixième. Toutes ces fractions réduites en une seule , on fera une règle de trois , comme on vient de le dire , dont le premier terme fera le numérateur ; le second une heure , & le troisième sera le dénominateur. Il viendra au quatrième terme 4 heures & environ 44 minutes.

PROBLEME XXV.

Deux personnes étant convenu de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre proposé , en continuant alternativement jusqu'à ce que tous leurs nombres fassent ensemble un nombre déterminé plus grand que le proposé , faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.

Pour faire que le premier arrive , par exemple , à 100 , en supposant qu'il lui est libre , aussi bien qu'au second , de prendre alternativement un nombre tel qu'il voudra , pourvu qu'il soit moindre , par exemple , que 11 , il faut qu'il ôte ce nombre 11 de 100 autant de fois qu'il pourra , & alors il restera ces nombres 1 , 12 , 23 , 34 , 45 , 56 , 67 , 78 , 89 , dont il doit se souvenir , & prendre le premier 1 : ainsi quelque nombre que le second prenne , il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au second nombre 12 ; car si le second prend , par exemple , 3 , qui avec 1 fait 4 , le pre-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 183

mier n'a qu'à prendre 8, pour parvenir à 12 : après quoi quelque nombre que prenne le second, il ne pourra pas empêcher que le premier ne parvienne au troisième nombre 23 ; car s'il prend, par exemple, 1, qui avec 12 fait 13, le premier n'a qu'à prendre 10, qui avec 13 fait 23 : ensuite quelque nombre que le second prenne, il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au quatrième nombre 34, ensuite au cinquième 45, puis au sixième 56, de-là au septième 67, de-là au huitième 78, de-là au dernier 89, & enfin à 100.

Si le second vouloit gagner, il est évident qu'il devroit prendre au commencement un nombre qui fût le reste à 12 du nombre que le premier auroit pris, afin de pouvoir parvenir à 12 : comme si le premier avoit pris 2, le second devroit prendre 10 : mais si le premier sçait la finesse, il ne peut prendre que 1, & alors le second devroit prendre 11 ; ce qui ne se peut, parce qu'ils sont convenu de prendre des nombres moindres que 11. Mais ces sortes de Jeux ne se font ordinairement qu'avec ceux qui les ignorent. Ainsi si le second ne sçait pas la finesse du Jeu, le premier qui veut gagner ne doit pas prendre toujours 1 au commencement, mais quelque autre nombre, après avoir gagné la première partie, en risquant de perdre la seconde, pour mieux cacher l'artifice.

Si le premier veut gagner, il ne faut pas que le plus petit nombre proposé mesure le plus grand : car dans ce cas le premier n'auroit pas une règle infailible pour gagner. Par exemple, si au lieu de 11, on avoit pris 10 qui mesure 100, en ôtant 10 de 100, autant de fois qu'on le peut, on auroit ces nombres 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, dont le premier 10 ne pourroit pas être pris par le

premier ; ce qui fait qu'étant obligé de prendre un nombre moindre que 10 , si le second étoit aussi fin que lui , il pourroit prendre le reste à 10 , & ainsi il auroit une règle infallible pour gagner.

Il n'est pas nécessaire d'ôter le plus petit nombre du plus grand , autant de fois qu'on le peut , pour sçavoir le nombre que le premier doit prendre pour gagner ; car il suffit de diviser le plus grand par le plus petit , & le reste de la division sera le nombre que le premier doit choisir au commencement. Comme dans l'exemple proposé en divisant 100 par 11 , il reste 1 pour le premier nombre du premier , auquel s'il ajoute 11 , il aura 12 pour son second nombre , auquel ajoutant encore 11 , il aura 23 pour son troisième nombre , & ainsi de suite jusqu'à 100.

PROBLEME XXVI.

Diviser un nombre donné en deux parties , dont la Raison soit égale à celle de deux nombres donnez.

QU'il faille diviser le nombre donné 60 en deux autres nombres tels que le plus petit soit au plus grand comme 1 est à 2 , en sorte qu'une partie soit double de l'autre.

I.

Ajoutez ensemble les deux termes 1 , 2 de la Raison donnée ; divisez par leur somme 3 le nombre donné 60 ; le quotient 20 sera le plus petit des deux nombres qu'on cherche , lequel étant ôté du nombre donné 60 , le reste 40 sera le plus grand nombre.

I I.

Ou bien , multipliez les deux termes 1 , 2 de la Raison donnée , chacun par le nombre donné 60 , divisez les produits 60 , 120 , chacun par la somme 3 des deux mêmes termes 1 , 2 , & les deux quotiens 20 , 40 , seront les deux nombres qu'on cherche.

Ce Problème est le même que la seconde Question du Livre premier de Diophante , & l'on peut aisément par son moyen résoudre les Questions suivantes.

QUESTION I.

Faire la monnoye d'un écu blanc en deux espèces différentes , en sorte qu'il y ait autant d'une espèce que de l'autre.

Comme l'on cherche une solution en nombres entiers , il est aisé de connoître que cette Question ne se peut pas résoudre généralement pour toutes sortes de monnoyes. Afin que la Question soit possible , il faut que la somme des deux termes , qui expriment la Raison des deux espèces proposées , puisse diviser exactement la valeur d'un écu blanc , lorsqu'il sera réduit en la monnoye la plus basse.

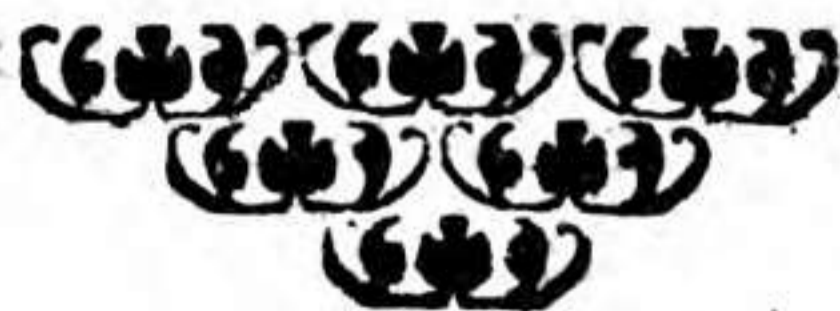
Ainsi en faisant valoir 60 sols un écu blanc , ou 240 liards , on connoît qu'on en peut donner la monnoye en sols & en liards , parce que sa valeur 240 se peut diviser par la somme 5 des deux termes 1 , 4 , qui expriment la Raison d'un liard à un sol , parce que quatre liards font un sol. Si donc on divise 240 liards par 5 , on aura 48 liards , & par conséquent 48 sols , pour la solution de la

Question. Car 48 sols avec 48 liards , qui valent 12 sols , font 60 sols , telle qu'est la valeur supposée d'un écu blanc.

On connoitra de la même façon , qu'il faut 12 sols & 12 pièces de quatre sols pour faire un écu de 60 sols , parce que divisant 60 par 5 , le quotient est 12 ; & qu'il faut 13 sols & 13 pièces de quatre sols pour faire un écu de 65 sols , parce que divisant 65 par 5 , le quotient est 13.

De même pour donner en sols & en pièces de quatre sols la monnoye d'un louis d'or valant 11 livres , ou 220 sols , en sorte qu'il y ait autant de sols que de pièces de quatre sols , il faut 44 sols , & 44 pièces de quatre sols , parce que divisant 220 par 5 , le quotient est 44 : & que pour donner dans les deux mêmes espèces la monnoye d'un louis d'or valant 12 livres 5 sols , ou 245 sols , en sorte qu'il y ait autant d'une espèce que de l'autre , il faut 49 sols , & 49 pièces de quatre sols , parce que divisant 245 par 5 , le quotient est 49.

Enfin l'on connoitra que pour faire la monnoye en sols & en deniers d'un écu valant 65 sols , ou 780 deniers , en sorte qu'il y ait autant de sols que de deniers , il faut 60 sols , & 60 deniers , parce que divisant 780 par 13 , qui est la somme des deux termes 1 , 12 , qui expriment la Raison d'un denier à un sol , parce qu'un sol contient 12 deniers , le quotient est 60. Ainsi des autres.



QUESTION II.

Un Marchand de vin n'a que deux sortes de vin, l'un à 10 sols, & l'autre à 5 sols la bouteille. On lui demande 30 bouteilles de vin à 8 sols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de sorte que la bouteille revienne à 8 sols ?

IL faut qu'il prenne les différences du prix de ses vins au prix du vin demandé. Ces différences sont 2, 3, qui seront les termes d'une Raison donnée. La somme de ces différences est 5. Premièrement pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 5 sols qu'il doit prendre pour le mélange ; il faut, selon l'article II. qu'il multiplie 30 nombre des bouteilles demandées par 2 différence de 10 prix de l'un de ses vins, & de 8 prix du vin demandé, & qu'il divise le produit 60 par 5 somme des différences : le quotient 12 est le nombre des bouteilles de vin à 5 sols, qu'il prendra pour le mélange. Secondement, pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 10 sols, qu'il doit prendre pour le mélange, il faut, suivant le même article II. qu'il multiplie le même nombre 30 par 3 différence de 5, prix de l'autre de ses vins, & de 8 prix du vin demandé, & qu'il divise le produit 90 par 5 somme des différences : le quotient 18 est le nombre des bouteilles de vin à 10 sols, qu'il prendra pour le mélange. Ainsi ayant mêlé 12 bouteilles de vin à 5 sols avec 18 bouteilles à 10, il en aura 30, qui reviendront à 8 sols la bouteille. Ce qu'il est aisé de reconnoître en multipliant 18 par 10, & 12 par 5 ; les deux produits 180, 60, ajoutez, sont égaux à 240, produit de 30 par 8.

PROBLEME XXVII.

Trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par des nombres donnez, il reste par tout 1, & étant divisé par un autre nombre donné, il ne reste rien.

I.

Pour trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par les deux nombres donnez, 5, 7, chaque reste soit 1, & étant divisé par ce troisième nombre donné 3, qui doit être premier avec les deux précédens, il ne reste rien; multipliez ensemble les deux premiers nombres donnez 5, 7, pour avoir leur produit 35, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 36, qui sera tel qu'étant divisé par 5 & par 7, il restera 1. Et comme il arrive que ce même nombre 36 étant divisé par le troisième nombre donné 3, il ne reste rien; il s'ensuit que 36 est le nombre qu'on cherche.

Mais on peut trouver une infinité d'autres nombres plus grands, qui satisferont aux conditions du Problème; ce qui se fera par le moyen du premier & plus petit nombre trouvé 36, en cette sorte.

Pour trouver un second nombre, ajoutez le premier nombre trouvé 36 au produit 105 des trois nombres donnez 5, 7, 3 & la somme 141 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 105, on aura 246 pour troisième nombre, auquel si l'on ajoute le même produit 105, on aura 351 pour quatrième nombre, & ainsi de suite.

II.

De même pour trouver un nombre tel qu'étant

divisé séparément par les trois nombres donnez 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par ce quatrième nombre donné 11, qui doit aussi être premier avec les trois précédens 2, 3, 5, il ne reste rien; multipliez ensemble les trois premiers nombres donnez 2, 3, 5, pour avoir leur produit 30, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 31, qui étant divisé par chacun des trois nombres donnez 2, 3, 5, donnera pour reste 1. Si ce nombre 31 étant divisé par le quatrième nombre donné 11, il ne restoit rien, il seroit celui qu'on cherche; mais parce qu'il reste 9, le nombre 31 n'est pas celui qu'on cherche. Pour le trouver, voici ce qu'on fera.

Divisez 30 par 11, & ayant négligé le quotient 2, servez-vous du reste 8 en cette sorte. Cherchez au nombre 11 un multiple, qui surpasse de l'unité un multiple de 8. * Vous trouverez que 33, multiple de 11, surpasse de l'unité 32, multiple de 8. Divisez 32 par 8, reste trouvé, & vous aurez pour quotient 4, par lequel vous multiplierez le produit déjà trouvé 30. Ce second produit 120, augmenté de l'unité, sera le nombre cherché: car 121 est exactement divisible par 11, & donne pour reste 1 étant divisé par 2, 3, 5. Par le moyen de ce nombre 121, on en pourra trouver autant qu'on voudra en cette sorte.

Pour avoir un second nombre, ajoutez le premier nombre trouvé 121 à 330, produit des qua-

* On ne peut faire cette recherche, qu'en essayant, ou, comme on dit, en tatonnant. Mais comme il ne s'agit que de petits nombres, il n'est point difficile de trouver ces multiples. Il ne seroit point nécessaire de chercher un multiple de 11, si on trouvoit un multiple de 4, qui fût moindre de l'unité qu'un multiple de 11.

tre nombres donnez 2 , 3 , 5 , 11 , & la somme 451 sera le second nombre qu'on cherche , auquel ajoutant le produit précédent 330 , on aura 781 pour troisième nombre , auquel si l'on ajoute pareillement le même produit 330 , on aura 1111 pour quatrième nombre , & ainsi de suite.

III.

On pourra par un semblable raisonnement trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par ces trois nombres donnez 3 , 5 , 7 , il reste un autre nombre que l'unité , par exemple , 2 , & étant divisé par ce quatrième nombre donné 8 , il ne reste rien. Multipliez ensemble les trois premiers nombres donnez 3 , 5 , 7 , divisez leur produit 105 par le quatrième nombre donné 8 , & négligeant le quotient , servez-vous du reste 1 , auquel vous chercherez un multiple qui soit moindre que 8 de 2 , * parce qu'il s'agit de trouver un nombre qui ait 2 pour reste. Ce multiple est 6 , divisez-le par 1 , qui est le reste trouvé : le quotient est 6 , par lequel vous multiplierez ce premier produit 105. Ce second produit 630 , augmenté de 2 , sera le nombre cherché : car 632 est exactement divisible par 8 , & il donne 2 pour reste , si on le divise par 3 , 5 , 7. Ce même nombre 632 servira à en trouver autant d'autres qu'on voudra qui auront la même propriété , par une méthode semblable à la précédente , comme vous allez voir.

Pour trouver un second nombre plus grand , ajoutez le nombre trouvé 632 au produit 840 des

* Il n'est point nécessaire de chercher ici un multiple de 8 , puisque 8 surpasse 6 multiple de 1 , de 2 .

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 191

quatre nombres donnez , 3 , 5 , 7 , 8 , & la somme 1472 sera le second nombre qu'on cherche , auquel ajoutant le produit précédent 840 , on aura 2312 pour le troisième nombre , auquel si l'on ajoute encore le même produit 840 , on aura 3152 pour le quatrième nombre , & ainsi de suite.

I V.

De même , pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par ces trois nombres donnez 3 , 5 , 7 , il reste 2 , & étant divisé par ce quatrième nombre donné 11 , il ne reste rien ; divisez le produit 105 des trois premiers nombres donnez 3 , 5 , 7 , par le quatrième 11 ; & négligeant le quotient , servez-vous du reste 6 , pour l'usage que je vais indiquer. Cherchez un multiple de 11 , qui surpasse de 2 un multiple de 6. * Vous trouverez 44 , multiple de 11 , & 42 multiple de 6. Divisez 42 par 6 reste trouvé , le quotient sera 7 , par lequel vous multiplieriez le premier produit 105. Ce second produit 735 , augmenté de 2 , sera le nombre cherché. Car 737 est divisible sans reste par 11 , & si on le divise par ces nombres 3 , 5 , 7 , séparément , il reste 1.

* Voyez la note de la page 189.

Par le moyen de ce nombre 737 , on en pourra trouver autant d'autres qu'on voudra , en y ajoutant 1155 , produit des nombres 3 , 5 , 7 , 11 , comme on l'a enseigné dans les exemples précédens.

V.

De même , pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par 5 , ou par 7 , ou par 8 , il reste 3 , & étant divisé par 11 , il ne reste rien , on multipliera ensemble ces trois nombres 5 , 7 , 8 , dont on

divisera le produit 280 par 11, pour avoir le reste 5, en négligeant le quotient. On cherchera ensuite un multiple de 11, qui surpasse de 3 un multiple de 5. On trouvera 33, multiple de 11, & 30, multiple de 5 : puis on divisera 30 par 5, & l'on aura pour quotient 6, par lequel on multipliera le premier produit 280. Ce second produit 1680, augmenté de 3, sera le nombre cherché. Car 1683 se divise exactement par 11, & donne 3 pour reste, étant divisé par les nombres proposez, 5, 7, 8.

C'est par le moyen de ce Problème qu'on peut résoudre la Question suivante.

QUESTION.

Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourse, qu'une personne dit avoir perdue, & qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en restoit toujours un, & qu'en les comptant sept à sept, il n'en restoit point.

IL s'agit ici de trouver un nombre tel qu'étant divisé par celui qu'on voudra des trois nombres donnez 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par le quatrième nombre donné 7, il ne reste rien; car ce nombre sera celui des pistoles qui étoient dans la bourse. Et comme il y a plusieurs nombres qui peuvent satisfaire à la question, comme on a vû au Problème précédent, on pourra juger par la grosseur ou par la pesanteur de la bourse, du nombre des pistoles qu'elle pouvoit contenir.

Mais pour trouver le moindre de tous ces nombres, cherchons premièrement un nombre qui soit
exactement

exactement divisible par 2, par 3 & par 5, & qui étant augmenté de 1, soit aussi exactement divisible par 7. Si on multiplie ensemble les trois premiers nombres donnez 2, 3, 5, leur produit 30 sera divisible par chacun de ces trois nombres; mais en y ajoutant 1, la somme 31 n'est pas divisible par le quatrième nombre donné 7; car il reste 3. Divisez donc 30 par le quatrième nombre proposé 7; la division donnera 2 pour reste, & vous négligerez le quotient. Prenez 6 multiple de 2, qui est moindre que 7 de l'unité. * Divisez-le par 2, reste trouvé, & vous aurez 3 pour quotient, par lequel vous multiplierez le premier produit 30. Ce second produit 90, augmenté de 1, sera le premier nombre cherché: car 91 se divise sans reste par 7, & donne 1 pour reste, s'il est divisé par les nombres proposez 2, 3, 5.

* Voyez la note de la page 189.

Pour trouver un second nombre plus grand, qui satisfasse à la question, multipliez ensemble les quatre nombres donnez 2, 3, 5, 7, ajoutez à leur produit 210 le premier & plus petit nombre trouvé 91; la somme 301 sera le second nombre qu'on cherche, auquel si l'on ajoute le produit précédent 210, la somme 511 sera un troisième nombre qui satisfera, auquel pareillement si l'on ajoute le même produit 210, la somme 721 sera un quatrième nombre qui satisfera, & ainsi à l'infini.

Ainsi pour la résolution de la Question, l'on peut dire que dans la bourse perdue, il pouvoit y avoir 91 louis d'or, ou bien 301, ou bien 511, ou bien encore 721, & c'est selon la grosseur de la bourse, comme nous avons déjà dit, qu'il en faut juger.

I. REMARQUE.

On peut proposer cette Question d'une autre

manière. Une pauvre femme porte au marché un panier d'œufs ; mais venant à être heurtée , elle laisse tomber son panier , & tous les œufs sont cassés. Celui qui a causé ce malheur , veut payer les œufs , il demande à la femme combien elle avoit d'œufs dans son panier : elle lui répond qu'il y en avoit environ trois cens , que les comptant deux à deux , trois à trois , quatre à quatre , cinq à cinq , six à six , il restoit toujours 1 , & les comptant sept à sept , il ne restoit rien.

La Question est ici déterminée par la condition que la femme a mise , en disant qu'il y avoit environ 300 œufs. Ainsi le nombre 301 sera le nombre des œufs. Si la condition n'y avoit point été mise , il en auroit fallu juger par la grandeur du panier. Mais on en jugera plus sûrement en demandant à la femme à peu près le nombre , comme de 300 , ou de 500 , ou de 700 , &c. Alors , selon sa réponse , on choisit celui des nombres qui approche le plus de celui qu'elle a répondu.

II. REMARQUE.

Peut-être ne trouvera-t'on pas mauvais qu'on mette ici la solution du premier article de ce Problème par Algèbre. On suivra la méthode que M. de Lagny , de l'Académie Royale des Sciences, a indiqué dans ses nouveaux Elémens d'Arithmétique & d'Algèbre , p. 430. Elle peut être d'un grand secours dans les Problèmes indéterminez.

I.

Il s'agit de trouver un nombre x tel qu'étant divisé par 3 , il ne reste rien , étant divisé par 5 , il reste 1 , & étant divisé par 7 , il reste encore 1.

La question proposée se réduira à ces équations.

$$1^{\circ}. \frac{x}{3} = p. \quad 2^{\circ}. \frac{x-1}{5} = m. \quad 3^{\circ}. \frac{x-1}{7} = n.$$

Je choisis les deux premières équations pour les comparer l'une à l'autre, & je les réduis à cette expression. $4^{\circ}. x = 3p = 5m + 1$: par conséquent $p = \frac{5m+1}{3}$, où m est indéterminé : pour le trouver, voici le raisonnement que je fais.

Puisque $5m + 1$ doit être divisé exactement par 3, toutes les différences de $5m + 1$ à 3 son dénominateur, ou, ce qui est la même chose, à $3m$, doivent être aussi divisées par 3. Ainsi pour trouver la dernière différence, où m demeure seule, j'ôte autant de fois qu'il est possible $3m$ de $5m + 1$: la première différence est $2m + 1$, & j'ai $\frac{2m+1}{3}$: mais m n'étant point seule, cette expression ne convient pas ; j'ôte donc $2m + 1$ de $3m$ son dénominateur, & j'ai $m-1$, qui étant divisé par 3, donne ce rapport $\frac{m-1}{3}$.

Pour trouver la valeur de m , qui est indéterminé, je suppose, $1^{\circ}. \frac{m-1}{3} = 0$, qui donne $m = 1$. $2^{\circ}. \frac{m-1}{3} = 1$, qui donne $m = 4$. $3^{\circ}. \frac{m-1}{3} = 2$, qui donne $m = 7$, &c. $m = 1$ ne pouvant satisfaire aux équations comparées, je prens $m = 4$, qui donne la solution des équations comparées dans la quatrième expression $x = 3p = 5m + 1$: car $x = 21$, qui étant divisé par 3, n'a point de reste, & étant divisé par 5, donne 1 pour reste.

Mais si je substitue 21 dans la troisième supposition $\frac{x-1}{7}$, je trouve que $\frac{21-1}{7}$, ne donne point

au quotient un nombre qui ait 1 pour reste. Je cherche donc une autre valeur de m dans toutes celles qu'on peut trouver, & j'essaye celle qui peut convenir : pour la trouver plus seurement, voici encore le raisonnement que je fais.

Puisque dans la recherche que j'ai fait de la valeur de m par cette expression $\frac{m-1}{3}$, j'ai supposé que $\frac{m-1}{3}$ étoit égal à un nombre pris à volonté, tel que 0, 1, 2, 3, 4, &c. Je suppose qu'un de ces nombres pris à volonté & indéterminé, soit égal à f , ainsi j'aurai $\frac{m-1}{3} = f$, d'où l'on aura $m = 3f + 1$. Substituant donc ce $3f + 1$ dans la quatrième équation $x = 5m + 1$, je trouverai $5m + 1 = 15f + 5 + 1 = x$. Ainsi dans la troisième équation $\frac{x-1}{7} = n$, je substitue $15f + 6$ au lieu de x ; ce qui me donne $\frac{15f+6}{7}$. J'ôte $7f$ autant de fois que je le puis de $15f + 6$, pour avoir la dernière différence $f + 6$, qui étant divisée par 7, donne $\frac{f+6}{7}$.

Ainsi pour avoir la valeur de f , je suppose :

- 1°. $\frac{f+6}{7} = 0$, qui donne $f = -6$, qui ne peut convenir.
- 2°. $\frac{f+6}{7} = 1$, qui donne $f = 7 - 6 = 1$, & cette valeur de f donne la solution des trois équations proposées. Car substituant 1 à la place de f dans cette équation $m = 3f + 1$, j'aurai $m = 4$ & $x = 5m + 1 = 21$, qui est le nombre cherché.

On trouvera d'autres nombres que 21, si on suppose $\frac{f+6}{7}$ égal à 2, à 3, à 4, &c.

II.

Si j'avois comparé ensemble la troisième & la seconde équation $\frac{x-1}{7} = n$ & $\frac{x-1}{5} = m$, j'aurois eu $x = 7n + 1 = 5m + 1$, & $n = \frac{5m}{7}$, & l'on auroit vû que m doit être égal à 7, ou à un multiple de 7. Car si l'on ôte $5m$ de $7m$, on aura pour premier reste $2m$, dont le double $4m$ étant ôté de $5m$, donnera m : par conséquent on aura $\frac{m}{7}$. Si on fait $\frac{m}{7} = 1$, on aura $m = 7$. Si l'on fait encore $\frac{m}{7} = 2$, on aura $m = 14$, &c. $m = 7$ satisfait à la question; car $x = 5m + 1 = 36$. $m = 14$ y satisfait aussi, & donne un autre nombre que 36; & ainsi de suite à l'infini.

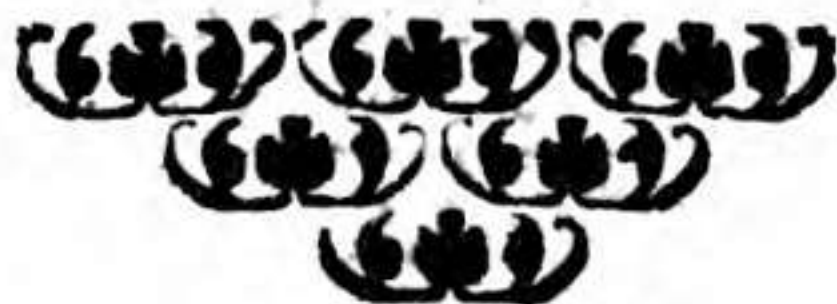
III.

Si l'on avoit proposé un plus grand nombre d'équations, comme, 1°. $\frac{x-1}{2} = m$. 2°. $\frac{x-1}{3} = n$. 3°. $\frac{x-1}{5} = p$. 4°. $\frac{x}{11} = q$. On auroit fait 5°. $x = 2m + 1 = 3n + 1$, & par conséquent $m = \frac{3n}{2}$. J'ôte $2n$ de $3n$, il reste n . Donc $\frac{n}{2}$. D'où je fais, 1°. $\frac{n}{2} = 1$, qui donne $n = 2$. 2°. $\frac{n}{2} = 2$, qui donne $n = 4$. 3°. $\frac{n}{2} = 3$, qui donne $n = 6$, &c. Je substitue quelqu'une de ces valeurs de n dans la cinquième équation $x = 3n + 1$, & je trouve que les deux valeurs 2 & 4 de n satisfont dans les deux premières équations comparées; mais elles ne satisfont point dans la troisième question $\frac{x-1}{5} = p$.

C'est pourquoi je prens $n = 2f$, que je substitue

dans la cinquième équation $x=3n+1$, & j'ai ;
 6°. $x=6f+1$, qui étant substitué dans $\frac{x-1}{5}$, troi-
 sième expression, donne $\frac{6f}{5}$, & ôtant $5f$ de $6f$,
 il restera f , qui divisé par 5 , donnera $\frac{f}{5}$, & par
 conséquent 1°. $\frac{f}{5}=1$, qui donne $f=5$. 2°. $\frac{f}{5}=2$
 qui donne $f=10$, &c. La première valeur 5 de f
 substitué dans la sixième expression $x=6f+1$,
 donne la solution des trois premières équations ;
 mais elle ne donne point la solution de la quatrié-
 me $\frac{x}{11}$. Car $31=x$ ne peut être exactement divisé
 par 11 .

Je fais donc $f=5g$, que je mets à la place de f
 dans la sixième équation $x=6f+1$, ce qui donne
 7. $x=30g+1$, que je substitue dans la quatrième
 équation $\frac{x}{11}$, & j'ai $\frac{30g+1}{11}$. J'ôte $30g+1$ de $33g$
 multiple de $11g$, il reste $3g-1$. J'ôte $3g-1$ ou son
 multiple $9g-3$ de $11g$, puis le reste $2g+3$ de
 $3g-1$, je trouve pour dernier reste $g-4$. Faisant
 $\frac{g-4}{11}=0$, on a $g=4$, qui donne la solution de la
 septième équation $x=30g+1=121$, qui convient
 aux quatre équations proposées.



PROBLEME XXVIII.

Diviser plusieurs nombres donnez chacun en deux parties, & trouver deux nombres, en sorte que multipliant la première partie de chacun des nombres donnez par le premier nombre trouvé, & la seconde par le second, la somme des deux produits soit par tout la même.

S I l'on donne, par exemple, ces trois nombres 10, 25, 30, & qu'on veuille avoir une solution en nombres entiers, prenez pour les deux nombres qu'on cherche, deux nombres quelconques, pourvû que leur différence soit 1, ou telle qu'elle puisse diviser exactement le produit sous le plus grand de ces deux nombres, & la différence de deux quelconques des trois nombres donnez, & que le plus grand de ces deux nombres, multiplié par le plus petit nombre donné 10, surpasse le plus petit des deux mêmes nombres, multiplié par le plus grand nombre donné 30.

Choisissez, par exemple, 2 & 7; leur différence 5 mesure exactement 105, produit de 7, grand nombre choisi, & de 15, différence de 25 & de 10. De plus, 70 produit de 7, grand nombre choisi, par 10 le plus petit nombre donné, surpasse 60 produit du plus grand nombre donné par 2, petit nombre choisi.

Ayant donc trouvé les deux nombres qu'on cherche, 2, 7, la première partie du premier nombre donné 10, se pourra prendre à volonté, pourvû qu'elle soit moindre que le nombre donné 10, & que le nombre 10 qui reste en ôtant 60 produit de 2, petit nombre trouvé par le plus grand donné

30 de 70 produit de 7, grand nombre trouvé par le plus petit nombre donné 10. Cette première partie doit être aussi moindre que 2, quotient de ce reste 10, divisé par 5, différence des deux nombres choisis 2, 7. Elle sera donc 1, que l'on ôtera du premier nombre donné 10, le reste 9 sera l'autre partie, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la première 1 étant multipliée par le premier nombre trouvé 2, la somme des deux produits 63, 2, est 65.

Pour trouver la première partie du second nombre donné 25, multipliez la différence 15 des deux premiers nombres donnez 10, 25, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 105 par la différence 5 des deux nombres trouvez 2, 7, ajoutez le quotient 21 à la première partie trouvée 1 du premier nombre donné 10, & la somme 22 sera la première partie du second nombre donné 25; c'est pourquoi l'autre partie sera 3, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la première 22 par le premier 2, la somme des deux produits 21, 44, fait aussi 65.

Enfin pour trouver la première partie du troisième nombre donné 30, multipliez la différence 5 des deux derniers nombres donnez 25, 30, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 35 par la différence 5 des deux nombres trouvez 2, 7, ajoutez le quotient 7 à la première partie 22 du second nombre donné 30, & la somme 29 sera la première partie du troisième nombre donné 30, c'est pourquoi l'autre partie sera 1, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la première 29 par le premier 2, la somme des deux produits 7, 58, fait aussi 65.

Ou bien multipliez la différence 20 du premier & du troisième nombre donné, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 140 par la différence 5 des deux nombres trouvez 28, ajoutez le quotient 28 à la première partie 1 du premier nombre donné 10, & vous aurez 29, comme auparavant, pour la première partie du troisième nombre donné 30.

Si l'on prend 1, 6, pour les deux nombres qu'on cherche, & 4 pour la première partie du premier nombre donné 10, auquel cas l'autre partie sera 6, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la première 4 par le premier 1, la somme des deux produits 36, 4, est 40; la première partie du second nombre donné 25 sera 22, & l'autre partie par conséquent sera 3, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la première 22 par le premier 1, la somme des deux produits 18, 22, est aussi 40; enfin la première partie du troisième nombre donné 30, sera 28; ce qui fait que l'autre partie sera 2, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la première 28 par le premier 1, la somme des deux produits 12, 28, est aussi 40. Ce Problème sert à résoudre la Question suivante.

QUESTION I.

Une femme a vendu 10 pommes au marché à un certain prix; une autre femme en a vendu 25 au même prix, & une troisième femme en a vendu 30 aussi au même prix, & chacune a rapporté une même somme d'argent. On demande comment cela se peut faire.

IL est évident qu'afin que la Question soit possible, il faut que les femmes vendent leurs pom-

mes à deux diverses fois , & à divers prix , bien qu'à chaque fois elles vendent chacune à un même prix. Si ces deux prix différens sont 2 , 7 , qui sont

| | <i>Pom.</i> | <i>Den.</i> | <i>Pom.</i> | <i>Den.</i> | |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|------|
| 10. | 1 | à 2 | 9 | à 7 | } 65 |
| 25. | 22 | à 2 | 3 | à 7 | |
| 30. | 29 | à 2 | 1 | à 7 | |

les deux nombres que nous avons trouvez au Problème précédent ; & si l'on suppose que la première fois elles vendent 2 deniers la pomme , & qu'à ce prix la première vende 1 pomme , la seconde 22 , & la troisième 29 , les trois nombres 1 , 22 , 29 , seront les premières parties des trois nombres donnez 10 , 25 , 30 , comme elles ont été trouvées au Problème précédent. Dans ce cas la première femme aura 2 deniers , la seconde en aura 44 , & la troisième en aura 58. Ensuite , si on suppose qu'elles vendent le reste de leurs pommes 7 deniers la pomme , alors la première femme aura 63 deniers pour neuf pommes qui lui restent , la seconde aura 21 deniers pour 3 pommes qui lui restent , & la troisième aura 7 deniers pour 1 pomme qui lui reste ; de sorte que chacune aura en tout 65 deniers.

Ou bien si les deux prix différens sont 1 , 6 , qui sont deux autres nombres que nous avons trouvez au Problème précédent , & si l'on suppose que la première fois elles vendent 1 denier la pomme , & qu'à ce prix la première vende 4 pommes , la seconde 22 , & la troisième 28 , ces trois nombres 4 , 22 , 28 , seront les premières parties des trois nombres donnez 10 , 25 , 30 , comme elles ont été trouvées au Problème précédent. Dans ce cas la

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 203
 première femme aura 4 deniers, la seconde en aura

| | <i>Pom.</i> | <i>Den.</i> | <i>Pom.</i> | <i>Den.</i> | |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|------|
| 10. | 4 | à 1 | 6 | à 6 | } 40 |
| 25. | 22 | à 1 | 3 | à 6 | |
| 30. | 28 | à 1 | 2 | à 6 | |

22, & la troisième en aura 28. Ensuite si on suppose qu'elles vendent le reste de leurs pommes 6 deniers la pomme, alors la première femme aura 36 deniers pour six pommes qui lui restent, la seconde aura 18 deniers pour 3 pommes qui lui restent, & la troisième aura 12 deniers pour 2 pommes qui lui restent; de sorte que chacune aura en tout 40 deniers.

REMARQUES.

I.

Ceux qui voudront être instruits plus à fond sur la solution de ces sortes de questions, pourront consulter ce qui en est dit dans la seconde partie de l'Arithmétique universelle, p. 456. On y traite en particulier celle qui est ici proposée; on dit qu'elle a seulement 6 solutions, & que la plus grande somme est 65. Je vais entreprendre de la résoudre par l'Algèbre, pour faire voir la fécondité de l'Analyse, qui renferme des richesses qu'on tire de son sein, quand on est assez heureux pour la traiter avec ménagement. Je rapporterai dix solutions différentes de cette même question, les sommes de chaque femme seront, après chacune des dix ventes, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70. J'espère que cela fera plaisir à ceux qui commencent à apprendre l'Algèbre, & je crois que ce sera pour eux une récréation.

II.

Il faut se souvenir que trois femmes ayant porté des pommes au marché, l'une en a vendu 10, l'autre 25, & la troisième 30, à un même prix; & qu'étant revenu du marché, elles ont rapporté toutes trois une même somme. On se souviendra encore qu'elles doivent avoir vendu à deux différentes reprises, & à divers prix chaque fois.

J'appelle u le prix auquel les trois femmes ont vendu leurs pommes dans la première vente, & p le prix auquel elles ont vendu le reste dans la seconde vente.

Je nomme x le nombre des pommes de la première femme, vendues au prix u ; par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix p , sera $10-x$. Ainsi l'argent de la première vente sera xu , & celui de la seconde vente sera $10p-px$: la somme est $xu+10p-px$.

Je nomme z le nombre des pommes vendues au prix u par la seconde femme: par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix p , sera $25-z$. Ainsi l'argent de la première vente sera zu , & celui de la seconde vente sera $25p-pz$: la somme est $zu+25p-pz$.

Enfin je nomme y le nombre des pommes vendues par la troisième femme au prix u ; par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix p , sera $30-y$. Ainsi l'argent de la première vente sera yu , & celui de la seconde vente sera $30p-py$: la somme de cette troisième femme est $yu+30p-py$.

Je rassemblerai dans cette Table tous ces différents prix: ceux qui sont à gauche marquent les prix des pommes vendues par les trois femmes

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 205

dans la première vente, & ceux qui sont à droite marquent les prix des pommes vendues dans la seconde vente.

| | 1 ^{re} vente. | 2 ^e vente. |
|------------------------|------------------------|-----------------------|
| 1 ^{re} femme. | xu | $10p - px$ |
| 2 ^e femme. | zu | $25p - pz$ |
| 3 ^e femme. | yu | $30p - py$. |

La somme que rapporte la première femme est $xu + 10p - px$.

La somme que rapporte la seconde femme est $zu + 25p - pz$.

La somme que rapporte la troisième femme est $yu + 30p - py$.

Ces trois sommes doivent être égales, c'est-à-dire, que $xu + 10p - px = zu + 25p - pz = yu + 30p - py$.

D'où je tire ces équations, 1^o. en comparant les deux premières sommes $xu + 10p - px = zu + 25p - pz$;

d'où l'on a $xu - px = zu - pz + 15p$, & divisant tout par $u - p$, on trouve $x = z + \frac{15p}{u - p}$. 2^o. en comparant

la première & la troisième somme $xu + 10p - px = yu + 30p - py$,

d'où l'on a $xu - px = yu - py + 20p$, & divisant encore tout par $u - p$, on a $x = y + \frac{20p}{u - p}$.

3^o. en comparant la seconde & la troisième somme $zu + 25p - pz = yu + 30p - py$,

d'où l'on a $zu - pz = yu - py + 5p$, & divisant tout par $u - p$, on a $z = y + \frac{5p}{u - p}$.

On voit dans ces trois équations que la différence de u à p ($u - p$) doit être un diviseur exact de 15, de 20 & de 5, c'est-à-dire, des différences des nombres des pommes portées au marché. Mais pour parvenir avec quelque certitude à la valeur

de $u-p$, je choisis la fraction $\frac{sp}{u-p}$, où se trouve le plus petit numérateur s , qui est un diviseur commun des trois différences, & je fais d'abord $\frac{sp}{u-p} = 0$, qui donnant $sp = 0$, n'est d'aucune utilité. Je fais ensuite $\frac{sp}{u-p} = 1$, qui donne $sp = u-p$, ou $6p = u$, & faisant $p = 1$, j'ai $6 = u$. Ces valeurs d' u & de p , serviront pour les sept premières solutions qu'on va donner. Ainsi au lieu des trois équations que je viens de trouver, j'aurai ces trois autres. 1°. $x = z + 3$. 2°. $x = y + 4$. 3°. $z = y + 1$, qui sont encore indéterminées : mais on n'a besoin que de la dernière & de l'une des deux premières.

Première Solution.

Pour déterminer la valeur des inconnues x , z , y , je suppose $y = 0$ donc $z = 1$ par la troisième équation, & $x = 4$ par la première ou seconde équation. Ayant donc aussi supposé $p = 1$ & $u = 6$, comme on vient de voir, la somme que chaque femme rapportera, sera 30 deniers.

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\circ} \text{ Fem. } xu + 10p - px = 24 + 10 - 4 = 30. \\ 2^{\circ} \text{ Fem. } zu + 2sp - pz = 6 + 25 - 1 = 30. \\ 3^{\circ} \text{ Fem. } yu + 30p - py = 0 + 30 - 0 = 30. \end{cases}$$

Observation.

En considérant la Table qu'on a mis ci-dessus, on remarquera que la première femme doit vendre 4 pommes à 6 deniers dans la première vente, & par conséquent 6 pommes à 1 denier dans la deuxième vente : que la seconde femme doit vendre 1 pomme à 6 deniers dans la première vente, & 24 pommes à 1 denier dans la deuxième vente :

que la troisième femme ne doit vendre aucune pomme dans la première vente, & qu'elle les vendra toutes 30 à 1 denier dans la deuxième vente ; ce qui fait que chacune doit rapporter 30 deniers du marché. On appliquera cette observation aux solutions suivantes.

Seconde Solution.

Je suppose $y=1$, par conséquent $z=2$ (troisième équation) & $x=5$ (première ou seconde équation.)
 $n=6$ & $p=1$.

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xn + 10p - px = 30 + 10 - 5 = 35. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zn + 25p - pz = 12 + 25 - 2 = 35. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yn + 30p - py = 6 + 30 - 1 = 35. \end{cases}$$

Troisième Solution.

Je suppose $y=2$. donc $z=3$, & $x=6$.
 $n=6$. $p=1$.

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xn + 10p - px = 36 + 10 - 6 = 40. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zn + 25p - pz = 18 + 25 - 3 = 40. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yn + 30p - py = 12 + 30 - 2 = 40. \end{cases}$$

Quatrième Solution.

Je suppose $y=3$, par conséquent $z=4$ & $x=7$.
 $n=6$. $p=1$.

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xn + 10p - px = 42 + 10 - 7 = 45. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zn + 25p - pz = 24 + 25 - 4 = 45. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yn + 30p - py = 18 + 30 - 3 = 45. \end{cases}$$

Cinquième Solution.

Je suppose $y=4$. donc $z=5$. & $x=8$.
 $n=6$. $p=1$.

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xn + 10p - px = 48 + 10 - 8 = 50. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zn + 25p - pz = 30 + 25 - 5 = 50. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yn + 30p - py = 24 + 30 - 4 = 50. \end{cases}$$

Sixième Solution.

Je suppose $y=5$. par conséquent $z=6$ & $x=9$.
 $n=6$. $p=1$.

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xn + 10p - px = 54 + 10 - 9 = 55. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zn + 25p - pz = 36 + 25 - 6 = 55. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yn + 30p - py = 30 + 30 - 5 = 55. \end{cases}$$

Septième Solution.

Je suppose $y=6$. donc $z=7$ & $x=10$.
 $n=6$. $p=1$.

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xn + 10p - px = 60 + 10 - 10 = 60. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zn + 25p - pz = 42 + 25 - 7 = 60. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yn + 30p - py = 36 + 30 - 6 = 60. \end{cases}$$

On voit par cette solution que la première femme vend toutes ses pommes dans la première vente.

III.

Je ne puis plus supposer une plus grande valeur à y , parce qu'il en viendrait à x une qui seroit plus grande que 10, c'est-à-dire; que la première femme seroit obligée de vendre plus de pommes qu'elle

qu'elle n'a ; ce qui est contre la supposition. D'où il suit qu'il faut chercher à u & à p une autre valeur que celle qu'on leur a donné dans les solutions précédentes. Ainsi je fais $\frac{5p}{u-p} = 2$, d'où il vient $5p = 2u - 2p$, ou $7p = 2u$, faisant $p = 2$, on aura $u = 7$. Ces valeurs trouvées, on les substituera dans les comparaisons $x = z + \frac{1 \cdot 5p}{u-p}$. $x = y + \frac{2 \cdot 0 \cdot p}{u-p}$. $z = y + \frac{5 \cdot p}{u-p}$, & l'on aura, 1°. $x = z + 6$. 2°. $x = y + 8$. 3°. $z = y + 2$.

Huitième Solution.

Je suppose $y = 0$. donc $z = 2$ & $x = 8$ (par les équations précédentes.)

$u = 7$. $p = 2$.

Sommes. $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ Fem. } xu + 10p - px = 56 + 20 - 16 = 60. \\ 2^{\circ} \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 14 + 50 - 4 = 60. \\ 3^{\circ} \text{ Fem. } yu + 30p - py = 0 - 60 - 0 = 60. \end{array} \right.$

L'argent que chaque femme rapporte dans cette solution est le même que dans la précédente : cependant ces deux solutions sont fort différentes l'une de l'autre, comme il est aisé de connoître, si l'on y fait quelque attention.

Neuvième Solution.

Je suppose $y = 1$. par conséquent $z = 3$ & $x = 9$ (selon les équations dernières.)

$u = 7$. $p = 2$.

Sommes. $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ Fem. } xu + 10p - px = 63 + 20 - 18 = 65. \\ 2^{\circ} \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 21 + 50 - 6 = 65. \\ 3^{\circ} \text{ Fem. } yu + 30p - py = 7 + 60 - 2 = 65. \end{array} \right.$

210 RECREAT. MATH. ET PHYS.

Cette neuvième solution fait connoître que la première femme a vendu 9 pommes à 7 deniers dans la première vente, & une à 2 deniers dans la deuxième vente : que la seconde femme a vendu 3 pommes à 7 deniers dans la première vente, & 22 à 2 deniers dans la deuxième vente : que la troisième femme a vendu 1 pomme à 7 deniers dans la première vente, & 29 à 2 deniers dans la deuxième vente ; d'où il suit que chacune a rapporté 65 deniers.

Dixième Solution.

Je suppose enfin $y=2$. donc $z=4$, & $x=10$
(dernières équations.)

$$u=7. p=2.$$

$$\text{Sommes. } \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xu + 10p - px = 70 + 20 - 20 = 70. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 28 + 50 - 8 = 70. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yu + 30p - py = 14 + 60 - 4 = 70. \end{array} \right.$$

Enfin cette dernière solution montre que la première femme a vendu les 10 pommes à 7 deniers dans la première vente, mais elle n'en a point vendu dans la deuxième : que la seconde femme a vendu 4 pommes à 7 deniers dans la première vente, & 21 à 2 deniers dans la deuxième vente : que la troisième femme a vendu 2 pommes à 7 deniers dans la première vente, & 28 à 2 deniers dans la deuxième vente. D'où il suit que chacune a rapporté 70 deniers du marché.



QUESTION II.

Un Chef de cuisine a une certaine quantité d'œufs. Trois de ses Aides lui en demandent. Il en donne au premier la moitié de ce qu'il a & la moitié d'un œuf; au second la moitié de ce qui lui reste & la moitié d'un œuf: enfin il donne au dernier la moitié de ce qui lui reste & la moitié d'un œuf. On demande combien ce Chef de cuisine avoit d'œufs, & comment il a pû faire pour en donner des moitez sans en casser.

LA solution de cette question paroît impossible d'abord, à cause des moitez d'œufs qu'il faut donner: cependant on verra bientôt que cette question a des solutions à l'infini. Pour trouver le plus petit nombre d'œufs que puisse avoir le Chef de cuisine, prenez la troisième puissance de 2, qui est 8, diminuez ce 8 de l'unité, & le nombre 7 sera le plus petit nombre qu'on cherche: car ce Chef de cuisine ayant donné au premier Aide quatre œufs, il lui en a donné la moitié de ce qu'il avoit, avec la moitié d'un œuf, & il lui est resté trois œufs. Ayant donné au second Aide de cuisine deux œufs, il lui a donné la moitié de ce premier reste, avec la moitié d'un œuf, & il lui est resté un œuf. Enfin ayant donné au troisième Aide un œuf, il lui a donné la moitié de ce deuxième reste, avec la moitié d'un œuf. Dans ce cas il n'est point resté d'œuf au chef de cuisine.

Si on veut de plus grands nombres que 7, il faut multiplier séparément le cube 8 par les nombres 2, 3, 4, 5, &c. selon leur suite naturelle, diminuer le produit de l'unité, & l'on aura autant

de nombres qu'on voudra à l'infini, qui satisferont à la question.

Observation.

J'ai dit qu'il falloit prendre la troisiéme puissance de 2, parce qu'il n'y a que trois Aides; mais s'il y en avoit quatre, il faudroit prendre la quatrième puissance, qui est 16, & la diminuer de l'unité: s'il y en avoit 5, il faudroit prendre la cinquiéme puissance de 2, qui est 32, & la diminuer de l'unité, & ainsi des autres. Pour avoir plusieurs nombres qui satisfassent à la question, il faut multiplier ces puissances par quelque nombre pris à volonté, & ôter l'unité du produit.

QUESTION III.

Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages & des choux; elle a vendu les œufs 2 deniers, les fromages 6 deniers, & les choux 4 deniers: elle rapporte 10 sols. Combien avoit-elle d'œufs? combien de fromages? combien de choux?

Elle pouvoit avoir sept œufs, quinze fromages & quatre choux.

PROBLÈME XXIX.

Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. étant disposez en rond, deviner celui que quelqu'un aura pensé.

On se servira commodément des dix premières cartes d'un jeu entier, pour exécuter ce Problème. On les disposera en rond, comme vous

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 213

voyez les dix premiers nombres dans la figure. Planche
L'As sera représenté par la lettre A jointe à 1, 1. Fig. 2;
& le dix sera représenté par la lettre K jointe à 10.

Ayant fait toucher un nombre, ou une carte telle que voudra celui qui en aura pensé une, ajoutez au nombre de cette carte touchée le nombre des cartes que l'on aura choisies, comme 10 dans cet exemple : puis faites compter * la somme que vous aurez à celui qui a pensé la carte, par un ordre contraire à la suite naturelle des nombres, en commençant par la carte qu'il aura touchée, & en attribuant à cette carte le nombre de celle qu'il aura pensée; car en comptant de la sorte, il finira à compter cette somme sur le nombre ou sur la carte qu'il aura pensée, & vous fera par conséquent connoître cette carte.

Comme si l'on a pensé 3 marqué par la lettre C, & qu'on ait touché 6 marqué par la lettre F, ajoutez 10 à ce nombre 6, vous aurez la somme 16 : puis faites compter * cette somme 16 depuis le nombre touché F vers E, D, C, B, A, & ainsi de suite par un ordre rétrograde, en sorte que l'on commence à compter le nombre pensé 3 sur F, 4 sur E, 5 sur D, 6 sur C, & ainsi de suite jusqu'à 16; ce nombre 16 se terminera en C, & fera connoître qu'on a pensé 3, qui répond à C.

REMARQUES.

I.

On peut prendre un plus grand ou un plus petit nombre de cartes, selon qu'on le jugera à propos. S'il y avoit 15 ou 8 cartes, il faudroit ajouter 15 ou 8 au nombre de la carte touchée.

* Observez qu'on ne doit pas compter cette somme tout haut, mais en soi-même, & seulement par pensée.

I I.

Pour mieux couvrir l'artifice , il faut renverser les cartes , en sorte que les points soient cachez , & bien retenir la suite naturelle des cartes , & en quel endroit est le premier nombre , ou l'As , afin de sçavoir le nombre de la carte touchée , pour trouver celui jusqu'où il faut faire compter.

P R O B L E M E X X X.

Ayant fait prendre à trois personnes un nombre de jettons ou de cartes à certaines conditions , deviner combien chacune en aura pris.

FAites prendre au troisième un nombre de jettons ou de cartes , tel qu'il voudra , pourvu qu'il soit pairement pair , c'est-à-dire , divisible par 4 : puis faites prendre au second autant de fois 7 que le premier aura pris de fois 4 , & au premier autant de fois 13. Après cela dites au premier de donner de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun , & au second de donner de ses jettons aussi aux deux autres autant qu'ils en auront chacun ; & enfin au troisième de donner aussi de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun : il arrivera alors qu'ils auront chacun autant de jettons l'un que l'autre , & le nombre de chacun sera double de celui que le troisième a pris au commencement. C'est pourquoi si vous demandez à l'une de ces trois personnes le nombre de ses jettons , la moitié de ce nombre sera le nombre des cartes ou des jettons que le troisième avoit au commencement : & si vous pre-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 215

nez autant de fois 7, & autant de fois 13, qu'il y aura de fois 4 dans le nombre du troisième, vous aurez le nombre des cartes ou des jettons que le second & le premier avoient pris.

Comme si le troisième prend 8 cartes, le second en doit prendre 14, sçavoir, deux fois 7, parce que dans 8 il y a deux fois 4, & le premier en doit prendre 26, sçavoir, deux fois 13, par la même raison. Si le premier, qui a 26 cartes, en donne 14 au second, qui en a aussi 14, & 8 au premier, qui en a aussi 8, il lui en restera seulement 4, le second en aura 28, & le troisième 16. Mais

| | | | |
|------------------|------------------|------------------|--------------------------------|
| 1 ^e . | 2 ^e . | 3 ^e . | si le second, qui a 28 car- |
| 26 | 14 | 8 | tes, en donne 4 au pre- |
| 4 | 28 | 16 | mier qui en a aussi 4, & |
| 8 | 8 | 32 | 16 au troisième, qui en a |
| 16 | 16 | 16 | aussi 16, il lui en restera 8, |
| | | | & le premier en aura 8, |
| | | | & le troisième 32. Enfin si |

le troisième, qui a 32 cartes, en donne 8 à chacun des deux autres qui en ont chacun 8, ils en auront chacun 16, qui est le double du nombre 8 des cartes que le premier a pris au commencement, &c.

PROBLEME XXXI.

De trois cartes inconnues, deviner celle que chacune des trois personnes aura prise.

IL ne faut pas que le nombre des points de chacune des trois cartes qui aura été prise, surpasse 9; & alors pour trouver ce nombre, dites à la première personne d'ôter 1 du double du nombre des points de sa carte, & qu'après avoir multiplié le reste par 5, elle ajoute au produit le nombre des

points de la carte que la seconde personne aura prise. Après cela faites ajouter 5 à cette somme, pour avoir une seconde somme, & ayant fait ôter 1 du double de cette seconde somme, faites multiplier le reste par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte que la troisième personne aura prise. Enfin demandez la somme qui vient de cette dernière addition; car si vous y ajoutez 5, vous aurez une autre somme composée de trois figures, dont la première vers la gauche sera le nombre des points de la carte que la première personne aura prise, celle du milieu sera le nombre des points de la carte de la seconde personne, & la dernière vers la droite fera connoître la carte de la troisième personne.

Comme si le premier a pris un 3, le second un 4, & le troisième un 7, en ôtant 1 du double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier, & en multipliant le reste 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second, on a cette somme 29, à laquelle si l'on ajoute 5, on a cette seconde somme 34, dont le double est 68, d'où ôtant 1, il reste 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troisième, & 5 de plus, on a cette dernière somme 347, dont les trois figures représentent séparément les nombres des points de chaque carte.

Autrement.

Ayant dit au premier d'ajouter 1 au double du nombre des points de sa carte, faites multiplier la somme par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du second; puis ayant fait encore ajouter 1 au double de la somme précédente,

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 217.

faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du troisième. Après cela demandez la somme qui viendra de cette dernière addition, d'où vous ôterez 55, pour avoir au reste un nombre qui sera composé de trois figures, dont chacune représentera, comme auparavant, le nombre des points de chaque carte.

Comme dans le même exemple, en ajoutant 1 au double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier; & en multipliant la somme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second, on a 39, dont le double est 78, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 79 par 5, on a 395, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troisième, on a 402, d'où ôtant 55, il reste 347, dont les trois figures représentent en particulier le nombre des points de chaque carte.

PROBLEME XXXII.

Trois cartes ayant été présentées à trois personnes, deviner celle que chacun aura prise.

ON doit sçavoir quelles cartes ont été présentées: c'est pourquoi nous appellerons l'une A, l'autre B, & la troisième C. Mais on laisse la liberté aux trois personnes de choisir en particulier telle carte qu'il leur plaira. Quand ce choix, qui peut se faire en six manières différentes, sera fait, donnez à la première personne ce nombre 12, à la seconde ce nombre 24, & à la troisième ce nombre 36. Après cela dites à la première personne d'ajouter ensemble la moitié du nombre de celle qui a pris la carte A, le tiers du nombre de

celle qui a pris la carte B , & le quart du nombre de celle qui a pris la carte C , & demandez-lui la

| 1 ^e . | 2 ^e . | 3 ^e . | Sommes. |
|------------------|------------------|------------------|---------|
| 1 2 | 2 4 | 3 6 | |
| A | B | C | 23 |
| A | C | B | 24 |
| B | A | C | 25 |
| C | A | B | 27 |
| B | C | A | 28 |
| C | B | A | 29 |

somme qui sera ou 23 , ou 24 , ou 25 , ou 27 , ou 28 , ou 29 , comme vous voyez dans cette Table, qui montre que si cette somme est , par exemple, 25 , la première personne aura pris la carte B , la seconde la carte A , & la troisième la carte C : & que si cette somme est 28 , la première personne aura pris la carte B , la deuxième la carte C , & la troisième la carte A. Ainsi des autres.

PROBLEME XXXIII.

Deviner entre plusieurs cartes , celle que quelqu'un aura pensé.

Ayant pris à volonté dans un Jeu de cartes , un certain nombre de cartes, montrez-les par ordre sur une table à celui qui en veut penser une , commencez par celle de dessous , & mettez-les proprement l'une sur l'autre ; puis dites-lui de se souvenir du nombre qui exprime la quantième qu'il aura pensé , sçavoir , de 1 , s'il a pensé la première ; de 2 , s'il a pensé la seconde ; de 3 , s'il a pensé la troisième , &c. Mais en même temps comptez

secrètement celles que vous montrez , dont le nombre sera , par exemple , 12 ; & séparez-les adroitement du reste du Jeu. Après cela mettez ces cartes , dont vous sçavez le nombre , dans une situation contraire , en commençant à mettre sur le reste du Jeu la carte qui aura été mise la première sur la table , & en finissant par celle qui aura été montrée la dernière ; enfin ayant demandé le nombre de la carte pensée , que nous supposons être la quatrième , remettez à découvert vos cartes sur la table l'une après l'autre , en commençant par celle de dessus , à laquelle vous attribuez le nombre 4 de la carte pensée , en comptant 5 sur la seconde carte suivante , & pareillement 6 sur la troisième carte plus basse , & ainsi de suite , jusqu'à ce que vous soyez parvenu au nombre 12 des cartes que vous aviez prises au commencement ; car la carte sur laquelle tombera ce nombre 12 , sera celle qui aura été pensée.

PROBLEME XXXIV.

Plusieurs cartes différentes étant proposées successivement à autant de personnes , pour en retenir une dans sa mémoire , deviner celle que chacun aura pensé.

S'il y a , par exemple , trois personnes , montrez trois cartes à la première personne , pour en retenir une dans sa pensée , & mettez à part ces trois cartes. Présentez aussi trois autres cartes à la seconde personne , pour en penser une à sa volonté , & mettez aussi à part ces trois cartes. Enfin présentez à la troisième personne trois autres cartes , pour lui faire penser celle qu'il voudra ,

& mettez pareillement à part ces trois dernières cartes. Cela étant fait , disposez à découvert les trois premières cartes en trois rangs , & mettez dessus les trois autres cartes , & dessus celles-ci les trois dernières , pour avoir ainsi toutes les cartes disposées en trois rangs , dont chacun sera composé de trois cartes. Après quoi il faut demander à chaque personne dans quel rang est la carte qu'il a pensée : alors il sera facile de connoître cette carte , parce que la carte de la première personne sera la première de son rang ; de même la carte de la seconde personne sera la seconde de son rang : enfin la carte de la troisième personne sera la troisième de son rang.

PROBLEME XXXV.

Plusieurs cartes étant disposées également en trois rangs , deviner celle que quelqu'un aura pensé.

IL est évident que le nombre des cartes doit être divisible par 3 , afin qu'on en puisse faire trois rangs égaux. Supposant donc qu'il y ait, par exemple, 36 cartes, dont chaque rang en comprendra par conséquent 12 , demandez en quel rang est la carte qu'on aura pensé , & ayant ramassé toutes les cartes , en sorte que le rang où sera la carte pensée , soit entre les deux autres rangs ; disposez de nouveau ces 36 cartes en trois rangs égaux , en mettant la première au premier rang , la seconde au second , la troisième au troisième , puis la quatrième au premier rang , & pareillement la suivante au second rang , en continuant ainsi jusqu'à ce que toutes les cartes soient rangées. Après quoi vous demanderez encore dans quel rang est la car-

te pensée , & ayant ramassé de nouveau toutes les cartes , en sorte que le rang où sera la carte pensée , soit aussi entre les deux autres , vous ferez , comme auparavant ; trois rangs égaux des mêmes cartes. Ayant enfin demandé dans quel rang est la carte pensée ; vous connoîtrez aisément cette carte , parce qu'elle se trouvera au milieu de son rang , sçavoir , dans cet exemple , la sixième. Ou bien , pour mieux cacher l'artifice , elle se trouvera au milieu de toutes les cartes , ou la dix-huitième , lorsqu'on les aura ramassées comme auparavant ; mais il faut faire en sorte que le rang où sera la carte pensée , soit toujours entre les deux autres.

PROBLEME XXXVI.

Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tirée d'un Jeu de carte.

AYant pris un Jeu entier de 52 cartes , présentez-le à quelqu'un de la compagnie , qui tirera celle qu'il lui plaira , sans vous la montrer. Ensuite faisant valoir toutes les cartes selon leur valeur marquée , vous ferez valoir le Valet 11 , la Dame 12 , & le Roy 13 ; puis comptant les points de toutes les cartes , vous ajouterez les points de la première carte aux points de la seconde , ceux-ci aux points de la troisième , & ainsi de suite : vous rejetterez tous les 13 , & garderez le reste pour l'ajouter à la carte suivante. On voit qu'il est inutile de compter les Rois qui valent 13. Enfin s'il reste quelques points à la dernière carte , vous ôterez ces points de 13 , & le reste marquera les points de la carte qu'on aura tirée ; en sorte que si le reste est 11 , ce sera un Valet qu'on aura tiré ; si

le reste est 12 , ce sera une Dame , &c. mais s'il ne reste rien , on aura tiré un Roy. Vous connoîtrez quel est ce Roy , en regardant celui qui manque dans les cartes que vous avez.

Si l'on veut se servir d'un Jeu composé seulement de 32 cartes , dont on se sert à présent pour jouer au Piquet , on ajoutera tous les points des cartes , comme on vient de dire ; mais on rejettera tous les 10 qui se trouveront en faisant cette addition. Enfin on ajoutera 4 aux points de la dernière carte pour avoir une somme , laquelle étant ôtée de 10 , si elle est moindre , ou de 20 , si elle surpasse 10 , le reste sera le nombre de la carte qu'on aura tirée , de sorte que s'il reste 2 , ce sera un Valet ; s'il reste 3 , ce sera une Dame , & si le reste est 4 , on aura tiré un Roy , &c.

Si le Jeu de cartes est imparfait , on doit prendre garde aux cartes qui manquent , & ajouter à la dernière somme le nombre des points de toutes ces cartes qui manquent , après qu'on aura ôté de ce nombre autant de fois 10 qu'il sera possible ; & la somme qui viendra de cette addition , doit être , comme auparavant , ôtée de 10 , ou de 20 , selon qu'elle sera au dessous , ou au dessus de 10. Il est évident que si l'on regarde encore une fois les cartes , on pourra nommer celle qui aura été tirée.

PROBLEME XXXVII.

Deviner le nombre de tous les points qui sont en deux cartes qu'on aura tirées d'un Jeu de cartes entier.

Dites à celui qui aura tiré à l'avanture deux cartes d'un Jeu composé de 52 cartes, d'ajou-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 223

ter à chacune de ses cartes autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au dessous de 25, qui est la moitié de toutes les cartes, diminué de l'unité, en donnant à chaque carte figurée tel nombre qu'on voudra. Comme si la première carte est un Dix, on y ajoutera 15 cartes, & si la seconde carte est un Sept, on y ajoutera 18 cartes; ce qui fera en tout 35 cartes: de sorte que dans cet exemple il restera 17 cartes de tout le Jeu. Prenant donc les cartes qui restent du Jeu, & trouvant qu'il en reste 17, ce nombre 17 sera le nombre de tous les points pris ensemble des deux cartes qu'on aura tirées.

Pour mieux cacher l'artifice, il ne faut point toucher aux cartes; mais il faut faire ôter le nombre des points de chacune des deux cartes qui ont été prises de 26, qui est la moitié du nombre de toutes les cartes, & faire ajouter ensemble les deux restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'est-à-dire, de 52; car le nombre qui restera, sera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un Dix & un Sept, en ôtant 10 de 26, il reste 16, & en ôtant 7 de 26, il reste 19, & en ajoutant ensemble les deux restes 16, 19, on a 35 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 52, il reste 17 pour le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées.

On fera la même chose avec un Jeu de Piquet, composé de 36 cartes, ou seulement de 32 cartes.

Mais pour cacher encore mieux l'artifice, au lieu de la moitié 26 de toutes les cartes, quand il y en a 52, prenez un autre nombre moindre, mais plus grand que 10, comme 24, duquel ôtant 10 &

7, il reste 14 & 17, dont la somme 31 étant ôtée de la somme 52 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 26 sur 24, pour avoir au reste 17 le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées, sçavoir, du Dix & du Sept.

Quand on se servira d'un Jeu de Piquet, composé de 36 cartes, au lieu de la moitié 18 du nombre 36 de toutes les cartes, on prendra pareillement un nombre moindre, comme 16, duquel ôtant 10 & 7, il reste 6 & 9, dont la somme 15 étant ôtée du nombre 36 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 18 sur 16, pour avoir au reste 17 le nombre des points des deux cartes qui ont été tirées.

Pareillement, si le Jeu de Piquet n'est que de 32 cartes, au lieu de la moitié 16 du nombre 32 de toutes les cartes, on prendra un nombre moindre tel que l'on voudra, pourvu qu'il soit plus grand que 10, comme 14, duquel ôtant 10 & 7, il reste 4 & 7, dont la somme 11 étant ôtée de 32, il reste 21, d'où il faut encore ôter 4, qui est le double de l'excès de 16 sur 14, pour avoir au reste 17 le nombre des points du Dix & du Sept qu'on a tiré.

PROBLEME XXXVIII.

Deviner le nombre de tous les points qui sont en trois cartes, qu'on aura tirées à volonté d'un Jeu de cartes.

I.

Pour résoudre ce Problème comme le précédent, en suivant la voye la plus courte, il faut que le nombre des cartes dont le Jeu est composé, soit

soit divisible par 3 ; ainsi le Jeu de 52 cartes , & celui de 32 cartes ne sont pas si convenables : celui de 36 cartes convient mieux , parce que 36 a pour troisième partie 12 , qui nous servira pour résoudre la Question en cette sorte.

Dites à celui qui aura tiré à volonté trois cartes d'un Jeu de Piquet , composé de 36 cartes , d'ajouter à chacune de ses cartes autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au dessous de 11 , qui est le tiers du nombre de toutes les cartes diminué de l'unité , en donnant , comme dans le Problème précédent , à chaque carte figurée tel nombre qu'on voudra. Comme si la première carte est un Neuf , on y ajoutera 2 cartes ; si la seconde carte est un Sept , on y ajoutera 4 cartes , & si la troisième carte est un Six , on y ajoutera 5 cartes , ce qui fait en tout 14 cartes qu'on a tiré du jeu ; de sorte que dans cet exemple , il restera 22 cartes de tout le Jeu. Prenant donc les cartes qui restent du Jeu , & trouvant qu'il en reste 22 , ce nombre 22 fera connoître le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura tirées.

Ou bien sans toucher aux cartes , & pour mieux cacher l'artifice , faites ôter de 12 , qui est le tiers du nombre 36 de toutes les cartes , le nombre des points de chacune des trois cartes qu'on a prises , & faites ajouter ensemble les trois restes , pour avoir leur somme , que vous devez demander , afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes , c'est-à-dire , de 36 ; car le nombre qui restera , sera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple , où l'on a supposé qu'on a pris un Neuf , un Sept & un Six , ôtant 9 de 12 , il reste 3 ; ôtant 7 de 12 , il reste 5 ; enfin ôtant 6 de 12 , il reste 6 , & ajoutant ensemble les

trois restes 3, 5, 6, on a 14 pour leur somme laquelle étant ôtée de 36, il reste 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été tirées.

II.

Pour mieux encore cacher l'artifice, & pour appliquer la règle à un Jeu de plus ou de moins de 36 cartes, comme de 52 cartes, servez-vous d'un nombre plus grand que 10, & moindre que 17, tiers de 52, par exemple, de 15 : & dites à celui qui aura tiré les trois cartes, d'ajouter à chacune de ses cartes autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au dessous de 15, comme si la première carte est un Neuf, on y ajoutera 6 cartes, si la seconde carte est un Sept, on y ajoutera 8 cartes, & si la troisième carte est un Six, on y ajoutera 9 cartes, ce qui fera en tout 26 cartes ; de sorte que dans cet exemple il restera de tout le Jeu 26 cartes. Prenant donc les cartes qui restent du Jeu, & trouvant qu'il en reste 26, ôtez de 26 le nombre 4, qui est l'excès de 52, nombre de toutes les cartes sur le triple de 15, augmenté de 3, c'est-à-dire, sur 48, & le reste 22 sera le nombre de tous les points des trois cartes qui auront été tirées du Jeu.

Ou bien sans toucher aux cartes, faites ôter le nombre des points de chacune des trois cartes qui auront été prises de 16, qui surpasse de l'unité le premier nombre 15, & faites ajouter ensemble tous les restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre précédent 48 ; car le reste sera le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura prises.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un Neuf, un Sept & un Six, en ôtant 9 de 16, il reste 7 ; ôtant 7 de 16, il reste 9 ; en-

En ôtant 6 de 16, il reste 10, & ajoutant ensemble les trois restes 7, 9, 10, on a 26 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 48, il reste 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été prises.

Mais si vous voulez vous servir d'un Jeu composé de 36 cartes, & prendre un nombre plus grand que 10, comme 15, après avoir ajouté les cartes, qui seront au nombre de 26, comme vous avez vû, ôtez 26 de 36, nombre de toutes les cartes, ajoutez au reste 10 ce nombre 12, qui est l'excès du triple de 15, augmenté de 3, c'est-à-dire, de 48 sur le nombre 36 de toutes les cartes, & la somme 22 sera le nombre des points qu'on cherche. Au lieu de 12, il faut ajouter 16, pour un Jeu de Piquet de 32 cartes, parce qu'ôtant 32 de 48, il reste 16.

III.

A l'imitation de ce Problème & du précédent, il sera aisé de résoudre la Question pour quatre cartes qu'on aura tirées, & pour un plus grand nombre.

REMARKES.

De quelque manière qu'on exécute ce Problème, soit avec un Jeu entier de cartes, ou avec un Jeu qui ne soit point entier, soit qu'on tire du Jeu trois cartes ou davantage, soit enfin qu'après avoir tiré du Jeu un certain nombre de cartes, on fasse accomplir 15, ou quelque autre nombre, comme 14, 13, 16, &c. selon ce qui a été dit dans l'article II. Voici la règle générale qu'on doit suivre.

Multipliez le nombre que vous faites accomplir par le nombre des cartes choisies; ajoutez au

produit ce même nombre des cartes choisies, & ôtez cette somme du nombre des cartes du Jeu dont on se sera servi, comme de 52, si le Jeu est entier, ou de 36, s'il n'est point entier, &c. le reste sera le nombre qu'il faudra ôter des cartes qui seront restées de tout le Jeu. Le nombre des cartes restées après cette dernière soustraction, exprimera le nombre des points des cartes choisies.

Exemple.

Supposé qu'on ait choisi dans un Jeu entier 4 cartes, dont les points soient 3, 5, 7, 10, & qu'on ait fait accomplir les points de chacune jusqu'à 11, il faut multiplier 11 par 4, nombre des cartes choisies, & ajouter au produit 44 le même nombre 4; la somme sera 48, que vous ôterez de 52, nombre des cartes du Jeu entier, il restera 4, qu'il faudra ôter de 29, nombre des cartes qui seront restées du Jeu, après que celui qui aura choisi les quatre cartes en aura tiré 8, pour accomplir 11 avec les 3 points de la première carte, 6 pour accomplir 11 avec les 5 points de la seconde carte, 4 pour accomplir 11 avec les 7 points de la troisième carte, & 1 pour accomplir 11 avec les 10 points de la quatrième: toutes ces cartes 8, 6, 4, 1, avec les 4 choisies, font 23, qui étant ôté de 52, donnent pour reste 29. Ayant donc ôté 4 de 29, le reste 25 marquera la somme des points des quatre cartes choisies, 3, 5, 7, 10.

Si après avoir ôté du nombre des cartes du Jeu proposé la somme composée du nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre des cartes choisies par le nombre qu'on a fait accomplir, il ne reste rien, le nombre des cartes res-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 229
rées de tout le Jeu , exprimera le nombre des
points des cartes choisies.

Exemple.

Qu'on ait choisi dans un Jeu entier trois cartes,
dont les points soient 1 , 3 , 4 , 7 , & qu'on les
ait fait accomplir jusqu'à 12 , il faut multiplier 12
par 4 nombre des cartes choisies , & ajouter au
produit 48 le même nombre 4 , la somme sera 52
égale au nombre des cartes du Jeu entier. Comme
il ne reste rien , c'est une marque que le nombre
des points des cartes choisies sera exprimé par le
nombre des cartes restantes , qui est 15. Car pour
accomplir 12 avec 1 point de la première carte ,
il faut 11 cartes ; pour accomplir 12 avec les trois
points de la seconde carte , il faut 9 cartes ; pour
accomplir 12 avec les 4 points de la troisième
carte , il faut 8 cartes : enfin pour accomplir 12
avec les 7 points de la quatrième carte , il faut
5 cartes. Toutes ces cartes 11 , 9 , 8 , 5 , avec les
4 choisies , font 37 , qui étant ôté de 52 , donnent
pour reste 15 , nombre des points des cartes choi-
sies 1 , 3 , 4 , 7.

Si la somme composée du nombre des cartes
choisies , & du produit de ce même nombre par
le nombre qu'on a fait accomplir , se trouve plus
grande que le nombre des cartes du Jeu proposé ,
alors il faut soustraire de cette somme le nombre
des cartes du Jeu proposé , & le reste sera un
nombre qu'il faudra ajouter au nombre des cartes
restées , pour avoir le nombre des points des car-
tes choisies.

Exemple.

Si l'on avoit choisi dans un Jeu de trente-six
cartes 4 cartes , dont les points fussent 4 , 7 ,

9, & qu'on se proposât d'accomplir ces points jusqu'à 15 avec le nombre des cartes qu'on auroit tiré du Jeu, il faudroit multiplier 15, nombre qu'on a fait accomplir, par 3 nombre des cartes choisies, le produit est 45, auquel on ajoutera 3, nombre des cartes choisies. La somme 48 est plus grande que 36, nombre des cartes du Jeu proposé: il faut donc ôter 36 de 48, le reste 12 doit être ajouté au nombre des cartes restées, qui est 8; car on a dû tirer du Jeu proposé 11 cartes, pour accomplir 15 avec les 4 points de la première carte, 8 pour accomplir 15 avec les 7 points de la deuxième carte, & 6 pour accomplir 15 avec les 9 points de la troisième carte: toutes ces cartes 11, 8, 6 avec les 3 choisies, font 28, qui étant ôtés de 36 nombre des cartes du Jeu proposé, donnent pour reste 8. Ayant donc ajouté ces 8 cartes avec les 12, différence de 48, somme trouvée, à 36, nombre des cartes du Jeu proposé, on aura 20 pour le nombre des points des cartes choisies 4, 7, 9

Il faut observer, 1°. qu'on peut faire accomplir tel nombre qu'on voudra, en comptant les points de chaque carte jusqu'à ce nombre: il n'est pas même nécessaire de faire accomplir le même nombre avec les points des cartes choisies. Par exemple, on peut, avec les points de trois cartes choisies, faire accomplir trois différens nombres, comme 13, 14, 15; alors on ajoutera ensemble ces trois nombres, que l'on augmentera de 3 nombre des cartes choisies, & l'on achevera le reste, comme on a dit.

Il faut 2°. prendre garde qu'il peut arriver que la somme des nombres qui vient, lorsqu'on a fait accomplir, est si grande qu'il n'y aura point assez de cartes dans le Jeu proposé pour les en tirer.

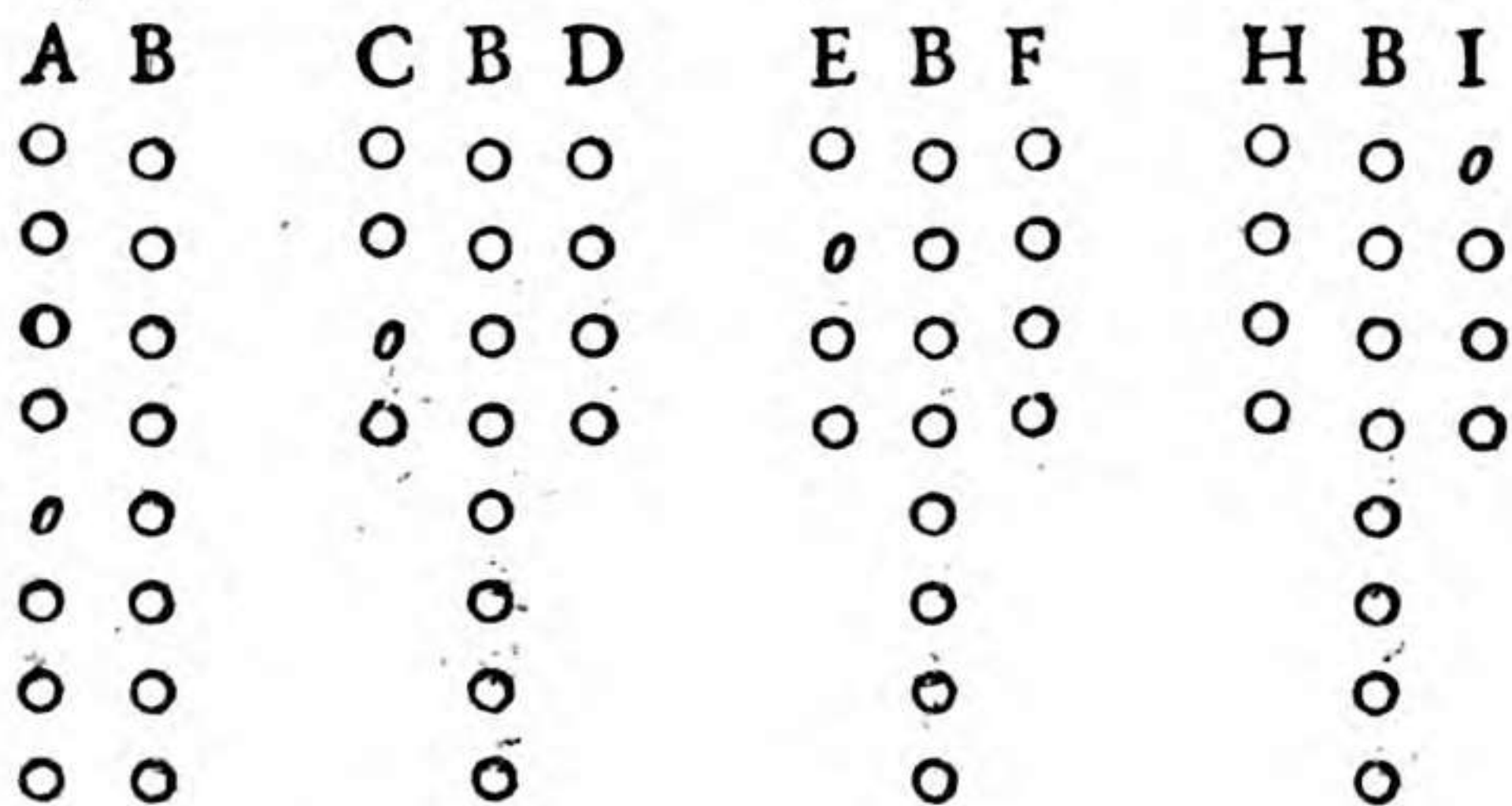
Néanmoins on résoudra le Problème, si on sçait de combien le nombre des cartes qu'on devoit retirer surpasse celui des cartes du Jeu proposé. Par exemple, si le nombre des cartes du Jeu proposé étoit 36, qu'on eût fait accomplir 15, & que les trois cartes choisies fussent 2, 3, 4, il est certain qu'on ne pourroit pas retirer de 36 toutes les cartes, lorsqu'on auroit fait accomplir 15 avec tous les points de chacune des cartes; car il faudroit prendre 13 cartes pour accomplir 15 avec 2 points de la première carte, 12 pour la seconde, & 11 pour la troisième; mais ces trois nombres 13, 12, 11, avec 3, nombre des cartes choisies, font 39, qui est plus grand que 36. Il faudra donc sçavoir que 39 surpasse 36 de 3: alors on ôtera ces excès 3 de 12, autre excès de 36, nombre des cartes du Jeu proposé à 48 somme de 3, nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre 3 par 15, nombre qu'on a fait accomplir; & le reste 9 est le nombre des points des trois cartes choisies 2, 3, 4. Consultez Bachet dans ses *Problèmes plaisans & délectables*, où vous trouverez des démonstrations de plusieurs Problèmes qu'on propose dans ces Problèmes d'Arithmétique.

PROBLEME XXXIX.

De 16 jettons, deviner celui que quelqu'un aura pensé.

IL faut disposer ces jettons en deux rangs, en sorte qu'il y en ait 8 en l'un & 8 en l'autre, comme on le voit dans la figure suivante. Ensuite il faut demander à celui qui aura pensé un jetton dans quel rang il est. S'il répond qu'il est dans le

rang A , levez les jettons de la rangée A , & disposez-les en deux rangées , dont l'une contiendra 4 jettons , & la seconde 4 autres , comme vous voyez en C & D , ayant laissé la rangée B sans y toucher. Demandez encore en quel rang est le



jetton pensé. Si on dit qu'il est dans le rang C , levez le rang C & le rang D , de manière que les jettons d'un rang ne soient point confondus avec les jettons de l'autre rang , & faites-en deux autres rangs , comme vous voyez en E & F ; mais en les rangeant , faites que les jettons du rang C soient posés de côté & d'autre du rang B , en sorte que le premier du rang C soit le premier du rang E , le second du rang C , soit le premier du rang F , & le troisième du rang C , soit le second du rang E , puis le quatrième du rang C , soit le second du rang F , &c. Demandez encore en quel rang se trouve le jetton pensé ; & si on vous dit qu'il est dans le rang E , levez encore les jettons comme on vient de le dire , & disposez-les de la même façon. Demandez enfin en quel rang est le jetton pensé , il doit occuper la première place du rang où l'on aura dit qu'il se trouve : comme dans cette figure , où le jetton italique est le premier de son rang.

REMARQUE.

Il seroit plus aisé d'exécuter ce Problême avec des cartes , & on couvriroit davantage l'artifice , en battant les cartes , après avoir reconnu celle qui aura été pensée , & en les comptant pour la découvrir.

PROBLEME XL.

Du Jeu de l'Anneau.

C E Jeu se peut pratiquer agréablement dans une compagnie composée de plusieurs personnes , dont le nombre ne doit pas être plus grand que 9 , afin d'y pouvoir plus facilement appliquer le Problême XXI.* On fera valoir 1 la première personne , 2 la seconde , 3 la troisième , & ainsi de suite. On fera aussi valoir 1 la main droite , & 2 la main gauche. On donnera pareillement 1 au premier doigt d'une main , 2 au second , 3 au troisième , 4 au quatrième , 5 au cinquième. Enfin on donnera 1 à la première jointure , 2 à la seconde , & 3 à la troisième. Cela étant imaginé , si l'on fait mettre à l'une de ces personnes , par exemple , à la cinquième , un Anneau à la première jointure du quatrième doigt de sa main gauche , il est évident que pour deviner la personne qui aura pris cet Anneau ou Bague , & dire en quelle main , en quel doigt & en quelle jointure il est , il n'y a qu'à deviner ces quatre nombres 5 , 1 , 4 , 2 , le premier 5 représentant la cinquième personne , le second 1 la première jointure , le troisième 4 le quatrième doigt , & le quatrième 2 la main gauche. Ce qui se fera en suivant la dernière méthode du Problême XXI.* comme vous allez voir.

* page
163. art.
IV.

Otant 1 de 10, double du premier nombre 5, & multipliant le reste 9 par 5, on a 45, auquel ajoutant le second nombre 1, on a cette somme 46, à laquelle si on ajoute 5, on a cette seconde somme 51, dont le double est 102, d'où ôtant 1, il reste 101, qui étant multiplié par 5, produit 505, auquel ajoutant le troisième nombre 4, on a cette somme 509, à laquelle ajoutant encore 5, on a cette seconde somme 514, dont le double 1028 étant diminué de 1, & le reste 1027 étant multiplié par 5, produit 5135, auquel ajoutant le quatrième nombre 2, on a cette somme 5137, à laquelle ajoutant 5, on a cette seconde somme 5142, dont les quatre figures représentent les quatre nombres qu'on cherche, & font connoître par conséquent que l'Anneau est dans la première jointure du quatrième doigt de la main gauche de la cinquième personne.

Autre manière.

On prendra pour première personne celle qui est le plus à main gauche, comme cela se fait ordinairement, pour la seconde celle qui est après, pour troisième celle qui est ensuite, & ainsi des autres. On ne fera point d'autre distinction entre les deux mains, que d'observer le même ordre en comptant pour premier doigt le petit doigt de la main droite, & pour le dixième le petit doigt de la main gauche, ou d'une autre façon, suivant qu'on le trouvera plus commode. Enfin on distinguera par ordre les trois jointures de chaque doigt, en commençant par celle qui est la plus proche de la racine du doigt, ou par celle qui est la plus proche du bout du doigt. Cependant comme il semble qu'il n'y a que deux jointures au pouce, il seroit peut-

Être plus à propos de compter ces jointures par celle qui est la plus près de l'extrémité du doigt, & d'avertir qu'on commencera à compter par celle-là.

Cela étant supposé, dites que l'on double le nombre qui convient à la personne qui a la Bague, & que l'on ajoute 5 à ce double; dites ensuite qu'on multiplie le tout par 5, & que l'on ajoute à ce produit le nombre qui convient au doigt; cela étant fait, dites encore que l'on multiplie cette somme par 10, & que l'on ajoute au produit le nombre qui convient à la jointure où est la Bague. Demandez enfin la somme de ces nombres.

Si vous ôtez secrettement de cette somme le nombre 250, le reste exprimera par les centaines le nombre de la personne qui a la Bague, par les dizaines le quantième des doigts, & par les unitez la jointure du doigt.

Exemple.

Je suppose que la septième personne de la compagnie ait la Bague au neuvième doigt, c'est-à-dire, au doigt annulaire de la main gauche, & à la deuxième jointure de ce doigt. Faites doubler 7, le double sera 14, auquel vous ferez ajouter 5, la somme sera 19: faites multiplier ces 19 par 5, le produit sera 95; auxquels faisant ajouter le nombre 9 qui convient au doigt, il viendra 104. Faites multiplier ce nombre 104 par 10, on aura pour produit 1040, auxquels faisant ajouter 2, qui convient à la jointure, la somme sera 1042; vous demanderez cette somme, & quand vous la sçauvez vous en ôterez secrettement 250, il restera 792, dont le 7 exprimera la septième personne qui a la Bague, le 9 marquera que c'est au neuvième doigt, & le 2 fera voir que c'est à la deuxième jointure.

R E M A R Q U E.

S'il y avoit un zero au rang des dixaines, ce seroit une marque que la Bague se trouveroit au dixième doigt : alors il faudroit ôter 1 du nombre des centaines, & le reste marqueroit le nombre qui convient à la personne qui auroit la Bague.

P R O B L E M E X L I.

Plusieurs cartes étant disposées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.

ON prend ordinairement quinze cartes, que l'on dispose en trois rangs, de manière qu'il y en ait cinq en chaque rang. 1°. Les cartes étant ainsi rangées, & ayant demandé à celui qui en aura pensé une, en quel rang elle se trouve; ramassez chaque rang, & rassemblez-les en mettant dans le milieu celui où se trouvera la carte pensée. 2°. Disposez encore toutes les cartes en trois rangs, mettant la première, c'est-à-dire, celle de dessus, au premier rang, la suivante au second rang, la troisième au troisième rang, la quatrième au premier rang, la cinquième au second rang, & les autres de la même manière, jusqu'à ce qu'elles soient toutes rangées. Puis ayant encore demandé en quel rang est la carte pensée, vous ramasserez, comme auparavant, chaque rang, & les rassemblerez, en mettant au milieu celui où se trouve la carte pensée. 3°. Vous rangerez encore les cartes de la même manière qu'on vient de faire, & ayant demandé en quel rang se trouve la carte pensée, vous serez assuré qu'elle sera la troisième de ce même rang. 4°. Ayant reconnu la carte pensée, vous pou-

vez ramasser les rangs , en mettant encore au milieu celui où est la carte pensée ; pour lors elle se trouvera au milieu des quinze cartes , & de quelcôté que l'on commence à compter , elle se trouvera la huitième. On peut aussi , après avoir reconnu la carte pensée , mêler les cartes , & montrer la carte pensée , en les découvrant l'une après l'autre.

REMARQUES.

On peut faire ce même Jeu avec un autre nombre de cartes , & en plusieurs façons différentes. On prendra , par exemple , seize cartes , que l'on disposera en quatre rang , & à chaque rang on mettra quatre cartes. Après avoir scû en quel rang est la carte pensée , on levera les rangs ; on retiendra dans sa mémoire celui où est la carte pensée , & on rangera les cartes de la manière qu'on l'a dit , en sorte que les cartes des rangs précédens se sépareront , & que chacune se trouvera dans un autre rang : je veux dire que la première , ou celle de dessus les cartes levées , se trouvera au premier rang , la suivante se trouvera au second rang , la troisième au troisième rang , & la quatrième au quatrième rang. Ainsi les quatre cartes qui étoient ensemble dans la disposition précédente , se trouveront dans les quatre rangs dans cette seconde disposition. Par conséquent , si l'on avoit mis le rang où se trouvoit la carte pensée au dessus des autres , on seroit assuré que cette carte est la première dans l'un des rangs de cette seconde disposition. Il sera donc très-aisé de la deviner , quand on aura demandé en quel rang elle se trouve dans cette seconde disposition , puisqu'elle est infailliblement la première.

Mais si le rang où se trouvoit la carte dans la première disposition, avoit été mis au dessous du premier des rangs levez, cette même carte se trouveroit la seconde dans l'un des rangs de la deuxième disposition. On juge bien qu'elle se trouveroit la troisième dans la seconde disposition, si le rang où elle se trouvoit en premier lieu, avoit été mis dans la troisième place des rangs levez, & qu'elle se trouveroit la quatrième de l'un des rangs de la seconde disposition, si ce rang levé avoit été mis à la quatrième place des rangs levez.

PROBLEME XLII.

Ayant un Vase rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre justement la moitié dans un autre Vase de cinq pintes, par le moyen d'un troisième Vase contenant trois pintes.

ON propose ordinairement cette Question de la sorte : Quelqu'un ayant une Bouteille pleine de 8 pintes d'excellent vin, en veut faire présent de la moitié, ou de quatre pintes, à un de ses amis : mais pour la mesurer il n'a que deux autres Bouteilles, dont l'une contient 5 pintes, & l'autre 3. On demande comment il doit faire pour mettre quatre pintes dans la Bouteille qui en contient cinq.

Pour le sçavoir, appellons A la Bouteille de 8 pintes, B celle de 5, & C celle de 3, en supposant qu'il y a 8 pintes de vin dans la Bouteille A, & que les deux autres B, C, soient vuides, comme vous voyez en D. Ayant rempli la Bouteille B du vin de la Bouteille A, où il ne restera plus que 3 pintes, comme vous voyez en E, remplissez

la Bouteille C du vin de la Bouteille B , où par conséquent il ne restera plus que 2 pintes , comme vous voyez en F. Après cela versez le vin de la Bouteille C dans la Bouteille A , où par conséquent il y aura 6 pintes , comme vous voyez en G , & versez les 2 pintes de la Bouteille B dans la Bouteille C , où il y aura 2 pintes , comme vous voyez en H. Enfin ayant rem-

pli la Bouteille B du vin de la Bouteille A , où il restera seulement 1 pinte , comme , comme vous voyez en I ; achevez de remplir la Bouteille C du vin de la Bouteille B , où il restera 4 pintes , comme vous voyez en K , & ainsi la Question se trouvera résolue.

R E M A R Q U E.

Si au lieu de faire rester les quatre pintes de vin dans la Bouteille B , vous voulez qu'elles restent dans la Bouteille A , que nous

| | | | | |
|----|----|----|----|-----------------------------------|
| | 8. | 5. | 3. | avons supposé remplie de huit |
| | A. | B. | C | pintes , remplissez la Bouteille |
| | 8. | 0. | 0. | C du vin qui est dans la Bou- |
| D | 5. | 0. | 3. | teille A , où alors il ne restera |
| E. | 5. | 3. | 0. | plus que 5 pintes , comme vous |
| F. | 2. | 3. | 3. | voyez en D , & versez les |
| G. | 2. | 5. | 1. | trois pintes de la Bouteille C , |
| H. | 7. | 0. | 1. | dans la Bouteille B , où il y |
| I. | 7. | 1. | 0. | aura par conséquent 3 pintes |
| K. | 4. | 1. | 3. | de vin , comme vous voyez en |

E. Puis ayant rempli la Bouteille C du vin de la Bouteille A , où il ne restera

plus que 2 pintes , comme vous voyez en F ; achevez de remplir la Bouteille B du vin qui est dans la Bouteille C , où il ne restera plus qu'une pinte , comme vous voyez en G. Enfin ayant versé le vin de la Bouteille B dans la Bouteille A , où il se trouvera 7 pintes , comme vous voyez en H , versez la pinte de vin , qui est en C , dans la Bouteille B , où il y aura par conséquent 1 pinte , comme vous voyez en I , & remplissez la Bouteille C du vin de la Bouteille A , où il ne restera que 4 pintes , comme il étoit proposé , & comme vous voyez en K.

PROBLEME XLIII.

Une personne a une Bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner six pintes au Frere Questeur ; il n'a pour les mesurer que deux autres Bouteilles , l'une de sept pintes , & l'autre de cinq. Que doit il faire pour avoir les six pintes dans la Bouteille de sept pintes ?

CE Problème est la même chose que le précédent , on l'exécutera aussi de de la même manière. Soit nommé D la Bouteille de douze pintes , S celle de sept pintes , & C celle de cinq pintes. La Bouteille D est pleine , & les deux autres S , C , sont vuides , comme on voit en G. Remplissez la Bouteille C , du vin qui est en D , & la Bouteille D ne contiendra plus que 7 pintes , comme on voit en H. Puis versez dans S le vin que contient la Bouteille C , qui demeurera vuide , & la Bouteille S contiendra 5 pintes , comme on voit en I. Ensuite ayant rempli C avec le vin qui est en D , la Bouteille D ne contiendra plus que 2 pintes , la
Bouteille

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 241

Bouteille S en contiendra 5, & la Bouteille C sera pleine, comme on voit en K : après cela versez

| | | | | |
|----|-----|----|----|--------------------------------|
| | 12. | 7. | 5. | la Bouteille S pour la rem- |
| | D. | S. | C. | plir, & la Bouteille D ne |
| G. | 12. | 0. | 0. | contiendra encore que deux |
| H. | 7. | 0. | 5. | pintes, la Bouteille S en con- |
| I. | 7. | 5. | 0. | tiendra sept, & la Bouteille |
| K. | 2. | 5. | 5. | C n'en contiendra plus que |
| L. | 2. | 7. | 3. | trois, comme on voit en L. |
| M. | 9. | 3. | 0. | Cela étant fait, vuidez S en |
| N. | 4. | 7. | 1. | D, & C en S, & il y aura |
| P. | 11. | 1. | 0. | neuf pintes en D, trois pin- |
| Q. | 6. | 6. | 0. | tes en S, & C sera vuide ; |

comme on le voit en M. Ensuite remplissez C de la Bouteille D, & de C versez en S pour la remplir ; alors il y aura quatre pintes en D, sept pintes en S, & une pinte en C ; comme vous voyez en N. Cela fait, remettez les sept pintes de S dans D, & la pinte de C dans S, & C contiendra onze pintes, S en contiendra une, & C sera vuide, comme on le voit en P. Enfin ayant rempli de la Bouteille D la Bouteille C, qui contient cinq pintes, & ayant versé ces cinq pintes de C dans la Bouteille S, qui en contient déjà une, on trouvera que D contient six pintes, & que S en contient aussi six ; ainsi on est parvenu à ce qu'on souhaitoit.



PROBLEME XLIV.

Partager à trois personnes vingt-un tonneaux , dont il y en a sept vuides , sept pleins , & sept demi pleins ; de telle manière que ces trois personnes ayent autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Cette Question peut être résolue en deux manières. On voit d'abord que chacune de ces personnes doit avoir sept tonneaux. On peut partager 7 en 3 parties , 2 , 2 , 3 , qui prises ensemble font 7. Ces trois nombres servent à la première solution de la Question.

Première Solution.

Le premier de ces nombres 2 doit être appliqué à la première personne , qui prendra 2 tonneaux pleins , 2 tonneaux vuides , & par conséquent 3 à moitié pleins , pour en avoir 7. Le second nom-

| | <i>pleins.</i> | <i>vuides.</i> | $\frac{1}{2}$ <i>pleins.</i> |
|------------------------|----------------|----------------|------------------------------|
| 1 ^e . Perf. | 2 | 2 | 3 |
| 2 ^e . Perf. | 2 | 2 | 3 |
| 3 ^e . Perf. | 3 | 3 | 1 |

bre 2 s'appliquera à la deuxième personne , qui prendra , comme la première , 2 tonneaux pleins , 2 vuides , & 3 demi pleins. Enfin le troisième nombre 3 s'appliquera à la troisième personne , qui prendra 3 tonneaux pleins , 3 tonneaux vuides , & 1 tonneau demi plein , pour en avoir 7. De cette manière , ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Le même nombre 7 peut être encore partagé en 3 autres parties, 3, 3, 1, qui prises ensemble font 7. Ces trois nombres servent à la deuxième solution de la Question.

Deuxième Solution.

Le premier de ces nombres 3 s'appliquera à la première personne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 vuides, & 1 à moitié plein, pour en avoir sept. Le deuxième nombre 3 s'appliquera à la seconde

| | <i>pleins.</i> | <i>vuides.</i> | $\frac{1}{2}$ <i>pleins.</i> |
|------------------------|----------------|----------------|------------------------------|
| 1 ^e . Pers. | 3 | 3 | 1 |
| 2 ^e . Pers. | 3 | 3 | 1 |
| 3 ^e . Pers. | 1 | 1 | 5 |

personne, qui prendra ses tonneaux comme la première personne. Enfin le troisième nombre 1, s'appliquera à la troisième personne, qui prendra un tonneau plein, un tonneau vuide, & cinq à moitié pleins, pour en avoir sept. Ainsi ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

On a mis ici deux Tables, que l'on peut distinguer en colonnes perpendiculaires, & en colonnes horizontales. Les colonnes perpendiculaires marquent la qualité des tonneaux qui doivent être distribués à chacune des trois personnes, & les colonnes horizontales ou transversales marquent la quantité des tonneaux, eu égard à leur qualité, qui doivent être distribués à chaque personne.

Il est évident que les trois personnes ont chacune 7 tonneaux, comme il paroît en ajoutant ensemble

ble les nombres qui se trouvent dans une colonne horizontale, & qui appartiennent à une seule personne. Il est aisé de reconnoître qu'elles ont autant de vin l'une que l'autre, en ajoutant les tonneaux pleins, avec la moitié des tonneaux demi pleins d'une part, & les tonneaux vuides avec la moitié restante des tonneaux demi pleins, ou plutôt demi vuides d'autre part pour la même personne. On fera la même observation sur les exemples & les Tables suivantes.

REMARKES.

La règle générale pour résoudre ces sortes de Questions, est de diviser le nombre des tonneaux par le nombre des personnes. Si le quotient n'est pas un nombre entier, la Question est impossible : mais si le quotient est un nombre entier, il faut partager ce quotient en autant de parties qu'il y a de personnes, avec cette condition, que chacune de ces parties sera plus petite que la moitié du quotient trouvé. Chaque personne prendra autant de tonneaux vuides que pleins.

S'il étoit proposé de partager 21 tonneaux à 4 personnes, la Question seroit impossible, puisqu'on ne peut diviser exactement 21 par 4. * Mais si on proposoit de partager à 4 personnes 24 tonneaux, avec les mêmes conditions ci-dessus, la Question est très-possible ; car divisant 24 par 4, il vient au quotient 6, qui est un nombre entier, & 6 peut être divisé en ces quatre parties 2, 2, 1, 1, qui serviront à la solution de la Question propo-

* Pour partager également à quatre personnes 21 tonneaux, il faudroit en donner $5\frac{1}{4}$ à chacune. On ne peut ainsi briser un tonneau en plusieurs pièces.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 245
 fée, selon la Table qu'on a ajouté ici, ou l'on voit

| | <i>pleins.</i> | <i>vuides.</i> | $\frac{1}{2}$ <i>pleins.</i> | $\frac{1}{2}$ <i>vuides.</i> |
|------------------------|----------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| 1 ^e . Perf. | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2 ^e . Perf. | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 ^e . Perf. | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 4 ^e . Perf. | 1 | 1 | 2 | 2 |

que les quatre personnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Cette Question n'a qu'une seule solution, parce que le nombre 6 ne peut être partagé en 4 autres parties, telles que la plus petite soit moindre que la moindre que la moitié de lui-même.

On peut encore partager 27 tonneaux à trois personnes, avec les mêmes conditions que l'on a supposé dans les autres exemples: car 27 peut être exactement divisé par 3, & le quotient est 9; mais ce nombre 9 peut être divisé en trois parties, dont chacune sera plus petite que la moitié de lui-même: ce qui se peut faire en trois manières diffé-

| | <i>pleins.</i> | <i>vuides.</i> | $\frac{1}{2}$ <i>pleins.</i> |
|------------------------|----------------|----------------|------------------------------|
| 1 ^e . Perf. | 3 | 3 | 3 |
| 2 ^e . Perf. | 3 | 3 | 3 |
| 3 ^e . Perf. | 3 | 3 | 3 |

rentes: car 9 peut être premièrement partagé en ces trois parties 3, 3, 3, dont la somme fait 9. La Table qui est ci-dessus montre ce que chacune des trois personnes doit avoir de tonneaux tant pleins que vuides & demi pleins.

Ce même nombre 9 peut en second lieu être

divisé en trois autres nombres 1, 4, 4, qui pris

| | pleins. | vides. | $\frac{1}{2}$ pleins. |
|------------------------|---------|--------|-----------------------|
| 1 ^e . Pers. | 1 | 1 | 7 |
| 2 ^e . Pers. | 4 | 4 | 1 |
| 3 ^e . Pers. | 4 | 4 | 1 |

ensemble font 9. Les trois personnes seront partagées de la manière qu'on le voit dans cette Table.

Enfin ce nombre 9 peut être partagé en ces trois autres nombres, 2, 3, 4, dont la somme est 9,

| | pleins. | vides. | $\frac{1}{2}$ pleins. |
|------------------------|---------|--------|-----------------------|
| 1 ^e . Pers. | 2 | 2 | 5 |
| 2 ^e . Pers. | 3 | 3 | 3 |
| 3 ^e . Pers. | 4 | 4 | 1 |

& les trois personnes seront partagées comme il est marqué dans la Table qu'on a ici ajouté.

On voit dans ces trois dernières Tables que les trois personnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

PROBLEME XLV.

Quinze Chrétiens & quinze Turcs se trouvant sur Mer dans un même Vaisseau, il survient une furieuse tempête. Après avoir jetté dans l'eau toutes les marchandises, le Pilote dit qu'il est encore nécessaire d'y jeter la moitié des personnes. Il les fait ranger de suite, & en comptant de neuf en neuf, il jette chaque neuvième dans la Mer, en recommençant à compter le premier du rang, lorsque le

rang est fini : il se trouve qu'après avoir jetté quinze personnes , les quinze Chrétiens sont restez. Comment a-t'il disposé les trente personnes pour sauver les Chrétiens ?

LA disposition de ces trente personnes se tirera de ces deux vers François.

*Mort , tu ne failliras pas ,
En me livrant le trépas.*

Il suffit de faire attention aux voyelles A , E , I , O , U , qui se trouvent dans les syllabes des mots qui composent ces deux Vers. On doit supposer que A vaut 1 , E vaut 2 , I vaut 3 , O vaut 4 , & U vaut 5. On commencera à ranger des Chrétiens , puis des Turcs , & ainsi de suite , en mettant alternativement des Chrétiens & des Turcs , jusqu'à ce qu'on ait rangé les trente personnes. Cela étant supposé, l'O , qui est dans la première syllabe (Mort) fait connoître qu'on doit ranger d'abord 4 Chrétiens ; l'U , qui est dans la seconde syllabe (tu) montre qu'on doit ranger ensuite 5 Turcs ; l'E , qui est dans la troisième syllabe (ne) fait voir qu'on doit disposer 2 Chrétiens ; l'A de la quatrième syllabe (fail) montre qu'on doit mettre ensuite 1 Turc ; l'I de la cinquième syllabe fait connoître qu'on doit ranger 3 Chrétiens , & ainsi des autres , en appliquant les voyelles de chaque syllabe aux nombres qu'on leur a attribué.

R E M A R Q U E.

Au lieu des deux Vers François , on peut employer ce Vers Latin , où l'on trouve les mêmes voyelles dans le même ordre.

*Populeam virgam mater Regina ferebat.
Q i i j*

On donnera ici plus d'étendue à ce Problème, afin qu'il puisse être utile aux Capitaines, qui ayant plusieurs Soldats à punir, sont obligez de les faire décimer. Par ce moyen ils feront tomber le sort sur les plus coupables, en les rāngeant de la manière que nous allons enseigner.

La règle est d'écrire autant de zeros qu'il y a de personnes coupables, & commençant à compter par le premier zero de marquer avec une croix le tantième qu'on voudra punir, & de faire la même chose en recommençant le rang, & passant les zeros marquez jusqu'à ce qu'on ait marqué le nombre qu'on souhaite punir. Il faudra disposer les Soldats de la même manière qu'on a rangé les zeros, & mettre les plus coupables au lieu où se trouveront les zeros marquez de la croix.

Par exemple, si trente six Soldats sont coupables, & qu'on en veuille punir six des plus coupables en les décimant, c'est-à-dire, en les comptant dix à dix, pour faire punir chaque dixième, on les rangera comme on voit ces trente-six zeros rangez, & on aura soin de faire mettre les plus coupables à la place où l'on voit des croix sur les zeros.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + | | | + | | | | + | |
| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| | + | | + | | | + | | | |
| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

Il est aisé d'appliquer cette règle à quelque nombre que ce soit, & à quelque quantième qu'on veuille rejeter d'un nombre déterminé.

On prétend que c'est en pratiquant cette règle, que Josephe, l'Historien Juif, resta seul avec un autre, de quarante & un qu'ils étoient dans une caverne, où ils s'étoient retirez après la prise de

Jotapata par Vespasien. L'Histoire en est assez curieuse pour la rapporter ici : je ne ferai que la copier de la Préface de Bachet sur ses *Problèmes plaisans & délectables*, après l'avoir conféré avec ce qu'en dit lui-même Jofephe, dans son Histoire de la Guerre des Juifs, liv. 3. chap. 14.

Hegesippus, dit Bachet, rapporte au troisième livre de la Prise de Jerufalem, la mémorable Histoire de Jofephe, qui étant Gouverneur dans la Ville de Jotapata, lorsqu'elle fut assiegée, & un peu après emportée d'assaut par Vespasien, fut contraint de se retirer dans *une caverne qui étoit au fond d'une fosse, où il trouva quarante braves guerriers*, pour éviter la fureur des armes victorieuses des Romains. Mais il fut exposé à un plus grand péril parmi les siens, que parmi les ennemis; car comme il eut arrêté de s'aller rendre à la discrétion du Vainqueur, ne pouvant imaginer aucun autre moyen de se garantir de la mort, il trouva ses Soldats saisis d'une telle fureur, qu'ils vouloient tous mourir, & s'entretuer les uns les autres plutôt que de prendre parti. Jofephe s'efforça de les détourner d'une si malheureuse entreprise; mais ce fut en vain: car rejetant tout ce qu'il put alleguer au contraire, & persistant en leur opinion, ils en vinrent jusques-là que de le menacer, s'il ne s'y portoit volontairement, de l'y contraindre par force, & de commencer par lui-même l'exécution de leur tragique dessein. Alors sans doute c'étoit fait de sa vie, s'il n'eût eu l'esprit de se défaire de ces furieux par l'artifice de mon vingt-troisième Problème: car feignant d'adhérer à leur volonté, il se conserva l'autorité qu'il avoit sur eux, & par ce moyen leur persuada facilement, que pour

» éviter le désordre & la confusion qui pourroient
 » survenir en un tel acte , s'ils s'entretuoient à la
 » foule , il valoit mieux se ranger par ordre en
 » quelque façon , & commençant à compter par
 » un bout , massacrer toujourns le tantième (l'Au-
 » teur n'exprime pas le quantième) jusqu'à ce qu'il
 » n'en demeurât qu'un seul , lequel seroit obligé
 » de se tuer lui-même. Tous en étant demeurez
 » d'accord, Joesephe les disposa de sorte , & choisit
 » pour lui une si bonne place , que la tuerie étant
 » continuée jusqu'à la fin , il demeura seul avec un
 » autre , qu'il sauva apparemment de la même ma-
 » nière , parce qu'il pouvoit en attendre une entiè-
 » re & parfaite obéissance.

Bachet nous instruit lui-même dans son vingt-troisième Problème de la manière dont Joesephe a pû s'y prendre pour se sauver lui-même avec un de ses compagnons. Comme il y avoit quarante Soldats avec Joesephe dans cette caverne, ce qui faisoit en tout quarante & une personnes , on peut supposer qu'il ordonna que comptant de trois en trois on tueroit toujourns le troisième. Cela étant supposé , il est aisé de connoître par la règle , qu'il se mit le trente & unième , & qu'il fit mettre en la seizième place celui qu'il voulut sauver.

PROBLEME XLVI.

Trois choses ayant été distribuées secretement à trois personnes , deviner celle que chacune aura pris.

Que ces trois choses soient une Bague , un Ecu & un Gant ; vous vous représenterez la Bague par la lettre A , l'Ecu par E , & le Gant par I. Que les trois personnes soient Pierre , Si-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 251

mon & Thomas ; vous les regarderez dans leur place tellement rangez , que l'un , comme Pierre , sera le premier , Simon le second , & Thomas le troisieme. Ayant fait ces dispositions en vous-même , vous prendrez vingt-quatre jettons , dont vous donnerez un à Pierre , deux à Simon , & trois à Thomas ; vous laisserez les dix-huit autres sur la table : ensuite vous vous retirerez de la compagnie , afin que les trois personnes se distribuent les trois choses proposées , sans que vous le voyez. Cette distribution étant faite , vous direz que celui qui a pris la Bague prenne des dix-huit jettons qui sont restez , autant de jettons que vous lui en avez donné ; que celui qui a pris l'Ecu , prenne des jettons restez deux fois autant de jettons que vous lui en avez donné : enfin que celui qui a pris le Gant , prenne sur le reste des jettons quatre fois autant de jettons que vous lui en avez donné. (Dans notre supposition Pierre en aura pris un , Simon quatre , & Thomas douze ; par conséquent il ne sera resté qu'un jetton sur la table.) Cela étant fait , vous reviendrez , & vous connoîtrez par ce qui sera resté de jettons la chose que chacun aura pris , en faisant usage de ce Vers François.

1 2 3 5 6 7
Par ser Cesar jadis devint si grand Prince.

Pour pouvoir se servir des mots de ce Vers , il faut sçavoir qu'il ne peut rester qu'un jetton , ou 2 , ou 3 , ou 5 , ou 6 , ou 7 , & jamais 4 : il faut de plus faire attention que chaque syllabe contient une des voyelles , que nous avons dit représenter les trois choses proposées : enfin il faut considérer ce Vers , comme n'étant composé que de sept mots , & que la première syllabe de chaque

mot représente la première personne, qui est Pierre, & la seconde syllabe représente la seconde personne, qui est Simon. Cela bien conçu, s'il ne reste qu'un jetton, comme dans nôtre supposition, vous vous servirez du premier mot, où plutôt des deux premières syllabes, *Par fer*, dont la première qui contient A, fait voir que la première personne, ou Pierre, a la Bague représentée par A, & la seconde syllabe, qui contient E, montre que la seconde personne, ou Simon, a l'écu représenté par E; d'où vous conclurez facilement que la troisième personne, ou Thomas, a le Gant.

S'il restoit 2 jettons, vous consulteriez le second mot *Cesar*, dont la première syllabe, qui contient E, feroit connoître que la première personne auroit l'Ecu représenté par E, & la seconde syllabe, qui contient A, montreroit que la seconde personne auroit la Bague représentée par A; d'où il seroit aisé de conclure que la troisième personne auroit le Gant. En un mot, selon le nombre des jettons qui resteront, vous employerez le mot du Vers qui sera marqué du même nombre.

REMARQUES.

Au lieu du Vers François qu'on a rapporté, on peut se servir de ce Vers Latin.

| | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------------|-------------|---------------|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 |
| <i>Salve</i> | <i>certa</i> | <i>anima</i> | <i>semita</i> | <i>vita</i> | <i>quies.</i> |

Ce Problème peut être exécuté un peu autrement qu'on vient de le faire, & on peut l'appliquer à plus de trois personnes: ceux qui voudront en être plus particulièrement instruits, consulte-

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 253
font Bachet dans le vingt-cinquième de ses *Problèmes plaisans & délectables*.

PROBLEME XLVII.

Trois personnes ont un certain nombre d'écus. La première donne des siens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Ensuite la seconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Enfin la troisième en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette distribution étant faite, il se trouve que chaque personne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune.

LA première personne avoit 13 écus, la seconde 7, & la troisième 4; ce qu'il est aisé de reconnoître en distribuant les écus de chaque personne, suivant ce qui est énoncé dans le Problème.

REMARQUE.

L'Algèbre donne aisément la résolution de ce Problème. Ceux qui commencent à l'apprendre, pourront s'exercer à la trouver, & à former d'autres Problèmes sur ce modèle. Comme si la première personne donne trois fois autant d'écus aux deux autres qu'elles en ont, &c. & qu'au lieu de déterminer le nombre égal d'écus que chaque personne a à la fin, ils le laissent indéterminé, ils trouveront des solutions à l'infini. Ils reconnoîtront aussi que ce Problème quarante-septième est le fondement du trentième.

PROBLEME LXVIII.

Il se trouve trois personnes dans une compagnie, la seconde est plus âgée que la première de douze ans, la troisième est plus âgée que la seconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel est l'âge de chaque personne.

IL faut ajouter les deux différences des âges données, qui sont ici 12 & 25; (car la troisième personne ayant 13 ans plus que la seconde, il faut joindre la différence de ses années avec celle des années de la seconde.) La somme de ces deux différences est 37, qu'il faut ôter de la somme totale 100, le reste 63 sera divisé par 3, nombre des personnes dont on veut sçavoir les âges : le quotient 21 est l'âge de la première personne ; par conséquent 33 est l'âge de la seconde, & 46 l'âge de la troisième. Ces trois nombres 21, 33, 46, font ensemble 100.

PROBLEME XLIX.

Découvrir si un ouvrage que l'Ouvrier assure être de pur or, est mêlé d'argent, sans l'endommager.

Vitruve rapporte que le Roy Hieron voulant faire faire une couronne d'or d'un poids considérable, en donna la matière à un Orfèvre. La couronne fut très-bien faite, & elle se trouva être d'un poids égal à l'or qui avoit été fourni : on appréhenda cependant que l'Orfèvre n'eût volé de l'or, & n'y eût mêlé de l'argent. Archimède fut chargé de

découvrir la fraude, sans endommager la couronne. Il le fit en plongeant entièrement la couronne dans un vase plein d'eau, & en pesant exactement la quantité d'eau qui en étoit sortie : il plongea aussi entièrement dans le même vase plein d'eau deux masses, l'une d'or, & l'autre d'argent, & pesa exactement la quantité d'eau qu'avoient fait sortir du vase ces deux masses, qui y avoient été plongées l'une après l'autre, il trouva que la masse d'or pur avoit fait sortir une plus petite quantité d'eau que la couronne d'or, & que la couronne d'or en avoit fait sortir une plus petite quantité que la masse d'argent.

Le même Auteur ne dit point quelle étoit la quantité de l'or, ni quel fut le raisonnement d'Archimède pour découvrir la tromperie de l'Orfèvre. Mais on peut supposer que la couronne pesoit 20 marcs ; qu'ayant été plongée dans un vaisseau plein d'eau, elle en fit sortir 13 marcs d'eau ; que la masse d'or pur & d'égal poids n'en fit sortir que 12 marcs d'eau ; qu'enfin la masse d'argent en fit sortir 18 marcs d'eau.

Cela supposé, on découvrira par la règle de fausse position, ou par quelques équations Algébriques, que l'Orfèvre avoit mêlé 3 marcs & un tiers d'argent dans la couronne. Voyez l'*Abregé de l'Arithmétique* d'Irson, p. 395, on y trouvera la solution de plusieurs questions par Algèbre.

PROBLEME L.

Un Boucher donne commission d'acheter pour cent écus cent bêtes, sçavoir, des bœufs, des veaux, des brebis & des cochons. Le Commissionnaire lui amene cent bêtes : il a payé 9 écus de chaque bœuf,

1 écu de chaque veau, 30 sols de chaque brebis ;
& 3 écus de chaque cochon. On demande combien
il a amené de bœufs, de veaux, de brebis & de
cochons.

C E Problème est capable d'un grand nombre
de résolutions ; c'est ce qui fait qu'on ne peut
déterminer précisément le nombre de chaque sorte
de bêtes que le Commissionnaire a amené. Il
pourroit avoir amené 3 bœufs, 44 veaux, 52 bre-
bis & un cochon, qui font en tout 100 bêtes : le
prix des bœufs est 27 écus, le prix des veaux est
44 écus, le prix des brebis est 26 écus, & le
prix du cochon est 3 écus : tous ces prix font en-
semble 100 écus, selon les conditions du Problème.
On peut dire encore qu'il a amené 4 bœufs,
17 veaux, 76 brebis, & 3 cochons : ce qu'on
pourra vérifier par les prix de chaque sorte de
bêtes, qu'on a déterminé dans les conditions du
Problème : ou bien 5 bœufs, 5 veaux, 88 bre-
bis, & 2 cochons, &c.

P R O B L È M E L I.

Q U E S T I O N I.

*Un Particulier a fait marché avec un Ouvrier pour
creuser un puits de 20 toises de profondeur, à
condition de lui donner 30 livres, quand il aura
achevé ce puits. L'Ouvrier tombe malade, après
avoir creusé 12 toises. On demande combien il est
dû à cet Ouvrier.*

I L est dû à cet Ouvrier 11 livres & $\frac{1}{7}$. Pour ré-
soudre cette Question, & les autres de même
nature, il faut faire une règle de trois, dont le
premier

premier terme sera la somme des toises de la Progression Arithmétique depuis 1 jusqu'à 20, que l'on trouvera * être ici 210, le second terme sera la somme dont on est convenu, qui est dans cette question 30 livres, & le troisième terme sera la somme des termes depuis 1 jusqu'à 12, que l'on trouvera * être ici 78; car il est constant qu'il y a plus de peine à creuser les toises plus avancées, que celles qui le sont moins, & cela en proportion Arithmétique.

* Par le
Probl. X.
art. 1. p.
59.

QUESTION II.

Un Tailleur a pris six aulnes de draps, qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet: on veut sçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demie aulne de large.

ON prendra neuf aulnes de cette étoffe, qui n'a qu'une demie aulne de large. Cette question paroît embarrassante; il faut s'y conduire avec quelque précaution. Elle se réduit à une règle de trois inverse, qu'on peut énoncer de cette façon.

Si $\frac{3}{4}$ donnent 6 aulnes, combien $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$? On exprime la demie aulne par $\frac{2}{4}$, afin que le troisième

terme soit analogue au premier. Pour résoudre cette question ainsi énoncée, il ne faut point avoir égard au dénominateur 4, qui est le même dans les deux fractions, il suffit de multiplier 6 aulnes par 3 numérateur de la première fraction, & de diviser le produit 18 par 2 numérateur de l'autre fraction.

R E M A R Q U E S.

Il y a certaines questions qui se résolvent par l'attention que l'on fait à la chose exprimée, & à la manière dont elle est exprimée; on en donnera quelques exemples dans les articles suivans.

I.

Un Rotisseur achete 20 perdrix, 8 livres à raison de 2 livres les cinq: un autre Rotisseur de ses voisins a besoin de perdrix, il le prie de lui en rendre quelques-unes au prix coûtant. Que doit faire le Rotisseur pour les vendre au même prix, & y gagner? Il doit en faire deux parts, en séparant les dix meilleures d'avec les autres qui ne sont pas si bonnes. Il vendra la paire des meilleures une livre, & trois des moindres une livre aussi: ces cinq vaudront 2 livres, qui est le prix coûtant. De cette manière le Rotisseur vendra 5 livres les dix perdrix grasses, & des dix moindres il en vendra neuf pour 3 livres; de sorte qu'il lui restera une perdrix pour le gain.

I I.

On demande le juste prix d'un cent pesant de cordage godronné; supposant que le cent pesant de chanvre coûte 16 livres, & qu'on paye 52 sols 6 deniers pour la peine de l'espader, peigner & filer. On suppose en second lieu que le cent pesant de chanvre diminue de 8 livres dans sa réduction, ou conversion en fil blanc, & qu'on donne 4 sols 9 deniers pour la peine de godronner le cent pesant de fil blanc. On suppose en troisième lieu que le cent pesant de fil blanc ne prend que

20 livres de godron par cent, que la livre de godron vaut 8 deniers, & qu'on paye 16 sols pour la peine de le cordager.

Solution.

Je mets en une somme 16 livres, & 52 sols 6 deniers, c'est-à-dire, le prix du chanvre & de sa façon, pour le réduire en fil blanc; cela fait 18 livres 12 sols 6 deniers: ce fera le prix des 92 livres de fil blanc seulement, à cause des 8 livres de déchet en le façonnant. Je dis, si 92 livres de fil blanc coûtent 18 livres 12 sols 6 deniers, combien coûteront 100 livres du même fil blanc? il vient 20 livres 4 sols 10 deniers, & $\frac{1}{2}$ de denier, pour la valeur du cent de fil blanc prêt à godronner.

Il ne reste donc plus qu'à ajouter à cette somme les 4 sols 9 deniers pour la peine de godronner le cent pesant de fil blanc; il faut encore y ajouter 13 sols 4 deniers pour les 20 livres de godron à 8 deniers la livre: ces trois sommes ajoutées ensemble font 21 livres 2 sols 11 deniers $\frac{1}{2}$ de denier pour le prix de 120 livres de fil godronné.

Il faut ensuite dire, si 120 livres de fil godronné coûtent 21 livres 2 sols 11 deniers, & $\frac{1}{2}$ de denier, combien coûteront 100 livres? il viendra 17 livres 12 sols 5 deniers, & $\frac{3}{8}$ de denier, pour la valeur du cent pesant de fil godronné, auquel ajoutant 16 sols pour la peine de le cordager, on aura 18 livres 8 sols 5 deniers, & $\frac{3}{8}$ de denier,

R ij

pour la valeur juste du cent pesant de cordage donné.

Cet exemple est extrait de l'Arithmétique Universelle : on a crû qu'il étoit assez curieux pour trouver ici sa place.

PROBLEME LII.

Faire parcourir au Cavalier du Jeu des Echets toutes les cases du Damier, l'une après l'autre, sans entrer deux fois dans la même case.

ON sçait que le Cavalier du Jeu des Echets a une marche toute particulière ; il va , pour ainsi dire , en caracolant , & il passe d'une case d'un rang à une case d'un autre rang , en sautant par-dessus deux cases , & allant du blanc au noir , & du noir au blanc.

I.

Ce Problème peut recevoir un grand nombre de solutions ; il est assez considerable pour avoir mérité l'attention de quelques grands Géomètres. Il est vrai qu'ils n'en ont point donné de solution générale : c'est ce qui marque la difficulté qu'il y a à la trouver ; ils en ont cependant communiqué quelques-unes particulières : on ne rapportera ici que trois de ces solutions ; dans les deux premières , on commence à faire partir le Cavalier de la case d'un angle du Damier , & dans la troisième on commence à le faire partir de l'une des quatre cases qui sont au milieu du Damier ; cette dernière manière de résoudre le Problème proposé , est plus difficile à trouver que les autres.

La première est de M. de Montmort , Auteur

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 261
 de l'Essai de l'Analyse sur les Jeux de hazard ; la
 seconde est de M. Moivre , Anglois ; la troisieme
 est de M. de Mairan , Directeur de l'Académie
 Royale des Sciences , * à qui je dois le Problème , * 1722.
 & les trois solutions qu'on trouve ici.

Les Tables suivantes représentent un Damier ;
 on a mis des nombres dans les cases que le Cava-
 lier doit parcourir l'une après l'autre. Ainsi dans la
 maniere de M. de Montmort , le Cavalier se place
 d'abord sur la première case d'en haut , qui est à
 côté gauche : de-là on le fait passer à la troisieme
 case du second rang horizontal , où l'on a marqué 2 ;
 ensuite on le fait sauter dans la cinquieme case du
 premier rang horizontal marqué 3 ; après on le fait
 passer dans la septieme case du second rang hori-
 zontal marqué 4 : on continue à le faire aller dans
 les cases qui sont marquées des nombres selon leur

I. de M. de Montmort.

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 38 | 31 | 44 | 3 | 46 | 29 | 42 |
| 32 | 35 | 2 | 39 | 30 | 43 | 4 | 47 |
| 37 | 8 | 33 | 26 | 45 | 6 | 41 | 28 |
| 34 | 25 | 36 | 7 | 40 | 27 | 48 | 5 |
| 9 | 60 | 17 | 56 | 11 | 52 | 19 | 50 |
| 24 | 57 | 10 | 63 | 18 | 49 | 12 | 53 |
| 61 | 16 | 59 | 22 | 55 | 14 | 51 | 20 |
| 58 | 23 | 62 | 15 | 64 | 21 | 54 | 13 |

ordre naturel , jusqu'à ce qu'il soit parvenu à la
 cinquieme case du dernier rang horizontal d'en

262 RECREAT. MATH. ET PHYS.

bas, marquée 64, qui est la dernière où il arrive; après avoir passé dans toutes les cases les unes après les autres.

On fera la même observation dans les deux autres Tables; on suivra l'ordre naturel des nombres, pour conduire le Cavalier dans toutes les cases.

II. de M. Moivre.

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 34 | 49 | 22 | 11 | 36 | 39 | 24 | 1 |
| 21 | 10 | 35 | 50 | 23 | 12 | 37 | 40 |
| 48 | 33 | 62 | 57 | 38 | 25 | 2 | 13 |
| 9 | 20 | 51 | 54 | 63 | 60 | 41 | 26 |
| 32 | 47 | 58 | 61 | 56 | 53 | 14 | 3 |
| 19 | 8 | 55 | 52 | 59 | 64 | 27 | 42 |
| 46 | 31 | 6 | 17 | 44 | 29 | 4 | 15 |
| 7 | 18 | 45 | 30 | 5 | 16 | 43 | 28 |

III. de M. de Mairan.

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 40 | 9 | 26 | 53 | 42 | 7 | 64 | 29 |
| 25 | 52 | 41 | 8 | 27 | 30 | 43 | 6 |
| 10 | 39 | 24 | 57 | 54 | 63 | 28 | 31 |
| 23 | 56 | 51 | 60 | 1 | 44 | 5 | 62 |
| 50 | 11 | 38 | 55 | 58 | 61 | 32 | 45 |
| 37 | 22 | 59 | 48 | 19 | 2 | 15 | 4 |
| 12 | 49 | 20 | 35 | 14 | 17 | 46 | 33 |
| 21 | 36 | 13 | 18 | 47 | 34 | 3 | 16 |

Il suffit de jeter les yeux sur ces trois Tables , pour connoître la marche qu'on doit faire tenir au Cavalier , lorsqu'on l'a placé sur l'une des cases marquées 1. On peut choisir telle autre case qu'il plaira , & rechercher soi-même par quelles cases passera le Cavalier , pour les lui faire parcourir toutes l'une après l'autre , quand on l'aura placé sur la case qui aura été choisie

I I.

Première manière.

Pour exécuter ce Problème sur un Damier , il faut mettre un jetton sur chaque case , en sorte que toutes les cases blanches & noires soient couvertes de jettons. On commencera par ôter le jetton de la case où l'on placera d'abord le Cavalier , & à mesure qu'on le fera entrer dans une autre case , on ôtera le jetton qui la couvre. Ainsi on sera sûr d'avoir fait parcourir toutes les cases au Cavalier , quand tous les jettons auront été levez.

Seconde manière.

Au lieu de couvrir d'abord de jettons toutes les cases , on peut ne couvrir chaque case , qu'à mesure qu'on y fera passer le Cavalier , & quand toutes les cases seront couvertes , on sera assuré d'avoir exécuté le Problème.

I I I.

La méthode de M. Moivre a paru la plus simple ; c'est ce qui a engagé à la développer : mais afin de faire voir l'ordre qu'il a suivi , je vais séparer & décomposer , pour ainsi dire , les nombres

marquez dans les cases du second carré précédent, & donner trois autres carrés, par le moyen desquels j'espere qu'il sera aisé de retenir cette manière, pour la pratiquer sur le champ, sans avoir besoin de consulter aucun modèle.

Soit donc le carré ABCD, divisé en 64 carrés, qui représentent les cases d'un Damier. J'appelle les bandes ou les rangs AB, BD, AC, CD, premières bandes, ou premiers rangs en dehors. J'appelle encore les bandes EG, KL, HM, IN, secondes bandes, ou seconds rangs en dehors, par rapport aux premiers rangs en dehors, qu'on vient d'indiquer; & ainsi des autres, à mesure qu'on rentre dans le milieu du carré.

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| A | H | | I | | B |
| | | 22 | 11 | | |
| E | 21 | 10 | | 23 | 12 |
| | | | | | 21 |
| | 9 | 20 | | | |
| | | | | | 14 |
| K | 19 | 8 | | | |
| | | 6 | 17 | | 4 |
| C | 7 | 18 | | 5 | 16 |
| | M | | N | | D |

1°. On peut placer indifféremment le Cavalier sur la case de l'un des quatre angles du carré. On commencera à le placer ici sur la case de l'angle

B, suivant le modèle qui m'a été communiqué par M. de Mairan ; de la case B marquée 1, on ira à la case marquée 2 dans la seconde bande IN ; de-là on placera le Cavalier à la case marquée 3 du premier rang en dehors BD ; d'où on viendra à la case marquée 4 du second rang IN ; puis à la case marquée 5 du premier rang en dehors CD, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case 12, en faisant le tour du Damier, sans sortir des deux premières bandes en dehors.

2°. Quand on sera parvenu à la case marquée 12, on recommencera un second tour du Damier dans le même sens qu'on vient de le faire. Ainsi de la case marquée 12, on ira à la case marquée 13 du premier rang BD ; de 13 on viendra à 14, dans le second rang IN ; puis à 15 ; ensuite à la case marquée 16 du premier rang en dehors CD, & ainsi des autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 24, qui est à côté de celle par laquelle on a commencé, en faisant en même sens qu'auparavant le tour du Damier, sans sortir des deux premières bandes en dehors, vers les extrémités du Damier.

REMARKES.

Il nous a paru que le principe fondamental de la méthode de M. Moivre, étoit de remplir d'abord les cases des deux premières bandes en dehors, en tournant en même sens autour du Damier comme on vient de le pratiquer, & comme on le pratiquera encore dans la suite, jusqu'à ce qu'on avertisse qu'il faut prendre un sens contraire en tournant autour du centre du Damier.

Pour éviter la confusion dans le quarré suivant,

on n'a point marqué les vingt-quatre nombres marquez dans les cases du quarré précédent ; mais à leur place on a mis des points , pour faire connoître que ces cases ont été parcourues par le Cavalier.

3°. Quand on est parvenu à la case marquée 24, on est forcé d'aller à la case marquée 25 ; mais de cette case on ira à celle qui est marquée 26 de la première bande BD , pour faire un troisième tour en même sens qu'auparavant , & continuer à remplir les cases des deux premières bandes en dehors, suivant le principe fondamental : de la case marquée 26 , on viendra à la case marquée 27 ; puis à celle qui est marquée 28 ; ensuite à 29 , & ainsi des autres , jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 37 , qui suit immédiatement dans la même diagonale la case marquée 1 , qui est celle par où l'on a commencé : ce qu'il est à propos d'observer sur le Damier.

4°. De la case marquée 37, on ne peut aller qu'à la

| | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| | H | | | | I | | | | |
| A | 34 | 49 | - | - | 36 | 39 | 24 | - | B |
| E | - | - | 35 | 53 | - | - | 37 | 40 | G |
| P | 48 | 33 | | | 38 | 25 | - | - | Q |
| R | - | - | | | | Z | 41 | 26 | S |
| | 32 | 47 | | | | | - | - | |
| | - | - | | | | | 27 | 42 | |
| K | 46 | 31 | - | - | 44 | 29 | - | - | L |
| C | - | - | 45 | 30 | - | - | 43 | 28 | D |
| | M | | | | N | | | | |

case marquée 38 dans la troisième bande PQ, ou à

celle qui est marquée Z dans la quatrième bande RS; mais on préférera la case qui est marquée 38 dans la bande PQ, pour satisfaire au principe fondamental, qui est de faire parcourir d'abord au Cavalier les deux premières bandes en dehors; car de la case Z on ne peut venir dans les deux premiers rangs BD, IN, pour recommencer un quatrième tour en même sens que les autres: mais en portant le Cavalier à la case marquée 38, on peut retourner à la première bande BD, en passant par la case marquée 39 de la première bande AB, & de-là à la case 40 de la bande BD, où l'on voit qu'on reprend le même sens que dans les autres tours.

5°. Ainsi de 38 on passera à 39, & de 39 on viendra à la case qui est marquée 40 dans le premier rang en dehors BD; d'où l'on passera à la case marquée 41 dans la seconde bande IN, puisque les autres cases sont remplies: on continuera à faire le tour en même sens que les autres, suivant la marche du Cavalier dans les deux premières bandes en dehors, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 50 dans la seconde bande EG.

R E M A R Q U E S.

On a dit qu'on doit recommencer les tours en même sens: cela doit s'entendre que le Cavalier étant parvenu dans les cases de la diagonale, où il a d'abord été placé, ou dans une case voisine, il faut le placer aussi-tôt qu'on le peut dans l'une des cases de la première bande en dehors BD, & suivre les extrêmités du Damier dans les deux premières bandes en dehors, en allant de la bande BD en DC, de DC en CA, & de CA en AB.

Pour éviter encore la confusion , on ne marquera pas les nombres marquez dans les quarrés précédens : on laissera les points du quarré précédent ; mais à la place des nombres qui y sont , on mettra des croix , pour faire connoître que toutes ces cases sont remplies , c'est-à-dire , couvertes de jettons , si on suit la seconde manière d'exécuter le Problème sur le Damier , ou découvertes si on suit la première.

6°. Quand on sera parvenu à la case marquée 50 , on ne peut plus recommencer le tour en même sens , puisque les cases des deux premières bandes sont remplies : on en commencera un autre en sens contraire , c'est-à-dire , qu'on tournera autour du centre du Damier , en s'éloignant de ce centre autant qu'on le pourra , & l'on ira vers la première bande en dehors AC , opposée à la bande BD ,

| | | | | | | | | | | | |
|---|--|---|---|----|----|----|----|---|---|--|---|
| | | H | | | | I | | | | | |
| A | | + | + | - | - | + | + | - | - | | B |
| E | | - | - | + | 50 | - | - | + | + | | G |
| P | | + | + | 64 | 57 | + | + | - | - | | Q |
| R | | - | - | 51 | 54 | 63 | 60 | + | + | | S |
| | | + | + | 58 | 61 | 56 | 53 | - | - | | |
| | | - | - | 55 | 52 | 59 | 62 | + | + | | |
| K | | + | + | - | - | + | + | - | - | | L |
| C | | - | - | + | + | - | - | + | + | | D |
| | | M | | | | N | | | | | |

Ainsi de la case 50 , on placera le Cavalier à la case 51 ; de 51 , on ira à 52 ; puis à 53 , & ainsi de

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 269
suite , en tournant autour du centre du Damier en
sens contraire aux premiers , & en s'éloignant du
centre autant qu'il sera possible.

REMARQUES.

On voit que les trois derniers nombres 62 , 63 ,
64 , sont ici disposez d'une autre manière que dans
la solution de M. Moivre : cette différente dispo-
sition vient de ce qu'on a jugé à propos de conti-
nuer depuis la case 50 à faire les tours en sens
contraire , afin d'établir une même règle , & de
pouvoir la pratiquer dans toute l'étendue de la so-
lution du Problème , quoiqu'avec quelque diffé-
rence.

Cette méthode a paru facile à retenir , & à exé-
cuter , quand on y fera quelque attention.





PROBLEMES DE GEOMETRIE.

LA Géométrie n'est pas moins féconde que l'Arithmétique ; mais elle n'est pas si aisée dans ses opérations , ni par conséquent si agréable dans la résolution de ses Problèmes : c'est pourquoi je ne mettrai que ceux qui me paroîtront les plus faciles & les plus agréables.

PROBLEME . I.

Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ses extrêmités.

I

Planche 1. Fig. 3. **P**Our élever une perpendiculaire à la ligne donnée AB , par son extrêmité A , mettez à l'extrêmité A une des pointes du compas ouvert à volonté , & prenez sur cette ligne AD prolongée, s'il est nécessaire , trois parties égales AC , CD , DB , dont la dernière DB se termine ici par hazard à l'autre extrêmité B de la ligne donnée AB. Décrivez de l'intervalle CB des deux dernières parties , & par leurs extrêmités B , C , deux arcs de Cercle , qui se coupent au point E : puis des deux points E , C , & avec la même ouverture du compas décrivez deux autres arcs de Cercle , qui se coupent ici au point F. Par ce point F , & par

l'extrémité donnée A , vous tirerez la droite AF, Planche
1. Fig. 3.
qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB.

I I.

Si vous voulez tirer par l'autre extrémité B de la même ligne donnée AB , une ligne qui lui soit en même temps égale & perpendiculaire , divisez la ligne AB en trois parties égales aux points C , * * Voyez
le Problème
III.
suivant.
D. Puis ayant trouvé le point F , comme il vient d'être enseigné , décrivez de l'extrémité donnée B , & de l'intervalle AF , l'arc de Cercle GHI , & portez sur cet arc la même ouverture du compas deux fois de G en H , & de H en I. Décrivez avec la même ouverture du compas & des deux points H , I , deux arcs de Cercle qui se coupent ici au point K. Enfin menez la droite BK , elle sera égale & perpendiculaire à la ligne proposée AB.

PROBLEME I I.

Mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.

I.

Pour mener par le point donné C , une ligne Fig .4.
parallele à la ligne donnée AB , prenez à volonté sur cette ligne AB , deux points proche des deux extrémités A , B , comme D , E : puis du point donné C & de l'intervalle D E , décrivez un arc de Cercle vers F ; ensuite du point E & de l'intervalle CD , décrivez un autre arc de Cercle , qui rencontre ici le premier au point F. Par ce point F , & par le point donné C , vous menerez la droite CF , qui sera parallele à la proposée AB.

II.

Planche

1. Fig. 4.

Si vous voulez que la ligne parallele soit égale à la ligne AB, au lieu de vous servir des deux points D, E, servez-vous des deux extrêmités A, B. Du point donné C, & de l'intervalle de la ligne donnée AB, décrivez un arc de Cercle vers G: puis de l'extrêmité B, & de l'intervalle AC, décrivez un autre arc de Cercle qui coupera le premier en G. Par ce point G, où ces deux arcs se coupent, & par le point donné C, menez la droite CG, elle sera égale & parallele à la proposée AB.

P R O B L E M E I I I.

Diviser d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.

Fig. 5.

SI vous voulez diviser la ligne donnée AB en quatre parties égales, prolongez-la autant qu'il est nécessaire, comme ici jusqu'en E, en sorte que AB, BC, CD, DE, soient quatre parties égales chacune à AB. Faites sur ces parties les quatre Triangles équilatéraux ABF, BCG, CDH, DEI; ce qu'on peut faire avec la même ouverture de compas. Enfin menez les droites AG, AH, AI, alors la ligne HM représentera une des quatre parties de la ligne AB, la ligne DM en représentera par conséquent trois, & la ligne FK, ou BK en représentera deux.

Mais la seule ligne AI suffit, car elle retranche la ligne B₁, égale à la quatrième partie de la ligne AB, la ligne C₂ égale à la moitié de la même ligne AB, & la ligne D₃ égale aux trois quarts de la même ligne AB.

La

La ligne AH sert pour diviser la ligne proposée AB en trois parties égales ; car la ligne GL en représente une , & la ligne CL en représente par conséquent deux. Mais la même ligne AI suffit aussi pour la division de la ligne donnée AB en trois parties égales , parce que la ligne BN en représente une , & la ligne CO en représente deux. D'où il suit que la ligne HO en représente aussi une,

PROBLEME IV.

Faire un angle qui soit la moitié , ou le double d'un angle donné.

PREMIÈREMENT , pour faire un angle ADG , qui soit la moitié de l'angle donné ABC ; de son sommet B comme centre , & de l'intervalle BD pris à volonté sur l'un des côtez AB prolongé à discrétion , décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point D & par le point E , où le demi-cercle coupe l'autre côté BC de l'angle donné , menez la ligne DG : l'angle ADG sera la moitié de l'angle donné ABC. Planche 2. Fig. 6.

SECONDEMENT , pour faire un angle ABC , qui soit double de l'angle donné ADG ; d'un point B comme centre pris à volonté sur l'un des côtez AD , & de l'intervalle BD distance de B , jusques au sommet D de l'angle donné , décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point B & par le point E , où le demi-cercle coupe l'autre côté de l'angle donné , menez la ligne BC : l'angle ABC sera double de l'angle donné ADG.



PROBLEME V.

Faire un angle qui soit le tiers, ou le triple d'un angle donné.

Planche
2. Fig. 7.

PRemièrement, pour faire un angle égal à la troisième partie de l'angle donné ABC ; de son sommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté, décrivez le demi-cercle DEF ; puis appliquez une règle bien droite au point E , en sorte que sa partie GI , terminée par la circonférence du demi-cercle DEF , & par la ligne AD prolongée, soit égale au demi-diamètre BD , ou BE . Après cela menez la droite GE , qui fera au point G , l'angle AGH égal à la troisième partie de l'angle ABC . L'arc ID sera aussi égal à la troisième partie de l'arc EF , qui mesure l'angle donné ABC .

Secondement, pour faire un angle égal au triple de l'angle donné AGH ; ayant pris à discrétion sur la ligne GH , le point I , portez la longueur IG sur la ligne AG , de I en B ; pour décrire du point B , & de l'intervalle IB , le demi-cercle DEF , qui passera par le point I , & donnera sur la ligne GH le point E . Par ce point E & par le point B , vous tirerez la droite BE , qui fera l'angle ABC , triple du donné AGH .

PROBLEME VI.

Trouver à deux lignes données une troisième, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.

8. Fig. **P**Our trouver aux deux lignes données AB , AC , une troisième proportionnelle, décrivez

de l'extrémité B de la première AB, par l'autre extrémité A, l'arc de cercle AF, sur lequel ayant mis la longueur de la seconde AC, de A en F, portez la même longueur sur la ligne AC, prolongée autant qu'il sera besoin, de F en D, & la ligne AD sera troisième proportionnelle aux deux lignes données AB, AC.

De même pour trouver aux trois lignes AB, AC, AD, une quatrième proportionnelle, ou ce qui est la même chose, aux deux AC, AD, une troisième proportionnelle, décrivez de l'extrémité C de la première AC, par l'autre extrémité A, l'arc de cercle AG, sur lequel ayant mis la longueur de l'autre ligne AD, de A en G, portez la même longueur AD sur la ligne AD prolongée, de G en E, & la ligne AE sera celle qu'on cherche : & ainsi de suite.

PROBLEME VII.

Décrire sur une ligne donnée autant de Triangles différens qu'on voudra, dont les aires soient égales.

SI la ligne donnée est AB, tirez à discrétion la Planche parallèle CD, sur laquelle ayant pris à volonté 2. Fig. 9. autant de points différens que vous voudrez de Triangles égaux, comme E, F, G, pour trois Triangles, menez de ces trois points E, F, G, aux extrémités A, B, de la ligne donnée AB, des lignes droites, & vous aurez les trois Triangles égaux AEB, AFB, AGB, sur la même base AB.

PROBLEME VIII.

Décrire sur une ligne donnée autant de Triangles différens qu'on voudra , dont les contours soient égaux.

Planche
2. Fig. 10.

SI la base donnée est AB , divisez-la en deux également au point C , & prolongez-la de part & d'autre à volonté en D , & en E , en sorte que les deux lignes CD , CE , soient égales entre elles. Toute la ligne DE sera prise pour la somme des deux côtes de chaque Triangle, qu'on décrira sur la base donnée AB en cette sorte.

Décrivez du point A , avec une ouverture de compas un peu plus grande que AD , un arc de cercle vers F . Puis ayant porté cette ouverture sur la ligne DE , de D en I , décrivez du point B , & de l'intervalle IE , un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point F . Ce sera le sommet du premier Triangle ABF .

Décrivez pareillement du point A , avec une ouverture de compas un peu plus grande que AF , un arc de cercle vers G . Puis ayant porté cette ouverture sur la ligne DE , de D en K , décrivez du point B , & de l'intervalle KE , un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point G . Ce sera le sommet du second Triangle AGB , dont le contour sera égal au contour du premier ABF .

Si vous voulez un troisième Triangle, décrivez encore du point A un arc de cercle vers H , avec une ouverture de compas un peu plus grande que AG . Puis ayant porté, comme auparavant, cette ouverture sur la ligne DE , de D en L , décrivez du point B , & de l'intervalle LE un autre arc de

cercle , qui coupe ici le premier au point H. Ce sera le sommet du troisième Triangle AHB , dont le contour sera le même que celui des deux précédent. Ainsi des autres.

Vous remarquerez que les sommes F , G , H , de tous ces Triangles, se trouvent sur la circonférence d'une Ellipse , dont le grand Axe est DE , & les deux Foyers sont A , B.

PROBLEME IX.

Decrire deux Triangles isoscèles différens, de même aire, & de même contour.

Ayant préparé une Echelle IK , divisée en au- Planche
2. Fig. 11.
tant de parties égales qu'il conviendra , prenez sur la base AB, les deux Segmens GA , GB , chacun de 12 parties prises sur l'Echelle ; élevez au point G sur la même base AB la perpendiculaire GC de 35 des mêmes parties ; tirez les deux lignes égales AC , BC , & vous aurez le premier Triangle isoscèle ACB , dont chacun des côtez égaux AC , BC, se trouvera de 37 parties , comme on le connoitra en ajoûtant le quarré 144 du Segment AG , avec le quarré 1225 de la perpendiculaire CG , & en prenant la racine quarrée de la somme 1369.

Pour avoir un Triangle de même aire & de même contour que le précédent , prenez sur la base DE , les deux Segmens HD , HE , chacun de 20 parties , & ayant élevé au point H sur la base DE la perpendiculaire HF de 21 parties , tirez les lignes égales EF , DF , dont chacune se trouvera de 29 parties , comme on le connoitra en ajoûtant le quarré 400 du Segment DH , avec le quarré 441

de la perpendiculaire HF, & en prenant la racine quarrée de la somme 841.

Ainsi vous aurez le Triangle isoscèle DEF, dont le contour 98 est égal au contour, c'est-à-dire, à la somme des trois côtez du premier Triangle isoscèle ABC, & dont l'aire, ou le contenu 420 est égal au contenu du premier Triangle isoscèle ABC, comme on le connoît en multipliant DH par FH, ou 20 par 21 : car le produit 420 qui en vient pour l'aire du Triangle DEF, est le même que celui qui vient en multipliant AG par CG, ou 12 par 35, pour l'aire du Triangle ABC.

On peut décrire autant de couples qu'on voudra de Triangles isoscèles de même aire & de même contour, en trouvant en nombres ces couples ; ce qui se peut faire en cherchant les deux nombres générateurs des moitez ACG, DFH, qui sont deux Triangles rectangles égaux. Ces nombres générateurs connus serviront à en trouver d'autres, par le moyen desquels on trouvera deux Triangles rectangles, comme il a été enseigné au *Problème IX. d'Arithmétique*, pag. 50. Voici la méthode de trouver les nombres générateurs des deux Triangles rectangles ACG, DFH, qui est générale pour tout autre Triangle rectangle, dont on connoît les trois côtez, ou au moins deux.

Pour trouver les nombres générateurs du Triangle ACG, ajoutez l'hypoténuse 37 à l'un des côtez 12, vous aurez le quarré 49, dont la racine est 7, que vous garderez. Ajoutez encore l'hypoténuse 37 à l'autre côté 35, pour avoir une somme 72, dont la moitié 36 a pour racine quarrée 6, qui est un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 6 à 7, & vous aurez 1 pour l'autre nombre générateur du Triangle ACG.

Il faut suivre la même opération pour trouver les nombres générateurs du Triangle DFH : ajoutez l'hypoténuse 29 au côté 20, vous aurez encore le carré 49, dont la racine est 7, que vous garderez : ajoutant encore la même hypoténuse 29 à l'autre côté 21, vous aurez 50, dont la moitié 25 a pour racine carrée 5, qui est un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 5 à 7, & vous aurez 2 pour l'autre nombre générateur du Triangle DFH.

Ainsi les nombres générateurs du Triangle ACG sont 6, 1 : & les nombres générateurs du Triangle DFH sont 5, 2.

A présent *pour avoir autant qu'on voudra de couples de Triangle de même aire & de même contour*, il faut multiplier les nombres générateurs 6, 1 ; 5, 2, par un même nombre tel qu'il plaira : si on les multiplie par 2, on aura 12, 2, & 10, 4 pour nombres générateurs de deux autres Triangles rectangles de même aire : car multipliant 12 par 2, on aura 24, dont le double 48 sera AG, un des côtés du nouveau Triangle ; puis ajoutant 144, 4 quarrés de 12, 2, on aura la somme 148 pour l'hypoténuse AC. Enfin ôtant 4, quarré de 2, de 144, quarré de 12, on aura 140 pour l'autre côté CG : ainsi le Triangle rectangle ACG, dont les côtés étoient 37, 35, 12, se trouvera transformé en un autre, dont les côtés seront 148, 140, 48. *Problème IX. page 50.*
Pour avoir un Triangle isoscèle, il ne faut que prolonger la base AG jusqu'en B, faire GB égale à AG, qui est ici de 48 parties, & tirer la ligne CB, qui sera de 148 parties comme AC. Ce Triangle isoscèle ainsi supposé, aura 392 parties de contour & 6720 de superficie.

De même pour avoir l'autre nouveau Triangle, dont

les nombres générateurs sont 10, 4, on multipliera 10 par 4, & l'on aura 40, dont le double 80 fera le côté DH; ensuite ajoutant 100 & 16, quarrés de 10, 4, on aura 116 pour l'hypoténuse DF, & ôtant 16, quarré de 4, de 100, quarré de 10, 4, on aura 84 pour l'autre côté FH: ainsi le Triangle rectangle DFH, dont les côtez étoient 29, 21, 20, se trouvera transformé en un autre, dont les côtez seront 116, 84, 80. Pour achever le Triangle isoscèle, il ne faut que prolonger DH jusqu'en E, en faisant DE égale à DH, qui est ici de 80 parties, & tirer la ligne FE, qui sera de 116 parties, comme DF. Ce nouveau Triangle isoscèle aura 392 parties de contour, & 6720 de superficie: par conséquent il sera de même aire & de même contour que l'autre.

On peut s'exercer en multipliant les nombres générateurs 6, 1 : 5, 2 par tel autre nombre qu'on voudra.

PROBLEME X.

Décrire trois différens Triangles rectangles, dont les aires soient égales.

Planche
3. Fig. 12.

Ayant préparé une Echelle divisée en parties égales, prenez la base AB de 42 parties, & la hauteur ou perpendiculaire AC de 40; l'hypoténuse BC du premier Triangle rectangle ABC se trouvera de 58 parties, comme on le connoitra en ajoutant le quarré 1764 de la base AB, au quarré 1600 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 3364.

Prenez ensuite la base DE du second Triangle rectangle DEF de 70 parties, & la hauteur DF de

24 ; l'hypoténuse EF se trouvera de 74 parties , comme on le connoitra en ajoûtant ensemble le quarré 4900 de la base DE , & le quarré 576 de la hauteur DF , & en prenant la racine quarrée de la somme 5476. L'aire de ce second Triangle rectangle DEF sera égale à celle du premier ABC , chacune étant 840 , comme on le connoît en multipliant la base par la hauteur , & en prenant la moitié du produit.

Enfin prenez la base FG du troisième Triangle rectangle FGH , de 112 parties , & la hauteur FH de 15 ; l'hypoténuse BC se trouvera de 113 parties , comme on le connoitra en ajoûtant ensemble le quarré 12544 de la base FG , & le quarré 225 de la hauteur FH , & en prenant la racine quarrée de la somme 12769. L'aire de ce troisième Triangle rectangle FGH sera aussi 840

Ces trois Triangles rectangles ont été trouvez en nombres entiers , par ce Canon que nous avons tiré de l'Algèbre , qui nous apprend que pour trouver en nombres entiers , trois Triangles rectangles égaux , on doit auparavant trouver trois nombres qui serviront de nombres générateurs , en cette sorte.

Si on ajoute le produit de deux nombres quelconques à la somme de leurs quarrés , on aura le premier nombre. La différence de leurs quarrés sera le second : & la somme de leur produit & du quarré du plus petit , sera le troisième nombre générateur.

Si de ces trois nombres ainsi trouvez , on forme trois Triangles rectangles , sçavoir , l'un des deux premiers , l'autre des deux extrêmes , & le troisième du premier & de la somme des deux autres , ces trois Triangles rectangles seront égaux entr'eux.

* Voyez le Probl. IX. d'Arithm. p. 50.

On peut trouver en nombres rompus autant d'autres Triangles rectangles qu'on voudra, dont les aires seront égales entr'elles & à l'un des trois précédens, en trouvant par le moyen de ce Triangle rectangle un autre Triangle rectangle égal, en cette sorte.

Formez de l'hypoténuse du Triangle rectangle proposé, & du quadruple de son aire, un autre Triangle rectangle, que vous diviserez par le double du produit, qui viendra en multipliant l'hypoténuse du Triangle rectangle proposé par la différence des quarrés des deux autres côtes du même Triangle rectangle, & vous aurez un Triangle rectangle égal au proposé.

PROBLEME XI.

Décrire trois Triangles égaux, dont le premier soit rectangle, le second soit acutangle, & le troisième soit obtusangle.

Planche
3. Fig. 13.

Ayant préparé, comme auparavant, une Echelle divisée en parties égales, qui peuvent représenter des pieds, des toises, & tout ce qu'il vous plaira, prenez la base AB du Triangle rectangle ABC de 24 parties, & la hauteur AC de 7; l'hypoténuse BC se trouvera de 25 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 576 de la base AB, & le quarré 49 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 625.

Prenez ensuite sur la base DE du Triangle acutangle DEF, le Segment KD de 5 parties, & le Segment KE de 9; élevez du point K sur la base DE, la perpendiculaire KF de 12 parties; alors

le côté DF se trouvera de 13 parties , comme on le connoitra en ajoutant ensemble le quarré 25 du Segment DK , & le quarré 144 de la hauteur FK , & en prenant la racine quarrée de la somme 169. L'autre côté se trouvera de 15 parties , comme on le connoitra en ajoutant ensemble le quarré 81 du Segment KE , & le quarré 144 de la perpendiculaire KF , & en prenant la racine quarrée de la somme 225.

Enfin prenez sur la base GH du Triangle obtusangle GHI , le Segment LG de 6 parties , & le Segment LH de 15 ; élevez du point L , sur la base GH , la perpendiculaire LI de 8 parties ; alors le côté GI se trouvera de 10 parties , comme on le connoitra en ajoutant ensemble le quarré 36 du Segment GL , & le quarré 64 de la hauteur IL , & en prenant la racine quarrée de la somme 100. Le côté HI se trouvera de 17 parties , comme on le connoitra en ajoutant au quarré 225 du Segment LH , le quarré 64 de la perpendiculaire LI , & en prenant la racine quarrée de la somme 289.

On connoît que le Triangle ABC est rectangle en A , parce que la somme 625 des quarez 49 , 576 , des deux côtez AC , AB , est égale au quarré du troisiéme côté BC : que le Triangle DEF est acutangle , parce que la somme des quarez de deux côtez quelconques est plus grande que le quarré du troisiéme côté : enfin que le Triangle GHI est obtusangle , & que l'angle I est obtus , parce que le quarré 441 de son côté opposé GH , qui est de 21 parties , est plus grand que la somme 389 des quarez 100 , 289 , des deux autres côtez GI , HI.

Enfin on connoît que ces trois Triangles ABC , DEF , GHI , sont égaux , c'est-à-dire , que leurs

aires sont égales, parce qu'en multipliant la base AB par la hauteur AC , il vient le même produit qu'en multipliant la base DE par la hauteur FK , ou la base GH par la hauteur LI , sçavoir, 168, qui est le double de l'aire de chaque Triangle, laquelle par conséquent sera 84. La perpendiculaire FK , & les trois côtes du Triangle acutangle DEF , sont dans une proportion continue Arithmétique.

PROBLEME XII.

Trouver une ligne droite égale à un arc de cercle donné.

Planche
3. Fig. 14.

* Voyez
le Probl.
III. pag.
272

Pour trouver une ligne droite égale à l'arc de cercle BCD , dont le centre est A , & le rayon ou demi-diamètre est AB , ou AD , divisez * cet arc en deux également au point C . Tirez les cordes BC , CD , BD . Prolongez la corde BD en E , en sorte que la ligne BE soit double de l'une des deux cordes égales BC , CD , c'est-à-dire, égale à la somme de ces deux cordes. Prolongez encore la ligne BE en F , en sorte que la ligne EF soit égale à la troisième partie de la ligne DE , * & la ligne droite BF sera à peu près égale à la courbe BCD . J'ai dit à peu près, parce que la ligne BF est tant soit peu moindre que l'arc BCD ; mais la différence est si petite lorsque l'arc BCD ne passe pas 30 degrés, qu'il ne s'en faut pas une partie de cent mille qu'on peut donner au rayon AB , ou AD .

REMARQUE.

Si l'arc BCD est précisément de 30 degrés, ou la douzième partie de la circonférence de tout le

cercle , & que le rayon AB , ou AC soit de 50000 parties , on connoîtra par la Trigonométrie que chacune des deux cordes BC , CD , est de 13053 parties. Ainsi leur somme , ou la ligne BE fera de 26106 parties , de laquelle ôtant la corde BD , qui se trouvera de 25882 parties , il en restera 224 pour la ligne DE , dont la troisième partie est 74 pour la ligne EF. Cette troisième partie étant ajoutée à la ligne BE , ou à 26106 , la somme fera 26180 pour la ligne BF , ou pour l'arc BCD. Enfin multipliant cet arc , ou 26180 par 12 , on aura 314160 pour la circonférence du cercle. Ainsi nous çavons que quand le diamètre d'un cercle est de 100000 parties , la circonférence est d'environ 314160 semblables parties , & par conséquent que le diamètre d'un cercle est à sa circonférence à peu près , comme 100000 est à 314160 , ou comme 10000 à 31416.

Ce rapport sert à *trouver la circonférence d'un cercle , dont on connoît le diamètre.* Il faut multiplier ce diamètre par 31416 , & diviser le produit par 10000. Cette division se fera en retranchant de ce produit quatre figures à la droite : les figures qui resteront à la gauche , feront connoître la circonférence du cercle , & les figures retranchées seront le numérateur d'une fraction , dont le dénominateur sera 10000.

Pour connoître la circonférence d'un bassin rond d'un jet d'eau , dont le diamètre est , par exemple , de 64 pieds , on multipliera 64 par 31416 , on retranchera quatre figures à la droite du produit

2010624 , & l'on aura 201 pieds $\frac{624}{10000}$, pour la circonférence qu'on cherche.

Il faudra faire tout le contraire , si on veut

connoître le diamètre d'un cercle , ou d'une boule par sa circonférence connue , c'est-à-dire , qu'il faudra multiplier cette circonférence par 100000 ; ce qui se fera en lui ajoutant vers la droite quatre zeros , & l'on divisera le produit par 31416.

Ainsi pour connoître le diamètre d'une Tour ronde , dont on sçait que le contour ou la circonférence mesurée en dehors par le moyen d'une longue corde , est de 154 pieds , on ajoutera quatre zeros à la droite de ce nombre 154 , on divisera 1540000 par 31416 , & l'on aura 49 pieds $\frac{616}{31416}$ pour le diamètre qu'on cherche.

PROBLEME XIII.

Trouver entre deux lignes données une , ou deux ; ou trois moyennes proportionnelles.

I.

Planche
3. Fig. 15.

PRemièrement , pour trouver entre deux lignes données AB , AC , une moyenne proportionnelle , partagez la plus grande AB en deux parties égales au point E . De ce point E , comme centre & de l'intervalle AE , ou EB , décrivez le demi-cercle ADB ; portez ensuite de A en C la plus petite ligne AC : élevez au point C la perpendiculaire CD , & menez la droite AD , qui sera moyenne proportionnelle entre les deux AB , AC.

II.

Fig. 16.

En second lieu , pour trouver entre deux lignes données AB , AC , deux moyennes continuellement proportionnelles , faites de ces deux lignes données

AB, **AC**, le Parallelogramme rectangle **ABCD** : Planché
3. Fig 162
 puis décrivez de son centre **E**, l'arc de cercle **GHF** de telle grandeur que la droite **FG**, qui sera tirée par les deux points **F**, **G**, où il coupe les deux lignes données **AC**, **AB**, prolongées, passe par le sommet **D** de l'angle droit du Parallelogramme. Alors les deux lignes **CF**, **BG**, seront les deux moyennes proportionnelles, qu'on cherche. De sorte que les quatre lignes **AB**, **CF**, **BG**, **AC**, seront continuellement proportionnelles.

I I I.

Enfin, pour trouver entre deux lignes données **AB**, **AC**, trois moyennes continuellement proportionnelles, après avoir trouvé entre ces deux lignes données **AB**, **AC**, une moyenne proportionnelle **AD**, comme il a été enseigné, * cherchez de la même façon entre cette moyenne **AD**, & la première **AC**, une autre moyenne proportionnelle **AF**, & entre la même moyenne **AD** & la dernière **AB**, une autre moyenne proportionnelle **AG**. Les trois lignes **AF**, **AD**, **AG**, seront les moyennes proportionnelles qu'on cherche : de sorte que les cinq lignes **AC**, **AF**, **AD**, **AG**, **AB**, seront dans une proportion continue. Fig. 152
* Art. II

R E M A R Q U E S.

Si les deux lignes **AB**, **AC**, sont données en nombres, comme si **AB** étoit de 32 pieds, & **AC** de 2, on pourra exprimer en nombres les trois moyennes **AF**, **AD**, **AG**, en multipliant ensemble les deux nombres 32, & 2, des deux lignes données **AB**, **AC**, & en prenant la racine quar- rée du produit 64, qui donnera 8 pour la moyen-

ne AD, laquelle étant multipliée séparément par la première AC, & par la dernière AB, les racines quarrées des deux produits 16, 256, donneront 4 pour AF, & 16 pour AG.

Fig. 16. Mais pour trouver en nombres seulement deux moyennes proportionnelles entre les deux proposées AB, AC, telles que sont les deux CF, BG, en supposant que la plus petite AB soit de deux pieds, & la plus grande AC de 16; multipliez le quarré 4 de la première AB, par la dernière AC, & prenez la racine cubique du produit 64, qui donnera 4 pour CF première des deux moyennes proportionnelles cherchées. De même multipliez le quarré 256 de la dernière AC, par la première AB, & prenez la racine cubique du produit 512, qui donnera 8 pour l'autre moyenne proportionnelle BG.

P R O B L E M E X I V.

Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi la circonférence du cercle donné.

Planche 3. Fig. 17. **A** Yant divisé le cercle donné ABCD, dont le centre est E, en quatre parties égales par les deux diamètres perpendiculaires AC, BD, prenez sur le diamètre BD, la ligne DF, égale à la ligne CD, qui est la sôutendante ou la corde du quart de cercle. La ligne EF sera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte la longueur de cette ligne EF sur les extrêmitéz des diamètres perpendiculaires AC, BD, en AK, BG, CH, DI, & que des centres K, G, H, I, on décrive par les points

PROBLEMES DE GEOMETRIE. 289
points A, B, C, D, quatre circonferences de
cercle, elles se toucheront mutuellement, & elles
toucheront aussi celle du cercle donné ABCD.

R E M A R Q U E S.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme I, K, par la ligne droite IK, cette ligne droite IK sera parallele à sa corde correspondante DA, & passera par le point d'attouchement O: elle fera aussi en I un angle demi-droit, ou de 45 degrez avec le diamètre BD; d'où il suit que l'arc LO sera de 45 degrez, aussi-bien que l'arc MO, & que tout l'arc LM est un quart de cercle.

Si on joint la droite CF, l'angle ECF sera de 22 degrez 30 minutes; d'où l'on peut tirer une autre construction pour la résolution du Problème.

PROBLEME XV.

Décrire dans un demi-cercle donné trois cercles, qui touchent la circonférence & le diamètre de ce demi-cercle donné, & dont celui du milieu, qui est le plus grand, touche les deux autres, qui sont égaux.

E Levez du centre D du demi-cercle donné Planché 4. Fig. 18.
ABC, sur son diamètre AC, la perpendiculaire DB, & divisez-la en deux également au point E. Ce point sera le centre du cercle BIDK, le plus grand des trois qu'on cherche.

Pour décrire les deux autres cercles, qui sont égaux entr'eux, divisez le demi-diamètre DE, en deux également au point H; puis de l'intervalle BH, & des deux points E, D, comme centres,

décrivez de part & d'autre deux arcs de cercle ; qui se coupent ici en F & G. Ces deux points F, G, seront les centres des deux cercles égaux, qu'il ne sera pas difficile de décrire, parce que le rayon de chacun est égal à la ligne DH, ou à la quatrième partie du diamètre BD, ou bien, ce qui est la même chose, à la huitième partie du grand diamètre AC.

REMARQUE.

Il est évident que le demi-cercle ABC est double du cercle BIDK, le diamètre AC étant double du diamètre BD, & que le demi-cercle BID est aussi double du cercle LOI, le rayon DE étant double du rayon FI, ou FL. D'où il est aisé de conclure que le Triangle mixtiligne ABID est égal au demi-cercle BDI, & par conséquent que le demi-cercle ABC se trouve divisé en quatre parties égales par le diamètre BD, & par la circonférence BIDK.

PROBLEME XVI.

Décrire quatre cercles proportionnels, en sorte que leur somme soit égale à un cercle donné, & que la somme de leurs rayons soit égale à une ligne donnée.

Planche
4. Fig.
19.

SOIT ABCD le cercle donné, dont le point O est le centre, & AC un diamètre. Soit AE la ligne donnée, qui doit être plus grande que le rayon AO, & moindre que le diamètre AC, si l'on veut que les quatre cercles qu'on cherche, soient inégaux. Les diamètres de ces quatre cercles se détermineront en cette sorte.

Ayant tiré à volonté dans le cercle donné ABCD la ligne FG parallèle au diamètre AC, & ayant retranché de la ligne donnée AE la partie EH égale à la moitié de la ligne FG, élevez à l'extrémité A, du diamètre AC, la ligne AI, faites-la égale à AH, & perpendiculaire* au diamètre AC, & menez par le point I la ligne IB parallèle au diamètre AC: cette parallèle IB rencontre ici la circonférence du cercle donné au point B. Par ce point B, tirez la ligne BD, perpendiculaire à* la ligne FG. Les quatre lignes KF, KB, KG, KD, seront les diamètres des quatre cercles qu'on cherche.

* Probl.
t. p. 2724

R E M A R Q U E.

Il arrivera que les deux plus petits cercles KF, KB, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les deux plus grands KG, KD, lorsque la ligne FG sera égale à la ligne donnée AE. Ainsi quand on voudra que tous ces quatre cercles soient inégaux, on doit tirer la ligne FG plus grande ou plus petite que la ligne donnée AE: alors le cercle KF sera le plus petit de tous, & le cercle KD sera le plus grand.

PROBLEME XVII.

Déterminer sur la circonférence d'un cercle donné un arc, dont le Sinus soit égal à la corde du complement de cet arc.

Pour déterminer sur la circonférence du quart plan de cercle ABC, dont le centre est A, l'arc che s. CD, dont le Sinus ED soit égal à la corde BD Fig. 20, du complement de cet arc; élevez à l'extrémité B

du rayon AB , la perpendiculaire BG égale à la corde BC du quart de cercle, & tirez du centre A par le point G , la droite AG : puis ayant pris sur le rayon AB , la partie AF égale à la partie GH , élevez au point F sur AB , la perpendiculaire FD , qui déterminera l'arc CD qu'on cherche.

REMARQUE.

La Secante AG de l'arc BH est égale à la Tangente d'un arc de 60 degrez, c'est-à-dire, que le rayon AH étant de 100000 parties, la ligne AG en comprend 173205, de laquelle ôtant AH , ou 100000, le reste 73205 est la partie GH , ou AF , c'est-à-dire, le Sinus ED de l'arc CD , qui se trouvera de $47^{\circ}. 3'. 31''$. & par conséquent son complément BD de $42^{\circ}. 56'. 29''$. Ainsi nous sçavons que le Sinus d'un arc de $47^{\circ}. 3'. 31''$. est égal à la corde d'un arc de $42^{\circ}. 56'. 29''$. qui est son complément.

PROBLEME XVIII.

Décrire un Triangle rectangle, dont les trois côtes soient en Proportion Geométrique.

Plan-
che 5.
Fig. 21.

AYant décrit à volonté le demi-cercle ABC ; dont le centre est D , & dont le diamètre AC sera pris pour l'hypoténuse du Triangle rectangle qu'on cherche, tirez par l'extrémité C de ce diamètre AC , la ligne CE égale & perpendiculaire au même diamètre AC . Joignez la droite DE , qui se trouve ici coupée par la circonférence du demi cercle ABC au point F . Portez la longueur de la partie EF sur la circonférence ABC , de A en B , & joignez les droites AB , BC , qui

feront au point B un angle droit. Le Triangle rectangle ABC, sera celui qu'on cherche, de sorte que qu'il y aura même raison du côté AB, au côté BC, que du même côté BC, à l'hypoténuse AC. Fig. 21.

R E M A R Q U E S.

Si de l'angle droit B, on mène la ligne BG perpendiculaire à l'hypoténuse AC, le plus grand Segment CG sera égal au plus petit côté opposé AB, ou à la partie EF. De-là on peut tirer cette autre construction pour la résolution du Problème. Prenez sur le diamètre AC, la partie CG égale à la partie EF, & abaissant du point G, la perpendiculaire GB, elle coupera la circonférence ABC au point B; d'où l'on mènera les lignes AB, BC, qui formeront le Triangle rectangle cherché.

On aura une troisième construction, si l'on considère que l'hypoténuse AC se trouve coupée au point G par la perpendiculaire BG, en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, que l'hypoténuse AC est à son plus grand Segment CG, comme le même plus grand Segment CG est au plus petit AG.

Si vous voulez une quatrième construction; abaissez de l'extrémité A, la ligne AG perpendiculaire au diamètre AC, & égale à la troisième partie du même diamètre AC, & tirez par le point G, au diamètre AC, la parallèle GH: cette ligne GH sera égale à la troisième partie du petit Segment AG, &c.



PROBLEME XIX.

Décrire quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.

Plan-
che 21.
Fig. 22.

Ayant divisé le cercle donné ABCD en quatre parties égales par les deux diamètres AC, BC, qui se coupent à angles droits au centre E, prenez sur le diamètre AC prolongé la ligne AF égale à la ligne AB, ou à la corde du quart de cercle. La ligne EF donnera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte cette longueur EF sur chacun des deux diamètres prolongés AC, BD, depuis la circonférence du cercle donné ABCD, aux points G, H, I, K, & que de ces points, G, H, I, K, comme centres, on décrive par les points A, B, C, D, autant de cercles égaux, ces quatre cercles se toucheront mutuellement, & toucheront aussi la circonférence du cercle donné ABCD.

REMARQUE.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme G, H, par la droite GH, cette ligne GH sera parallèle à la corde correspondante AB, & elle passera par le point d'attouchement O. Elle fera par conséquent aux points G, H, des angles demi-droits, ou de 45 degrés; ce qui fait que chacun des arcs AO, BO, fera aussi de 45 degrés. D'où il est aisé de conclure, qu'en prolongeant de part & d'autre la corde AB en M & en N, chacun des arcs AM, BN, sera un quart de cercle.

PROBLEME XX.

Décrire un Triangle rectangle, dont les trois côtez soient en Proportion Arithmétique.

M Arquez sur la ligne indéfinie AB cinq parties égales de telle grandeur qu'il vous plaira, de A en B, & prenant la ligne terminée AB pour l'hypoténuse du Triangle rectangle qu'on cherche, décrivez de son extrémité A, à l'ouverture de trois parties un arc de cercle, & de l'autre extrémité B, à l'ouverture de quatre parties un autre arc de cercle, qui coupera le premier en un point C, d'où vous tirerez aux deux extrémités A, B, de l'hypoténuse AB, les droites AC, BC. Le Triangle ABC sera rectangle en C, & ses trois côtez AB, BC, AC, seront en Proportion Arithmétique, c'est-à-dire, qu'ils se surpasseront également, puisque le côté AB est de 5 parties, le côté BC de 4, & le côté AC de 3. Planche 6. Fig. 23.

R E M A R Q U E.

Ce Triangle rectangle est seul de son espèce, dont les trois côtez soient arithmétiquement proportionnels. Ils sont tels, que la somme de leurs cubes en nombres est un cube parfait; car AB étant 5, son cube est 125, BC étant 4, son cube est 64, & AC étant 3, son cube est 27, & la somme 216 de ces trois cubes 125, 64, 27, a pour racine cubique 6, qui dans ce Triangle rectangle se rencontre égale à son aire.

Si on double tous les côtez du Triangle ABC, en sorte que le côté AB soit de 10 parties, le côté Fig. 24.

BC de 8, & le côté AC de 6, on aura un autre Triangle rectangle semblable au précédent. Ses trois côtés seront encore en Proportion Arithmétique, & la somme de leurs cubes sera aussi un cube parfait, sçavoir, 1728, dont le côté, ou la racine cubique est 12. De plus, l'aire & le contour de ce second Triangle rectangle ABC, seront égaux entr'eux, chacun étant 24. Voyez le *Problème XXIII.*

P R O B L E M E X X I.

Décrire autour d'un Triangle équilatéral donné six cercles égaux, qui se touchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du Triangle, & les trois autres soient portés par ses sommets.

Plan-
che 6.
Fig. 25.

Que le Triangle équilatéral donné soit ABC, & que son centre soit D. Tirez de ce centre D, par les trois angles A, B, C, & par les milieux E, F, G, des trois côtés autant de lignes droites, sur lesquelles on doit déterminer les centres K, L, M, N, O, P, des six cercles qu'on cherche, & qu'on trouvera en cette sorte.

Ayant pris sur le côté AB la partie EH égale à la moitié de la perpendiculaire DE, & ayant joint la droite DH, prolongez cette ligne DH en I, en sorte que la partie HI soit égale à la partie HE. Toute la ligne DI donnera la longueur du rayon de chacun des six cercles égaux qu'on veut décrire, dont les centres se trouveront en portant cette longueur DI de E en K, de B en L, &c.

R E M A R Q U E.

Si l'on joint les deux centres P, L, par la droite

PL, cette ligne PL sera parallele au côté AB, & divisera par conséquent à angles droits & en deux également au point Q, le rayon EK. D'où il suit que si l'on joint la droite EL, & la droite KL, qui passera par le point d'attouchement R, le Triangle ELK sera isoscèle, chacun des deux côtez égaux EL, KL, étant double de la base EK: l'arc ER sera de $75^{\circ}. 31'. 20''$. & l'arc BR de $44^{\circ}. 28'. 40''$. ce qui fait que ces deux arcs font ensemble précisément 120 degrez, sçavoir, autant que l'angle PDL.

PROBLEME XXII.

Plusieurs demi-cercles qui se touchent au sommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres sur l'une de ces deux lignes étant donnez; déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchez par des lignes droites tirées de ces points à un point donné sur l'autre ligne perpendiculaire.

Que les demi-cercles ABC, ADE, AFG, Planche 6.
Fig. 26.
AHI, AKL, qui ont leurs centres sur la ligne AL perpendiculaire à la ligne AM, se touchent au sommet de l'angle droit MAL, & qu'il faille trouver les points où tous ces demi-cercles seront touchez chacun par une ligne droite tirée du point M donné sur la ligne AM.

Décrivez du point donné M, comme centre, par le point d'attouchement A, l'arc de cercle AK, qui coupera les circonferences des demi-cercles donnez en des points, comme B, D, F, H, K, qui seront les points d'attouchement qu'on cherche.

REMARQUE.

Lorsque les divisions de la ligne AL seront égales entr'elles, on pourra se servir de ces demi-cercles pour diviser une ligne donnée en parties égales. On portera cette ligne, comme seroit AK, ou AO, du point A jusqu'à la circonférence du cinquième demi-cercle, si on la veut diviser en cinq parties égales; elle se trouvera divisée en cinq parties égales par les circonférences des autres demi-cercles. On divisera de la même manière en trois parties égales la ligne proposée, ou telle autre qu'on voudra, comme AN, &c.

PROBLEME XXIII.

Décrire un Triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombre, soit égale au contour.

Plan-
che 7.
Fig. 27.

Tirez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle grandeur, que l'une AB soit de 5 parties prises sur une Echelle divisée en parties égales, & que l'autre AC soit de 12 parties de la même Echelle. Joignez l'hypoténuse BC, qui se trouvera précisément de 13 parties égales, comme on le connoitra en ajoutant ensemble les quarrés 25, 144, des deux côtez AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 169. L'aire du Triangle rectangle ABC sera égale à son contour, ou à la somme des trois côtez, chacun étant 30. Il arrive la même chose à cet autre Triangle rectangle exprimé en nombres entiers, 6, 8, 10, dont l'aire & le contour sont chacun 24.

R E M A R Q U E.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux Triangles rectangles, 6, 8, 10, & 5, 12, 13, de chacun desquels l'aire soit égale à son contour: mais en nombres rompus il y en a une infinité, que l'on peut trouver par ce Canon général qui a sa démonstration. *Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 2, un Triangle rectangle; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second Triangle rectangle, dont l'aire sera égale à son contour.*

Comme si de 9 & de 11, on forme ce Triangle rectangle 40, 198, 202, & qu'on le divise par 9, on aura cet autre Triangle rectangle $\frac{40, 198, 202}{9}$ dont l'aire & le contour sont égaux, chacun étant $\frac{440}{9}$. Pareillement si de 16 & de 18, on forme, ce Triangle rectangle 68, 576, 580, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre Triangle, $\frac{68, 576, 580}{16}$, ou bien celui-ci étant réduit à ses moindres termes, $\frac{17, 144, 145}{4}$, dont le contour & l'aire sont chacun $\frac{153}{2}$, Ainsi des autres.

P R O B L E M E X X I V.

Décrire au dedans d'un Triangle équilatéral, trois cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les trois côtes de ce Triangle.

Pour inscrire dans le Triangle équilatéral ABC, trois cercles égaux, qui se touchant mutuelle-

Plan-
che 7.
Fig. 28.

ment, touchent aussi les côtes de ce Triangle, divisez chacun de ces côtes en deux également aux points D, E, F. Par ces points D, E, F, tirez aux angles opposez autant de lignes droites, sur lesquelles vous marquerez les centres G, H, I, des trois cercles qu'on cherche, en transportant sur chaque ligne perpendiculaire la moitié du côté du Triangle équilatéral de son point de milieu, vers le sommet de l'angle, c'est-à-dire, la moitié AD, ou BD, de D en G, de E en I, & de F en H.

Pour avoir le rayon des cercles cherchés, joignez deux centres G, H par la ligne GH, qui se trouvera divisée en deux parties égales par la ligne tirée du milieu du côté CB, au sommet de l'angle A. Cette moitié sera le rayon de chacun des cercles qu'on cherche : ou bien divisez GC en deux parties égales, la moitié sera aussi le rayon des cercles cherchés.

R E M A R Q U E.

Les droites qui joignent les centres G, H, I, passent par les points d'attouchement, & forment le Triangle équilatéral GHI, dont les côtes sont parallèles à ceux du Triangle donné ABC. Il se forme aussi trois Trapezoïdes égaux AIHB, BHGC, CGIA, dont chacun a trois côtes égaux à ceux du Triangle équilatéral GHI, & dont les aires sont égales chacune à la huitième partie du carré du côté AB du Triangle donné ABC,

PROBLEME XXV.

Décrire un Triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombre soit sesquialtere du contour aussi exprimé en nombres.

Tirez les deux lignes perpendiculaires AB, Plan-
AC, de telle grandeur que l'une AB soit che 7.
de 8 parties prises sur une Echelle divisée en par- Fig. 29.
ties égales, & que l'autre AC soit de 15 parties
de la même Echelle. Joignez l'hypoténuse BC,
qui se trouvera précisément de 17 parties égales,
comme on le connoîtra en ajoutant ensemble les
quarrez 64, 225, des deux côtez AB, AC, &
en prenant la racine quarrée de la somme 289.
L'aire 60 du Triangle rectangle ABC sera au con-
tour 40, comme 3 est à 2. Il arrive la même
chose à cet autre Triangle rectangle en nombres
entiers 7, 24, 25, dont l'aire 84 est aussi ses-
quialtere du contour 56, de sorte que ce contour
56 est égal aux deux tiers de l'aire 84.

REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux Triangles rectangles 8, 15, 17, & 7, 24, 25, de chacun desquels l'aire soit sesquialtere de son contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité d'autres qui ont la même propriété. On peut les trouver par ce Canon général, que nous avons tiré de l'Algèbre. *Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 3 ; un Triangle rectangle ; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second Triangle rectangle, dont l'aire sera sesquialtere du contour.*

Problème
IX. d'Arithmétique, pag. 50.

Comme si de 4 & de 7, on forme ce Triangle rectangle 33, 56, 65, & qu'on le divise par 4, on aura cet autre Triangle rectangle $\frac{33}{4}, \frac{56}{4}, \frac{65}{4}$, dont l'aire, $\frac{231}{4}$ est à son contour $\frac{77}{2}$, comme 3 est à 2. Pareillement si de 16 & de 19 on forme ce Triangle rectangle 105, 608, 617, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre Triangle rectangle $\frac{105}{16}, \frac{608}{16}, \frac{617}{16}$, dont l'aire $\frac{1995}{16}$ est à son contour $\frac{665}{8}$, comme 3 est à 2. Ainsi des autres.

PROBLEME XXVI.

Décrire au dedans d'un quarré donné quatre cercles égaux, qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les côtez de ce quarré.

Plan.
che 7.
Fig. 30.

SI le quarré donné est ABCD, divisez chacun de ses côtez en deux également aux points F, G, H, I; & menez les droites FH, GI, qui se couperont à angles droits & en deux également au centre E du quarré. On marquera sur ces deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche, en cette sorte.

Joignez la droite HI, & retranchez-en la partie IK égale à la moitié IE de la ligne IG, ou du côté du quarré donné. Le reste HK fera le rayon de chacun des quatre cercles qu'on veut décrire. C'est pourquoi si l'on porte la longueur HK sur les lignes FH, GI, depuis leurs extrémités F, G, H, I, aux points N, M, L, O, le Problème sera résolu.

On peut encore le résoudre de cette manière: retranchez de la ligne IG, la partie IT, égale à

la ligne IH, faites les lignes EL, EM, EN, EO, égales chacune au reste TG, & vous aurez, comme auparavant, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche, & que l'on trouvera aussi en faisant les lignes FN, GM, HL, IO, égales chacune à la partie ET.

Voici encore une autre manière. Faites les quatre lignes AP, AQ, CR, CS, égales chacune à la ligne IH, & joignez les droites PQ, RS, qui donneront sur les deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche.

R E M A R Q U E.

Il est aisé à démontrer que chacune des deux lignes PQ, RS, est égale au côté AB du carré donné ABCD, & que chacune des deux lignes PR, QS, est égale au diamètre de chacun des cercles égaux, qui se touchent. On peut encore démontrer aisément que chacun des deux Triangles isoscèles rectangles APQ, CRS, est égal au carré DIEH, ou à la quatrième partie du carré proposé ABCD: & que le Triangle isoscèle rectangle OEN, est égal au carré du rayon OI.

P R O B L E M E X X V I I.

Décrire un Parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres, soit égale au contour.

Tirez les deux lignes perpendiculaires AB, AD, de telle grandeur, que l'une AB, soit de 3 parties prises sur une Echelle divisée en parties égales, & que l'autre AD soit de 6 parties de la même Echelle. Décrivez du point D, comme

Planche 7.
Fig 31.

Plan-
che 7.
Fig. 31.

centre , & de l'intervale AB , un arc de cercle vers C , & du point B , comme centre , & de l'intervale AD , un autre arc de cercle , qui coupera le premier au point C. De ce point C vous tirerez les deux lignes CB , CD , qui acheveront le rectangle ABCD , dont l'aire est égale au contour , chacun étant 18.

R E M A R Q U E.

Il n'y a que trois Parallelogrammes rectangles , dont l'aire égale au contour soit exprimée en nombres entiers : ce sont le rectangle qu'on vient de décrire , celui qui a pour côtez des nombres doubles des côtez de celui-ci (12 , 6) & le quarré dont le côté est 4. Mais il y a une infinité de Parallelogrammes rectangles exprimez en nombres rompus , dont on peut déterminer les côtez de cette sorte.

Ayant donné au côté AD tel nombre qu'on voudra , plus grand que 2 , comme 8 , divisez son double 16 par le même côté diminué de 2 , c'est-à-dire , par 6 : le quotient $\frac{8}{3}$ sera l'autre côté AB. Ainsi on aura en nombres un Parallelogramme rectangle , ayant 8 pour longueur , & $\frac{8}{3}$ pour largeur , dont le contour & l'aire seront chacun $\frac{64}{3}$, ou $21 \frac{1}{3}$.



PROBL.

PROBLEME XXVIII.

Mesurer avec le chapeau une distance qui n'est accessible qu'en une de ses deux extrémités.

LA distance à mesurer doit être d'une grandeur médiocre, autrement il seroit difficile de la mesurer exactement avec le chapeau, parce que pour peu que l'on manquât à viser juste, ou à se tenir bien droit, on se tromperoit sensiblement dans la mesure, sur-tout si le terrain étoit un peu inégal.

Planche 8.
Fig. 326

Pour mesurer donc avec le chapeau la distance AB , qui n'est accessible qu'en son extrémité A , comme seroit la largeur d'une petite riviere, il faut que celui qui la veut mesurer se tienne bien droit à cette extrémité A , & qu'appuyant son menton sur un petit bâton, qui doit être aussi appuyé sur quelque bouton de son habit, afin que sa tête puisse demeurer en même état, il abbaisse son chapeau sur le front, jusqu'à ce que le bord cache à sa vûë l'extrémité inaccessible B de la distance à mesurer AB . Après quoi il doit se tourner vers un terrain égal & uniforme, & remarquer en regardant par le même endroit du bord de son chapeau le point de ce terrain, où sa vûë se terminera comme en C . Alors en mesurant avec un cordeau, ou avec une chaîne la distance AC , il aura la longueur de la distance proposée AB .



PROBLEME XXIX.

Mesurer une ligne horizontale, qui n'est accessible qu'en l'une de ses deux extrémités, par le moyen de deux bâtons inégaux.

Plan-
che 8.
Fig. 33.

Pour connoître la longueur de la ligne horizontale AB , qui représente la largeur du fossé $ABCD$, & qui n'est accessible qu'en son extrémité A , élevez à plomb en cette extrémité A , le plus petit bâton AE des deux, dont vous voulez vous servir pour mesurer cette ligne AB . Plantez aussi à plomb l'autre bâton plus grand FG , en ligne droite avec la ligne à mesurer AB , & à telle distance du premier AE , que par les deux bouts E, G , de ces deux bâtons ainsi élevez, vous aperceviez l'autre extrémité B inaccessible. Après cela mesurez exactement la distance AF , que nous supposerons de 12 pieds, & la longueur des deux bâtons AE, FG , dont le plus petit AE , sera supposé de 3 pieds, & le plus grand FG , de 5. De sorte que dans cette supposition l'excès du grand bâton FG , sur le plus petit AE , sera de 2 pieds, comme on le connoît en ôtant 3 de 5. Cet excès 2 sera le premier terme d'une règle de trois directe; 12, ou la distance AF , sera le second; 3, ou le plus petit bâton AE , sera le troisième; & la ligne AB , qu'on cherche, sera le quatrième: elle se trouvera de 18 pieds. Car si on multiplie le second terme 12, qui est la distance AF , par le troisième 3, qui est le plus petit bâton AE , & qu'on divise le produit 36 par 2, qui est l'excès du grand bâton FG sur le plus petit AE , on a 18 pieds pour la longueur de la ligne proposée AB .

PROBLEME XXX.

Mesurer une hauteur accessible par le moyen de son ombre.

Pour connoître la hauteur accessible AB , par le moyen de son ombre AC , terminée par le che 8. rayon BC du Soleil, élevez à plomb le bâton DE Fig. 34. d'une longueur prise à volonté, comme de 8 pieds, & mesurez la grandeur de son ombre DF , que nous supposerons de 12 pieds. Mesurez en même temps l'ombre AC , qui soit, par exemple, de 36 pieds. J'ai dit en même temps, parce qu'autrement le Soleil changeant de place à chaque instant, les rayons BC , EF , ne seroient plus paralleles; ce qui empêcheroit de pouvoir trouver la hauteur AB par cette règle de trois directe: si 12 pieds de l'ombre DF proviennent d'une hauteur DE de 8 pieds, de quelle hauteur proviendra l'ombre AC de 36 pieds? On trouvera 24 pieds pour la hauteur AB , qu'on cherche. Car en multipliant le troisième terme 36 par le second 8, & en divisant le produit 288 par le premier 12, on a pour quotient 24, qui est le quatrième terme proportionnel, ou la hauteur proposée AB .

PROBLEME XXXI.

Trouver à trois lignes données une quatrième proportionnelle.

Pour trouver aux trois lignes données AB, AC , Fig. 35. AD , une quatrième proportionnelle, décrivez des deux extrémités B, D , de la première & de

la troisième ligne donnée , par l'extrémité commune A , les deux arcs de cercle AEF , AGH , & ayant appliqué sur le premier AEF la ligne AE , égale à la seconde ligne donnée AC , prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH , en quelque point , comme en G. Toute la ligne AG sera la quatrième proportionnelle qu'on cherche.

PROBLEME XXXII.

Décrire sur une ligne donnée un Parallelogramme rectangle , dont l'aire soit double de celle d'un Triangle donné.

Plan-
che 8.
Fig. 36.

SI le Triangle donné est ABC , & que la ligne donnée soit BE , élevez à l'extrémité E la perpendiculaire EF , qui soit la quatrième proportionnelle à la base donnée BE , à la base AB du Triangle donné ABC , & à sa hauteur CD. Achevez le rectangle BEFG , qui sera celui qu'on cherche. Ce Problème n'a été mis que pour résoudre le suivant.

PROBLEME XXXIII.

Changer un Triangle donné en un autre Triangle , dont chaque côté soit plus grand que chaque côté du Triangle donné.

SI le Triangle donné est ABC , prolongez sa base AB de part & d'autre en D & en E , en sorte que la ligne AD soit égale au côté AC , & la ligne BE au côté BC , & par le moyen du Problème précédent , décrivez sur la ligne DE le Parallelogramme rectangle DEGF , qui soit double

du Triangle donné ABC. Cela étant fait, si l'on prend sur la ligne DE, entre les points A, B, un point à discrétion, comme H, d'où l'on tire aux deux extrêmités F, G, les droites FH, GH, le Triangle FGH sera celui qu'on cherche, c'est-à-dire, qu'il sera égal au proposé ABC, l'un & l'autre étant chacun la moitié du rectangle FGED, & chacun de ses côtes sera plus grand que chacun des côtes du Triangle donné ABC.

R E M A R Q U E.

On peut même avoir un Triangle moindre que le proposé ABC, quoique tous les côtes soient plus grands que tous les côtes du Triangle ABC, en prenant le sommet H du Triangle FGH au dessous de la base AB.

P R O B L E M E X X X I V.

Deux demi-cercles qui se touchent en dedans, étant donnez sur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite, & les circonferences des deux demi-cercles donnez.

JE suppose que les deux demi-cercles ABC, ADE, sont posez sur la ligne droite AC, & qu'ils se touchent au point A. Pour décrire un cercle qui touche les deux circonferences ABC, ADE, & la partie EC de la ligne droite AC, portez la longueur du demi-diamètre AG, du grand demi-cercle ABC, de F centre du petit demi-cercle ADE, en O, pour avoir la ligne AO, égale à la somme des demi-diamètres AF, AG, des deux demi-cercles donnez ABC, ADE. Elevez

Planche 8.
Fig. 38.

Plan-
che 8.
Fig. 38.

au point E , sur AC , la perpendiculaire EB , & joignez la droite AB . Cherchez aux deux lignes AO , AB , une troisième proportionnelle AH , pour avoir en H le point d'attouchement du cercle qu'on veut décrire, & de la ligne droite EC . Elevez de ce point H sur EC la perpendiculaire HI quatrième proportionnelle aux trois lignes AO , AH , FG , pour avoir en I le centre du cercle qu'on cherche, dont la circonférence touchera EC en H , & les circonférences des deux cercles donnez, le plus grand au dedans, & le plus petit au dehors.

REMARQUE.

Si au dedans de l'espace terminé par les deux circonférences ABC , ADE , on décrit un second cercle qui touche le premier décrit du centre I , & les deux circonférences ABC , ADE , & que du centre K de ce second cercle on abaisse la droite KL perpendiculaire au diamètre AC , cette perpendiculaire KL sera triple du rayon du cercle décrit du centre K . Si au dedans du même espace on décrit un troisième cercle, qui touche le second décrit du centre K , & les circonférences ABC , ADE , la perpendiculaire abaissée du centre M de ce troisième cercle sur le diamètre AC , sera quintuple du rayon du même cercle. De même, si au dedans du même espace on décrit un quatrième cercle, qui touche le troisième décrit du centre M , & les circonférences des deux demi-cercles, la perpendiculaire abaissée du centre P de ce quatrième cercle sur le diamètre AC , sera septuple du rayon du même cercle, & ainsi des autres, selon la progression des nombres impairs 3, 5, 7, 9, &c. Nous remarquerons ici, que tous les cercles in-

finis qui peuvent toucher les deux circonferences ABC, ADE, ont leurs centres dans la circonferance d'une Ellipse, dont un Axe est AO, qui a pour Paramètre la ligne AH.

P R O B L E M E X X X V.

Trois demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnez sur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonferences des trois demi-cercles.

SOient les trois demi-cercles ABC, ADE, EIC, dont les centres F, G, H, sont sur la ligne droite AC. Ayant trouvé à la ligne FG, & au rayon AF, une troisième proportionnelle AL, cherchez à la somme des deux lignes AL, AG, au rayon AG, & au rayon AF, une quatrième proportionnelle, qui sera la longueur du rayon KI du cercle que l'on cherche. Portez cette quatrième proportionnelle KI sur la ligne AC de G en M, & de F en N. Ensuite du centre F & de l'intervalle NE, décrivez vers K un arc de cercle : puis du centre H & de l'intervalle FM, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en K. Ce point d'intersection K sera le centre du cercle cherché, qu'il ne sera pas difficile de décrire, puisque son rayon GM, ou FN, est connu.

Planche 9.
Fig. 39.

Observez que l'on auroit pû trouver le point d'intersection K, en décrivant le second arc de cercle du centre G & de l'intervalle MC.

R E M A R Q U E.

Si l'on joint le centre K avec les centres F, G, H, des trois demi-cercles donnez, par les lignes droites FK, GK, HK, on aura les deux Triangles FKG, GKH, de même contour, le contour de

chacun étant égal au diamètre AC du grand demi-cercle donné ABC, à cause des deux lignes égales AF, GH.

Si entre les deux circonférences ABC, ADE, on décrit, comme dans le Problème précédent, autant de cercles qu'on voudra, qui se touchent mutuellement, touchent aussi les deux circonférences ABC, ADE, & que de leurs centres O, P, Q, K, on tire sur le diamètre AC, autant de perpendiculaires, la perpendiculaire KV sera égale au diamètre de son cercle, la perpendiculaire QT sera double du diamètre de son cercle, la perpendiculaire PS sera triple du diamètre de son cercle, la perpendiculaire OR sera quadruple du diamètre de son cercle, & ainsi des autres, selon la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

PROBLEME XXXVI.

Trois demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnez sur une ligne droite, avec une autre ligne droite tirée par le point d'attouchement des deux demi-cercles intérieurs, & perpendiculaire à la première ligne droite; décrire deux cercles égaux qui touchent cette perpendiculaire & les circonférences de deux demi-cercles.

Plan-
che 9.
Fig. 40.

SOient les trois demi-cercles donnez ABC, ADE, EOC, dont les centres F, G, H, sont placez sur la ligne droite AC, qui est coupée à angles droits au point E, par la ligne droite BE. On trouvera le rayon commun aux deux cercles égaux qui doivent toucher la perpendiculaire BE, & les circonférences de deux demi-cercles, en décrivant du point A par le centre F, l'arc de cercle

FI, puis du point I par le point A, l'arc de cer- Plan-
 cle AK; la ligne KF donnera la longueur du rayon che 9.
 des deux cercles égaux que l'on cherche, dont les Fig. 40.
 centres M, N, se trouveront en cette sorte.

Ayant fait la ligne GL égale à la ligne KF, dé-
 crivez du centre G & de l'intervalle LC, l'arc
 de cercle MN, puis du centre F, & de l'intervalle
 KE, un autre arc de cercle, qui coupant le pre-
 mier MN, donnera le centre M du cercle qui doit
 toucher les circonférences des deux demi-cercles
 ABC, ADE, & la perpendiculaire EB. Décrivez
 aussi du centre H & de l'intervalle FL, un autre
 arc de cercle, qui coupant le premier MN, don-
 nera le centre N du cercle qui doit toucher la per-
 pendiculaire BE, & les deux circonférences ABC,
 EOC.

R E M A R Q U E.

Si on joint les deux centres M, N, avec les
 trois F, G, H, par des lignes droites, on aura les
 deux Triangles FMG, GNH, d'un contour égal;
 ce contour étant dans chaque Triangle égal au
 diamètre AC du plus grand demi-cercle donné
 ABC, à cause des deux côtes égaux GM, GN,
 de la base GH, égale au rayon AF, ou FD, des
 rayons égaux MD, NO, & de la base FG égale
 au rayon EH, ou HO. De plus le rayon MD, ou
 NO, est quatrième proportionnel aux trois lignes
 AG, AF, FG. Enfin si on joint les droites AO,
 CD, la ligne AO sera perpendiculaire au rayon
 HO, ou NO, & touchera par conséquent les cir-
 conférences de ces deux rayons au point O: la li-
 gne CD sera aussi perpendiculaire à chacun des
 deux rayons FD, MD, & touchera par conséquent
 au point D, les circonférences de ces deux rayons.

314 RECREAT. MATH. ET PHYS.
D'où l'on peut tirer une autre construction pour
la résolution du Problème.

P R O B L E M E X X X V I I .

*Décrire un Triangle, dont l'aire & le contour soient
un même nombre quarré.*

Plan-
che 9.
Fig. 41.

A Yant fait la base AB de 17 parties prises sur
une Echelle divisée en parties égales, décri-
vez de l'extrémité A, avec l'ouverture de 9 de ces
parties, un arc de cercle vers le point C, & un au-
tre arc de cercle de l'autre extrémité B, avec l'ou-
verture de 10 des mêmes parties, qui coupera le
premier arc de cercle en un point, comme C. Joi-
gnez les droites AC, BC, & le Triangle ABC sera
celui que l'on cherche; son aire & son contour
étant chacun 36, dont la racine quarrée est 6.

R E M A R Q U E .

Ce Triangle a été trouvé en nombres par le moyen
de ces deux Triangles rectangles en nombres 72,
135, 153, & 72, 154, 170, qui sont de même hauteur;
leurs nombres générateurs sont 12, 3, & 11, 7.
Car joignant ensemble ces deux Triangles, on a
Fig. 42. le Triangle obliquangle ABC, dont la hauteur CD
sera 72 à l'égard de la base AB, qui est 289, & en
divisant chaque côté par la racine quarrée 17 de
cette base 289, on a les trois côtez 17, 10, 9.



PROBLEME XXXVIII.

Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnez, sans en connoître le centre.

IL faut que les trois points proposez ne soient pas dans une même ligne droite, mais qu'ils puissent former un Triangle ACB . Pour décrire une circonférence de cercle, qui passe par les trois points donnez A, C, B , sans en chercher le centre, on commencera par décrire l'arc de cercle AC en cette sorte. Planche 9.
Fig. 43.

Ayant imaginé les lignes AC, CB , on fera avec une carte ou du carton un angle égal à l'angle ACB , dont les côtez CA, CB , soient prolongez vers A & vers B . Après avoir appliqué cet angle de carton ACB sur l'angle ACB , on décrira l'arc CA en abaissant la pointe C vers A , de façon que le point A soit toujours appliqué le long du côté AC , en même temps que le point B demeurera appliqué le long du côté du carton CB prolongé; le point C par son mouvement décrira l'arc CA .

Le même angle de carton ACB servira à décrire l'autre arc CB : en même temps qu'on abaissera la pointe C vers B , il faut que le point B demeure appliqué le long du côté CB , & que le point A soit appliqué le long du côté AC prolongé. C'est ainsi que la pointe C décrira l'arc de cercle CB .

Mais pour décrire le troisième arc de cercle AB sur le côté AB , on fera un angle de carton égal à l'angle ABC , dont les côtez seront prolongés vers A & vers C . On observera les mêmes précautions que l'on a observé, en décrivant les deux arcs AC, CB . La pointe B par son mouvement de B vers A ,

décriera un arc soutenu par la ligne AB . Ces trois arcs AC , CB , BA , formeront la circonférence du cercle ACB , que l'on cherchoit, sans en connoître le centre.

R E M A R Q U E.

Pour décrire l'arc AB , au lieu de faire l'angle de carton égal à l'angle ABC , on peut le faire égal à l'angle BAC , & faire mouvoir la pointe A vers B .

P R O B L E M E X X X I X.

Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrêmités, étant données, trouver sur cette ligne aussi donnée, un point également éloigné des deux autres extrêmités des deux lignes données.

Plan-
che 9.
Fig. 44.

Soient données les deux lignes égales ou inégales AB , CD , perpendiculaires à la ligne AC , qui passe par leurs extrêmités A , C . On trouvera sur cette ligne AC le point F également éloigné des deux autres extrêmités B , D , en joignant ces deux extrêmités par la droite BD , & en tirant à cette même ligne BD par E son point du milieu, la perpendiculaire EF , qui donnera sur la ligne AC le point F , que l'on cherche, de sorte que les deux lignes FB , FD , seront égales entr'elles.

R E M A R Q U E.

Ce Problème se propose ordinairement ainsi : *Les hauteurs AB , CD , & leur distance AC étant données, trouver sur le terrain AC , le point F , en sorte que les cordes qui seront tendues depuis les*

sommets B , D , jusqu'au point F , soient égales entr'elles.

Lorsque les hauteurs AB , CD , & leur distance AC seront connues en nombres , comme si la hauteur AB étoit de 56 pieds , la hauteur CD de 63 ; & la distance AC de 49 , on trouvera la partie AF en ôtant de la somme des deux quarez AC , CD, le quarré AB, & en divisant le reste par le double de AC. De même on trouvera la partie CF , en ôtant de la somme des quarez AC , AB , le quarré CD , & en divisant le reste par le double de AC.

Ainsi la partie AF se trouvera de 33 pieds, & l'autre partie CF de 16 : & chacune des deux cordes égales FC , FD , se trouvera de 65 pieds , comme on le connoitra en ajoutant ensemble les deux quarez AB , AF , ou bien les deux CD , CF , & en prenant la racine quarrée de la somme 4225.

PROBLEME XL.

Décrire deux Triangles rectangles , dont les lignes soient telles , que la différence des deux plus petites du premier Triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du second , & réciproquement que la différence des deux plus petites lignes du second Triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du premier.

Tirez premièrement , les deux lignes AB , AC perpendiculaires l'une à l'autre , de telle grandeur que la première AB soit de 60 parties prises sur une Echelle divisée en parties égales , & la seconde AC de 11 parties. Alors l'hypoténuse BC se trouvera de 61 parties , comme on le connoitra en ajoutant ensemble les quarez AB , AC , &

Planche 9.
Fig. 45.

Plan-
che 9.
Fig. 45.

en prenant la racine quarrée de la somme 3721.
Tirez ensuite deux autres lignes DE , EF , aussi perpendiculaires l'une à l'autre , dont la première DE soit de 119 parties , & la seconde EF de 120. Alors l'hypoténuse DF se trouvera de 169 parties, comme on le connoitra en ajoutant ensemble les quarez DE , EF , & en prenant la racine quarrée de la somme 28561. Les deux Triangles rectangles ABC , DEF , satisferont au Problème. Car la différence 49 des deux plus petites lignes AB , AC , est égale à la différence des deux plus grandes DF , EF du second DEF. Réciproquement la différence 1 des deux plus petites DE , EF , du second Triangle DEF , est égale à la différence des deux plus grandes AB , BC , du premier ABC.

R E M A R Q U E.

Ces deux différences 49 , 1 , se rencontrent ici des nombres quarez , & elles seront toujours telles dans les autres couples de Triangles rectangles qu'on peut trouver par ce Canon général , que j'ai tiré de l'Algèbre ; *Le double du produit du plus grand de deux nombres quelconques par leur somme , & la somme des quarez des deux mêmes nombres , sont les deux nombres générateurs de l'un des deux Triangles rectangles que l'on cherche. Et le double du produit du plus petit des deux mêmes nombres par leur somme & la même somme des quarez , sont les deux nombres générateurs de l'autre Triangle rectangle que l'on cherche.*

De ces trois nombres générateurs , celui qui est commun aux deux Triangles rectangles , est l'hypoténuse d'un troisième Triangle rectangle , l'un des deux autres est le contour de ce troisième

Triangle rectangle , & le troisieme est le même contour , en y changeant le plus grand nombre générateur du troisieme Triangle rectangle au plus petit.

PROBLEME XLI.

Diviser la circonférence d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux , en sorte que le demi-diamètre soit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.

SI le demi-cercle donné est AEB , dont le centre soit D , décrivez par ce centre D , de l'extrémité B , du diamètre AB , l'arc de cercle DE , & ayant divisé l'arc BE en deux également au point C , tirez les deux cordes AC , BC , entre lesquelles le demi-diamètre AD , ou CD , sera moyen proportionnel.

Plan-
che 104
Fig. 464

R E M A R Q U E.

Il est évident que l'arc BE est de 60 degrez , par conséquent sa moitié BC , ou CE , est de 30 degrez , & l'autre arc AEC de 150 degrez. D'où il est aisé de conclure , que le Sinus d'un arc étant la moitié de la corde d'un arc double , & la moitié du rayon ou Sinus total étant le Sinus d'un arc de 30 degrez , ce Sinus d'un arc de 30 degrez est moyen proportionnel entre le Sinus d'un arc de 15 degrez , & le Sinus de son complement , ou le Sinus d'un arc de 75 degrez.



PROBLEME XLII.

Une Echelle d'une longueur connue étant appuyée par le haut contre une muraille, & en étant éloignée par le pied d'une certaine distance, trouver de combien elle descendra, lorsqu'on l'éloignera davantage du pied de la même muraille.

Plan-
che 10.
Fig. 48.

Supposons que l'Echelle EF, qui est appuyée contre la muraille ABCD, soit longue de 25 pieds, & éloignée du pied de la même muraille de 7 pieds, en sorte que la ligne FG, qui est perpendiculaire à la muraille, soit de 7 pieds. Supposons encore qu'on éloigne cette Echelle de F vers H, de 8 pieds, en sorte qu'ayant la situation HI, la partie FH soit de 8 pieds, & toute la ligne GH par conséquent de 15 pieds; alors l'Echelle sera descendue de la ligne EI, que l'on trouvera en cette sorte.

Multipliez la longueur EF de l'Echelle par elle-même, c'est-à-dire, 25 par 25, pour avoir son quarré 625. Multipliez aussi la longueur FG par elle-même, c'est-à-dire, 7 par 7, pour avoir son quarré 49, qu'il faut ôter du quarré précédent 625. Le reste 576 sera le quarré de la hauteur EG, à cause du Triangle EFG rectangle en G. C'est pourquoi si on prend la racine quarrée de ce reste 576, on aura 24 pieds pour la hauteur EG.

Multipliez pareillement la longueur HI par elle-même, ou 25 par 25, pour avoir son quarré 625. Multipliez aussi la longueur HG par elle-même, ou 15 par 15, pour avoir son quarré 225, lequel étant ôté du précédent quarré 625, il restera 400 pour le quarré de la hauteur IG. C'est pourquoi si on

on prend la racine quarrée de ce reste 400, on aura 20 pour la hauteur IG. Cette hauteur étant ôtée de la hauteur EG, qui a été trouvée de 24 pieds, le reste donnera 4 pieds pour la ligne EI que l'on cherche.

PROBLEME XLIII.

Mesurer une distance accessible sur la terre par le moyen de la lumière & du bruit d'un Canon.

FAites avec une balle de mousquet un pendule long de 11 pouces & 4 lignes, en prenant cette longueur depuis le centre de mouvement jusqu'au centre de la balle: & au moment que vous appercevrez la lumière du Canon, qui doit être au lieu dont vous cherchez la distance du lieu où vous êtes, mettez le pendule en branle, en sorte que les arcs des vibrations ne passent pas 30 degrez. Enfin multipliez par 100 le nombre des vibrations simples qui se seront faites depuis le moment que vous avez apperçû la lumière jusqu'à celui où vous avez entendu le bruit du coup de Canon: le produit donnera en toises de Paris la distance du lieu où vous êtes au lieu où l'on a tiré ce coup de Canon.

R E M A R Q U E.

C'est à peu près de la même manière qu'on pourra mesurer la hauteur d'une nuée, lorsqu'elle est proche du Zenit, & qu'il y fait des éclairs & des Tonnerres; mais cette manière de mesurer une telle distance, est fort incertaine: je ne l'ai indiqué ici que par récréation.

Elle sera plus certaine, lorsqu'on voudra mesu-

rer une médiocre distance sur la terre, dont les extrêmités sont tellement situées, que de l'une on ne peut voir l'autre : mais au lieu du canon, il sera plus commode de se servir de l'arquebuse, dont le son se porte à la distance de 230 toises en une seconde de temps.

Ainsi pour mesurer cette distance, il faut par le moyen d'une horloge à pendule, compter les secondes de temps, qui se seront écoulées entre la lumière de l'arquebuse qui aura été tirée à l'une des deux extrêmités de la distance proposée, & le son qui sera parvenu aux oreilles d'une personne, qui doit être à l'autre extrêmité de la même distance; car en multipliant le nombre des secondes par 230, on aura en toises la longueur de la ligne proposée.

Il n'est point nécessaire de se servir des secondes d'un pendule; on peut s'en tenir aux vibrations simples du pendule fait avec une balle de mousquet. Celui qui est au pendule tire un coup, en mettant le pendule en branle; l'autre qui est à l'extrêmité de la distance à mesurer, tire si-tôt qu'il l'entend, & le premier arrête le pendule dès qu'il entend le coup du second. Cette observation faite, si on multiplie le nombre des vibrations par 100, on a en toises le double de la distance, sçavoir, l'aller & le revenir du son; & si l'on en prend la moitié, on a la distance qu'on vouloit mesurer.

On a déjà remarqué qu'en mettant le pendule en branle, il ne falloit pas lui faire décrire un arc plus grand que 30 degrez: on doit ajoûter que les 22 vibrations du pendule font une lieue moyenne de France, telle qu'on en compte deux depuis le grand Châtelet de Paris jusqu'à la porte de l'Eglise de l'Abbaye de S. Denis.

M. de la Hire vouloit que le pendule ne fût long que de 9 pouces, & qu'on en multipliât les vibrations par 90 toises.

Le Pere Schot dit que par plusieurs expériences on a connu qu'un boulet de gros canon pointé horizontalement, fait une lieue d'Allemagne de 4000 pas Géométriques en deux secondes de temps; ce qui peut servir aussi pour mesurer une distance sur la terre, s'il est vrai que la vitesse du son est égale à celle du boulet; car ainsi l'on pourra dire que la distance en pas Géométriques est au temps en secondes entre la lumière & le coup entendu, comme 4000 est à 2, ou comme 2000 à 1, &c.

PROBLEME XLIV.

Mesurer la surface d'un Parallelogramme.

I.

SOit un Parallelogramme rectangle ABCD, dont l'un des côtez AB est de 8 toises, & l'autre AC est de 6 toises, on veut sçavoir combien il contient de toises dans sa surface. Il suffit pour cela de multiplier le côté AB, 8, par le côté AC, 6, le produit 48 est le nombre des toises que contient la surface du Parallelogramme rectangle ABCD. Planche *
Fig. 2.

II.

Si le Parallelogramme est obliquangle, comme EIFH, dont un des côtez EF est de 3 toises, & l'autre FH est de 10; du sommet de quelque'un des angles, comme de E, il faut abaisser la perpendiculaire EG, qui se trouve être ici de 2 toises, on multipliera ces 2 toises par les 10 que con- Planche *
Fig. 3.

tient le côté FH, sur lequel on a abaissé la perpendiculaire : le produit 20 est le nombre des toises que contient la surface du Parallelogramme obliquangle EIFH.

Procès à décider.

Plan-
che *
Fig. 4.
& 5.

Caius avoit un champ parfaitement quarré, dont chaque côté étant de 6 toises, le circuit par conséquent étoit de 24 toises. Sempronius voulant s'en accommoder, il propose à Caius de l'échanger pour une pièce de terre qui avoit aussi 24 toises de circuit, mais qui n'étoit point parfaitement quarrée : c'étoit un Parallelogramme rectangle, dont un des côtez avoit 3 toises de large, & l'autre avoit 9 toises de long.

Caius ne sçavoit point de Géométrie, & il avoit été trompé par le raisonnement captieux de Sempronius, qui lui assuroit que les figures qui ont un même circuit, sont égales entr'elles. Dans la suite ses amis lui firent connoître qu'il avoit été la dupe de Sempronius, qui lui avoit donné un champ qui ne contenoit que 27 toises, en échange d'un qui en contenoit 36.

La contestation fut portée devant le Juge du lieu, qui après avoir pris l'avis d'un Arpenteur, déclara que Caius avoit été surpris, & par conséquent que l'échange étoit nul.

R E M A R Q U E.

Entre deux quarez parfaits, dont l'un a le côté double du côté de l'autre, celui-là est quadruple de celui-ci. Qu'on propose deux quarez, dont l'un ait pour côté 6 pieds, & l'autre 3, le quarré qui a 6 pour côté, est quadruple de celui qui a 3

PROBLEMES DE GEOMETRIE. 325
pour côté ; car le premier contient 36 pieds de surface , & le second en contient 9 , qui est le quart de 36.

P R O B L E M E X L V.

Mesurer la surface d'un Cercle.

IL faut connoître le diamètre du cercle , & sa Voyez
circonférence , multiplier le demi-diamètre ou le Probl.
rayon par la moitié de la circonférence , ou bien XII. pag.
toute la circonférence par le quart du diamètre ; 285
le produit sera la surface du cercle.

I.

Si l'on n'avoit que le diamètre d'un cercle , & qu'il fût difficile de mesurer sa circonférence , il faudra , pour l'obtenir , faire une règle de trois , dont le premier terme sera 7 , le second 22 , & le troisième sera le diamètre du cercle dont on cherche la surface. La règle étant faite , on aura pour quatrième terme la circonférence du même cercle. On sçait , par exemple , que le diamètre d'un bassin est de 28 pieds ; pour avoir sa circonférence il faut multiplier 28 par 22 , & diviser le produit 616 par 7 , le quotient 88 est le nombre des pieds que contient la circonférence de ce bassin. Ainsi pour avoir sa surface , on multipliera 44 moitié de la circonférence par 14 moitié du diamètre , ou toute la circonférence 88 par 7 quatrième partie du diamètre 28 ; le quotient 616 donnera le nombre des pieds de la surface du cercle.

II.

Au contraire il peut arriver qu'on connoisse la

circonférence, sans connoître le diamètre du cercle, pour lors il faut faire une règle de trois, dont le premier terme sera 22, le second 7, & le troisième sera la circonférence connue: la règle faite donnera un quatrième terme, qui sera le diamètre cherché.

On a mesuré le circuit d'une Tour que je suppose être de 88 toises; pour avoir son diamètre on multipliera 88, circuit de la Tour par 7, & l'on divisera le produit 616 par 22; le quotient 28 sera le nombre des toises que contiendra le diamètre de la Tour.

III.

On peut encore avoir la surface d'un cercle en faisant cette règle de trois: comme 14 est à 11, ainsi le quarré du diamètre du cercle est à un quatrième nombre, qui sera la surface du cercle cherché.

REMARQUE.

Ce qu'on a remarqué des quarez, doit aussi s'entendre de deux cercles, dont l'un auroit le diamètre double du diamètre de l'autre: je veux dire que celui qui a le diamètre double, a une surface quadruple de la surface de l'autre. Si, par exemple, un cercle a 6 pieds de diamètre, & qu'un autre en ait trois, la surface de celui qui a 6 pieds de diamètre, est à la surface de celui qui a 3 pieds de diamètre, comme 36 à 9, ou 4 à 1. On doit appliquer à la circonférence ou au circuit, ce qu'on vient de dire du diamètre.

QUESTION I.

Une Cuisiniere étant allée au marché, convient qu'on lui donnera pour un certain prix autant de bottes d'Asperges qu'elle en pourra lier avec une ficelle d'un pied de long ; il se trouve qu'elle en a eu quatre bottes. Le lendemain ayant besoin d'une plus grande quantité d'Asperges, elle retourne au marché, avec une ficelle longue de deux pieds. Elle offre le double du prix qu'elle a donné le jour précédent, pour avoir autant de bottes d'Asperges qu'elle en pourra lier avec la ficelle de deux pieds de long. On demande si elle n'aurait que 8 bottes d'Asperges.

Suivant les Remarques précédentes, elle doit avoir seize bottes d'Asperges ; car la ficelle étant double, elle fait un quarré ou un cercle, dont le circuit est double : par conséquent la surface en sera quadruple ; c'est-à-dire, que le lien qui est double contiendra quatre fois plus que le simple.

La méthode pour résoudre ces sortes de questions, est de faire une règle de trois, dont le premier terme est le quarré de la chose proposée, le second la chose qui est contenue, & le troisième le quarré de la chose dont on veut sçavoir le contenu. Comme dans cet exemple, si 1 quarré de 1 mesure du lien, donne 4 bottes d'Asperges, combien 4 quarré de 2 mesure du second lien, dont on veut sçavoir le contenu.



QUESTION II.

*Une corde de 10 pieds de long entoure 200 piques ;
on veut sçavoir combien une corde de 8 pieds
de long entourera de piques.*

ON trouvera par la règle qu'on vient de proposer , que la corde de 8 pieds entourera 128 piques , en faisant cette règle de trois : si 100 carré de 10 donne 200 , combien 64 carré de 8 , longueur de la corde , dont il est proposé de connaître ce qu'elle doit contenir de piques.

QUESTION III.

*Sempronius a emprunté de Caius un sac de blé qui
avoit 5 pieds de haut & 4 pieds de large : quand
il falut rendre le blé , Sempronius prit quatre sacs
hauts de 5 pieds & larges d'un pied seulement ,
Sempronius rendit-il à Caius tout le blé qu'il avoit
emprunté ?*

IL s'en faut de beaucoup , Sempronius ne rendît que le quart du blé que Caius lui avoit prêté.

QUESTIONS IV. V. VI.

ON ne fera que proposer les questions suivantes : il sera aisé de résoudre , par les principes qu'on a posé , non seulement celles qu'on va lire , mais encore plusieurs autres qui sont de la même nature.

Un Particulier a pour son usage un ponce d'eau ; il reçoit du Magistrat la permission d'en avoir une fois davantage ; il n'y a point de doute que si ce

Particulier faisoit faire un tuyau qui eût deux pouces de diamètres, il auroit quatre fois plus d'eau qu'il n'en avoit.

Une Vieille ayant acheté des marrons plein un sac pour un certain prix ; elle en demande pour le prix double dans un sac qui a deux fois plus d'étoffe dans son circuit, quoiqu'il soit de la même hauteur que le premier, elle aura quatre fois plus de marrons.

Si on défonce deux futailles, & qu'on en fasse une seule des douves de ces deux futailles, la futaille faite des deux contiendra quatre fois plus de vin que l'une des deux n'en contenoit.

P R O B L E M E X L V I.

Tracer un ovale sur le terrain.

L'Ovale a deux diamètres, dont l'un CD est plus grand que l'autre EG . Sur le plus grand CD on choisit deux points A, B , qu'on appelle foyers, qui sont également éloignés des extrémités C, D du grand diamètre. On plante à ces deux points deux jalons ou piquets, auxquels on attache un cordeau AHB : ce cordeau doit être de la même grandeur que le diamètre CD ; on le replie avec un troisième jalon, ou un bâton tel que vous voyez en H , & l'on conduit ce bâton, en tenant toujours le cordeau également tendu, depuis C par HE jusqu'en D . Ensuite on repasse le cordeau de l'autre côté du diamètre CD , on trace de la même façon l'autre côté CGD , & l'on a un ovale $CEDGC$ tracé sur le terrain. On l'appelle l'ovale du Jardinier, parce que c'est de cette manière que les Jardiniers le tracent.

Planche 4
Fig. 6.

REMARQUE.

Si on vouloit tracer un cercle, au lieu de mettre deux jalons A, B aux foyers de l'ovale, il suffiroit d'en mettre un en C, centre du cercle, on plieroit un cordeau de la longueur du rayon CA, on y attacheroit un jalon en A, & l'on feroit mouvoir ce cordeau autour du jalon planté en C, de manière que le jalon A tracerait un cercle en tenant toujours le cordeau également tendu.

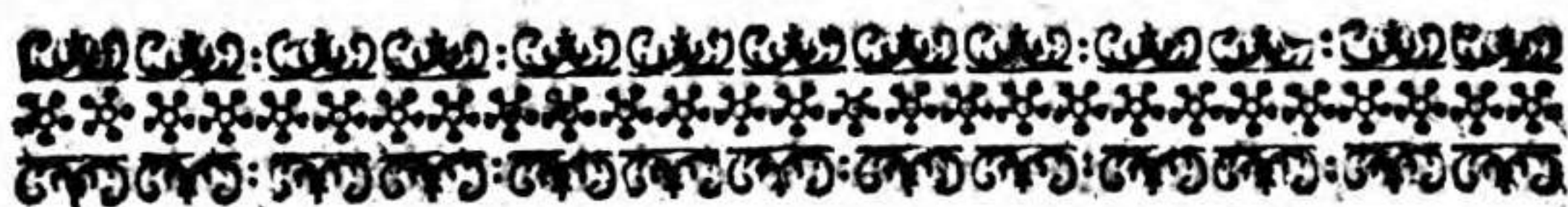
PROBLEME XLVII.

Mesurer la surface d'un ovale.

Fig.

A Près avoir multiplié les deux diamètres, vous ferez une règle de trois, dont le premier terme sera 14, le second 11, & le troisième sera le produit des deux diamètres de l'ovale dont on cherche la surface. Comme si le grand diamètre CD est de 16 pieds, & que le petit soit de 9 pieds, on multipliera 9 par 16, le produit sera 144. Ensuite on divisera par 14 le produit 1584 de 144 par 11; & le quotient $113\frac{1}{7}$ sera la surface de l'ovale CEDGC.





PROBLEMES DE MUSIQUE.

LA Musique a pour objet le son en tant qu'il est agréable à l'organe de l'ouïe. Le son est causé par les vibrations & fremissemens du corps sonore , ou de ses parties , qui étant ordinairement transmis à l'oreille par le moyen de l'air , excitent une sensation agréable ou désagréable. On peut considerer un son seul , ou comparer plusieurs sons ensemble.

L'impression qu'un son seul cause à l'oreille est forte ou foible : elle peut aussi être plus vive ou moins vive.

Lorsque deux ou plusieurs corps sonores forment des sons , si les vibrations des uns & des autres sont telles qu'elles s'accordent ensemble de temps en temps , & par conséquent leurs impressions , cette union d'impressions s'appelle *accord*. Cet accord peut donc être exprimé par des nombres , puisque ce n'est que le rapport du nombre des vibrations du corps sonore , au nombre des vibrations d'un autre corps sonore entre les unions d'impressions. Si , par exemple , deux sons réunissent leurs impressions dans un certain temps après cinq vibrations de l'un & six de l'autre , ce rapport de 5 à 6 des vibrations de ces deux corps sonores , exprimera un accord.

Les accords se divisent en consonances & en dissonances. Les consonances sont des accords

agréables à l'ouïe par eux-mêmes ; on les exprime par de petits nombres , comme de 2 à 3. Les dissonances sont des accords qui sont désagréables ; on les exprime par de grands nombres , comme de 15 à 16.

On considère donc dans la Musique , 1°. le son , qui se divise en tons & en demi-tons. 2°. La durée de ces tons & demi-tons , qui est ce qu'on appelle la *Mesure*. 3°. Les accords de ces tons ou demi-tons , avec d'autres qui en sont éloignés dans de certaines distances , & qui frappent l'oreille de différens tons en même temps ; ce qui s'appelle *Harmonie*.

Les accords peuvent encore être exprimez par des cordes également grosses & également tendues : par exemple, cet accord $\frac{3}{2}$ peut être marqué par la longueur de deux cordes également grosses & tendues ; de sorte que la longueur de la corde qui fait le son plus grave aura trois parties , telles que la corde qui fait le son plus aigu en aura deux ; car il est à remarquer que les vibrations des cordes sont en raison réciproque de leurs longueurs , c'est-à-dire , que la corde qui a trois parties , fait deux vibrations , & par conséquent un son plus grave , tandis que celle qui a deux parties fait trois vibrations , & par conséquent un son plus aigu.

PROBLEME I.

Faire sur les accords les quatre opérations de l'Arithmétique.

I

Pour ajouter deux accords $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, on multipliera les numérateurs ensemble & les dénomi-

nateurs ensemble ; le produit $\frac{18}{10}$ ou $\frac{9}{5}$ est la somme des accords proposez.

I I.

Pour ôter un accord $\frac{6}{5}$ d'un autre $\frac{3}{2}$, on renversera les termes de l'accord à ôter $\frac{6}{5}$ en écrivant $\frac{5}{6}$, on ajoutera ensemble les accords $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{6}$, la somme $\frac{15}{12}$ ou $\frac{5}{4}$, sera la différence des deux accords proposez.

Remarquez que si l'on ôtoit un grand accord $\frac{3}{2}$ d'un petit $\frac{6}{5}$, on auroit $\frac{12}{15}$ ou $\frac{4}{5}$, qui est le même accord que le précédent, mais renversé.

I I I.

Pour multiplier un accord, on prendra les puissances des deux termes de cet accord. Si on veut doubler l'accord $\frac{3}{2}$, on prendra le quarré $\frac{9}{4}$: si on veut le tripler, on prendra le cube $\frac{27}{8}$, & ainsi des autres.

I V.

Pour diviser un accord, on prendra la racine quarrée, cubique, &c. de cet accord. Ainsi pour avoir la moitié de l'accord $\frac{9}{4}$, il en faut prendre la racine quarrée $\frac{3}{2}$. De même, pour avoir le tiers de l'accord $\frac{27}{8}$, ou, ce qui est la même chose pour le diviser par 3, il en faut prendre la racine cubique, qui est $\frac{3}{2}$, &c.

Si on propoisoit de diviser en quatre parties cet

accord $\frac{1^6}{1^5}$, qui n'est point une quatrième puissance, il faudroit multiplier les termes de cet accord par 4, on auroit $\frac{6^4}{6^0}$, & prendre entre 64, 60 deux autres termes qui eussent la même différence que les termes proposez, comme $\frac{6^3}{6^2}$, qui sera sensiblement le quart de l'accord $\frac{1^6}{1^5}$. De même, pour diviser l'accord $\frac{3^3}{3^1}$, en 7 parties, on multipliera ces nombres par 7, & l'on aura $\frac{2^3}{2^1}$, entre lesquels on prendra $\frac{2^2}{2^3}$, qui sera sensiblement la septième partie de l'accord proposé. Ainsi des autres.

PROBLEME II.

Exprimer les accords par Logarithmes.

Pour avoir l'accord $\frac{3}{2}$ en Logarithmes, on cherchera les Logarithmes de 3 & de 2, qui sont $\begin{smallmatrix} 0. & 4771212 \\ 0. & 3010300 \end{smallmatrix}$, ou en retranchant les trois derniers chiffres des Logarithmes, on aura $\begin{smallmatrix} 0. & 4771 \\ 0. & 3010 \end{smallmatrix}$, & en ôtant le petit Logarithme du grand, on aura $\begin{smallmatrix} 0. & 1761 \\ 0. & 0000 \end{smallmatrix}$, ou simplement 0. 1761, qui exprimera en Logarithmes l'accord $\frac{3}{2}$.

REMARQUE.

Quand on a les accords exprimez en Logarithmes, on peut les ajouter & les soustraire par la règle ordinaire, c'est-à-dire, par l'addition & la sou-

straction. Comme si l'on avoit ces deux Logarithmes 0.1249 ($\frac{4}{3}$) 0.1761 ($\frac{3}{2}$) on aura aussi leur somme 0.3010 en les ajoutant ensemble, & leur différence 0.0512 en ôtant 0.1249 de 0.1761. Mais pour multiplier un accord, il faut multiplier le Logarithme par le nombre proposé : ainsi pour quadrupler l'accord 0.1761 ($\frac{3}{2}$) on multipliera 0.1761 par 4, & le produit 0.7044 est le quadruple de l'accord proposé $\frac{3}{2}$. Au contraire, pour diviser un accord 0.3010 ($\frac{2}{1}$) en douze parties, on prendra la douzième partie du Logarithme 0.3010, qui est 0.0251

PROBLEME III.

Partager l'intervalle de l'Octave en sept autres intervalles simples, qui sont les Tons & demi-Tons.

LE plus simple de tous les accords s'exprime par ce rapport $\frac{1}{1}$; il s'appelle l'Unisson : le rapport suivant $\frac{2}{1}$ s'appelle Octave. L'Unisson & l'Octave ont tant de rapport ensemble, que les Musiciens les prennent indifféremment l'un pour l'autre. Cet autre rapport $\frac{4}{1}$ s'appelle double Octave; celui-ci $\frac{8}{1}$ se nomme triple Octave, & ainsi de suite.

L'Octave peut être divisée de deux manières; numériquement ou géométriquement : on donnera ces deux divisions dans les deux articles suivans.

I.

Pour diviser l'Octave numériquement , 1°. doublez les termes de l'Octave $\frac{2}{1}$, vous aurez $\frac{4}{2}$; prenez le nombre 3 , qui est entre les termes 2 , 4 , formez-en deux rapports avec les mêmes termes 4 , 2 , & l'Octave se trouvera divisée en $\frac{3}{2}$, qui est la Quinte , & $\frac{4}{3}$, qui est la Quarte.

2°. Doublez les termes de la Quinte $\frac{3}{2}$, vous aurez $\frac{6}{4}$; prenez le nombre 5 , qui est entre ces termes 4 , 6 , formez-en deux autres rapports avec les mêmes termes 4 , 6 , & la Quinte sera divisée en $\frac{5}{4}$, qui est la Tierce majeure , & $\frac{6}{5}$, qui est la Tierce mineure.

3°. Doublez les termes de la Tierce majeure $\frac{5}{4}$; vous aurez $\frac{10}{8}$; prenez le nombre 9 , qui est entre ces termes, 8 , 10 , formez-en deux rapports avec les mêmes termes 8 , 10 , & la Tierce majeure se trouvera divisée en $\frac{9}{8}$, qui est le Ton majeur , & $\frac{10}{9}$, qui est le Ton mineur. Ces deux Tons sont les premières dissonances nées de ces divisions.

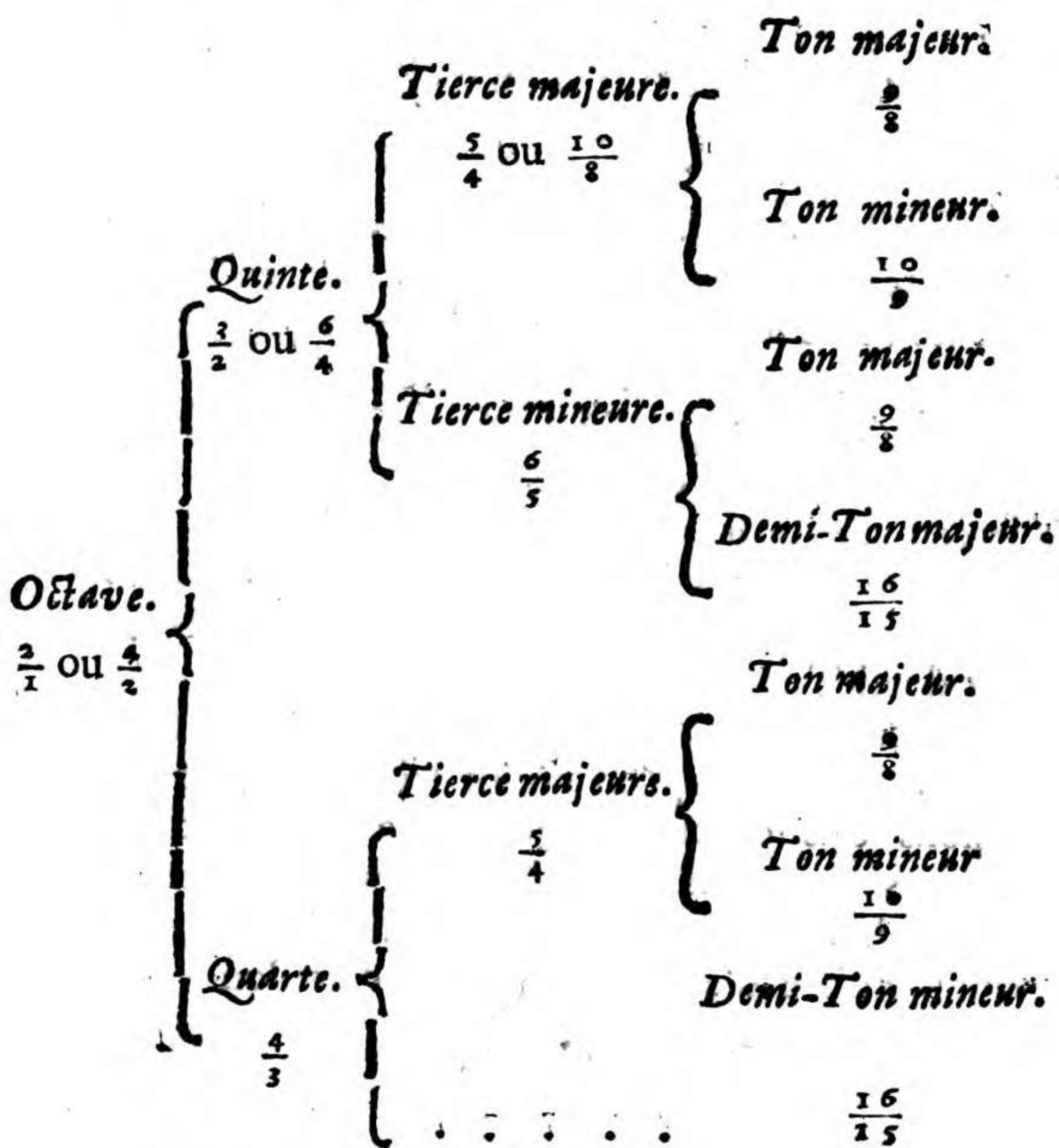
* Problème
me I. Art. II. p. 333.
4°. Pour trouver la division de la Quarte $\frac{4}{3}$; ôtez-en* la Tierce majeure $\frac{5}{4}$, le reste sera le demi-Ton majeur $\frac{1}{15}$: ainsi la Quarte contiendra la Tierce majeure $\frac{5}{4}$, & le demi-Ton majeur $\frac{1}{15}$.

5°. Pour connoître la division de la Tierce mineure $\frac{6}{5}$, ôtez-en le Ton majeur $\frac{9}{8}$, le reste sera le demi-

demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$, & de cette manière la Tierce mineure contiendra le Ton majeur $\frac{9}{8}$, & le demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$.

Ainsi l'Octave se divisant en Quinte & en Quarte; la Quinte se divise en Tierce majeure & en Tierce mineure : la Tierce majeure en Ton majeur & en Ton mineur ; & la Tierce mineure en Ton majeur & en demi-Ton majeur. De même la Quarte se divise en Tierce majeure & en demi-Ton majeur ; cette Tierce majeure a déjà été divisée en Ton majeur & en Ton mineur : par conséquent l'Octave contient trois Tons majeurs, deux Tons mineurs & deux demi-Tons majeurs.

C'est ce qu'on comprendra mieux en jettant les yeux sur la Table qu'on a joint ici, où toutes les divisions que contient l'Octave se trouvent les unes sous les autres dans la dernière colonne à main droite. Ce qu'on dira dans l'article suivant servira encore d'éclaircissement à ce qu'on vient de dire.



Après avoir donné la division de l'Octave en nombres, on va la donner géométriquement en l'appliquant à une corde.

II.

Pour diviser l'Octave géométriquement, soit PB une corde tendue, & de telle longueur qu'il vous plaira. 1°. Divisez-la également en b, le point b marquera l'Octave, c'est-à-dire, que si l'on mettoit un chevalet en b, la partie Pb fera l'Oc-

Plan.
che
Fig.

tave avec toute la corde PB. Pour mieux entendre ce qui vient d'être dit , il faut concevoir que s'il y avoit deux cordes également grosses & tendues , dont l'une fût égale à PB , & l'autre à Pb ; PB ayant été pincée , feroit une vibration , tandis que Pb en feroit deux , suivant ce qu'on a dit ci-dessus. On doit supposer la même chose dans la suite.

Il faut faire attention que les deux moitiés de la corde séparées par le chevalet forment l'unisson qu'on a dit être exprimée par ce rapport $\frac{1}{1}$.

2°. Divisez bB également en E , alors PE fera la Quinte avec Pb , & la Quarte avec PB.

3°. Partagez également bE en G , alors PG fera la Tierce majeure avec Pb , & la Tierce mineure avec PE.

4°. Divisez bG également en A , alors PA fera le Ton majeur avec Pb , & le Ton mineur avec PG.

5°. Partagez PG en huit parties égales , & faites GF égale à une de ces huit parties , alors PF fera un Ton majeur avec PG , & un demi-Ton majeur avec PE.

6°. Divisez PE en quatre parties égales , portez-en une en EC , alors PC fera avec PB un demi-Ton majeur , & avec PE une Tierce majeure. Cette quatrième partie est la distance AE.

7°. Divisez EC également en D , alors PD fera le Ton majeur avec PE , & le Ton mineur avec PC.

L'Octave se trouve ainsi divisée en 7 intervalles ou 7 accords , qui sont trois Tons majeurs , deux Tons mineurs & deux demi-Tons majeurs. Si on prend Pc moitié de PC , qui est son Octave, au

340 RECREAT MATH. ET PHYS.
lieu des divisions de l'Octave Bb, on aura l'Octave Cc, qui contiendra les mêmes intervalles.

REMARKES.

On a ajouté aux divisions qu'on vient de faire de la corde PB, des nombres qui étant comparez les uns aux autres, suivant ce qu'on vient de dire, expriment les accords qu'on a trouvé dans l'article précédent. On a d'abord l'Octave $\frac{64}{32}$, & les autres accords comme la Quinte $\frac{48}{32}$, la Quarte $\frac{64}{48}$, &c. Mais en prenant 30, moitié de 60, au lieu d'avoir l'Octave de 32 à 64, on a l'Octave de 30 à 60.

L'Octave & ses divisions prises entre les nombres 30 & 60, s'accorde avec les noms particuliers qu'Arétin, Moine Benedictin, a donné aux sons différens de ces divisions. On les a marqué dans la figure, quoiqu'ils soient assez connus; on sçait qu'ils ont été tirez des premières syllabes de chaque hémistiche de l'Hymne de S. Jean.

*UT queant laxis, REsonare fibris,
MIRA gestorum FAmuli tuorum;
SOLve polluti LABii reatum,
SAncte Joannes.*

Si on double les nombres qui sont entre 30 & 60, on aura une seconde Octave divisée en ses accords: on auroit une troisième Octave en doublant les nombres de cette seconde Octave; & ainsi de suite pour avoir autant d'Octaves qu'on voudra.

PROBLEME IV.

Mesurer la durée des Tons.

Pour mesurer le temps qu'on employe à marquer les Tons selon leur durée, il faut concevoir un mouvement précipité très-égal, comme le battement de l'artere, ou la vibration d'un pendule, & comptant 1, 2, 3, 4, recommencer toujours à compter de quatre en quatre, afin de se faire une juste idée de ce qu'on appelle un Temps de la Musique.

On doit ensuite s'accoutûmer la main droite à marquer un mouvement à peu près semblable à celui qui vient d'être expliqué, en l'abaissant & comptant un; en l'élevant un peu en dehors, & comptant deux; puis trois en la retirant un peu vers soi; enfin quatre, en l'élevant un peu au dessus de l'endroit où elle étoit au premier Temps, observant que les quatre divers mouvemens soient égaux, on la replacera également où elle étoit au premier: d'où on recommencera à compter 1, 2, 3, 4. Il est nécessaire de s'habituer à ce mouvement, qui sert de base à tous les autres qui se font dans la Musique, ou qui en dépendent.

REMARQUES.

Outre ce mouvement réglé de quatre en quatre, il y a encore une autre mesure qui se règle de trois en trois; en sorte qu'après avoir compté un en baissant la main, on compte deux, comme au second Temps de la Mesure ci-devant; mais le troisième se compte en élevant la main: après quoi

on recommence à compter 1, 2, 3, comme la première fois; & ainsi de suite.

La durée d'un Ton est réglée par un ou plusieurs de ces Temps, ou par la moitié, le quart ou la douzième partie d'un Temps, ainsi qu'on le marque par les notes ou caractères qui sont usitez dans la Musique.

PROBLEME V.

Faire trembler sensiblement & à vûe d'œil la corde d'une Basse de Viole, ou de quelqu'autre Instrument, sans que personne y touche.

Prenez une Basse de Viole, ou autre semblable Instrument de Musique; choisissez deux cordes tellement éloignées l'une de l'autre, qu'il y en ait une entre deux: accordez ces deux cordes, sans toucher à celle du milieu. Ensuite touchez un peu fort avec l'archet sur la plus grosse corde, & vous verrez qu'en même temps que celle-ci tremblera, celle qui en est éloignée, mais accordée au même Ton, tremblera aussi sensiblement, sans qu'on y touche. Ce qui est très-remarquable, c'est que la corde qui sera au milieu n'aura aucun mouvement, & qu'aussi-tôt qu'on aura mis la grosse corde sur un autre Ton, en lâchant ou serrant la cheville, ou bien en mettant le doigt sur quelque endroit de cette corde, l'autre ne tremblera plus. La chose paroîtra encore plus merveilleuse, si on l'exécute sur deux Basses de Viole.

REMARQUES.

Cette merveille ne vient que de ce que ces deux cordes sont tellement tendues, que les vibrations

de l'une répondent aux vibrations de l'autre, en sorte que la première étant ébranlée ; la seconde se trouve aussi ébranlée par l'entremise de l'air, qui reçoit les mêmes frémissemens que la grosse corde, & les communique à l'autre par des vibrations qui leur conviennent ; au lieu que la corde du milieu n'étant point accordée avec les deux autres, n'est pas susceptible des mêmes vibrations, & par conséquent ne reçoit aucun mouvement.

On remarque le même effet sur deux verres que l'on met à l'unisson, en versant de l'eau peu à peu dans celui qui a le son plus clair : si on frotte le bord de l'un de ces verres avec le doigt mouillé, en sorte que l'on forme un son par ce frottement, l'autre verre, qui doit être assez proche, sera ébranlé : ce que l'on connoîtra par le mouvement d'une épingle tortuée qu'on mettra sur le bord.

De même si deux Timbales sont à l'unisson, & que l'on frappe l'une des deux avec leur bâton, on fera sauter de la monnoye qu'on aura mise sur l'autre. On observe encore qu'en battant du Tambour, les vitres qui sont à l'unisson, en sont ébranlées, & que dans les lieux où l'on joue d'une Basse de Violon, ou de quelque autre Instrument fort, en mettant la main sur des planches, sur la forme d'un chapeau, ou sur d'autres corps un peu fermes & minces, on les sent fremir, lorsque l'on produit le son sur des cordes qui sont à l'unisson avec ces corps.

On ajoutera ici comme une chose très-curieuse, que deux pendules posées sur une même tablette, s'accorderont à aller à la même heure, quoique leurs aiguilles n'aient point été mises d'abord à la même heure.

A V E R T I S S E M E N T.

M. Sauveur a inventé un système de Musique, il divise l'Octave en 43 parties, qu'il appelle Merides, & ces Merides sont encore divisées en sept Heptamerides; de sorte que l'Octave contient 301 Heptamerides: il exprime tous les accords par Merides & Heptamerides, & il donne des noms de lettres aux différens sons de l'Octave. Ainsi au lieu de UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, UT, il a imaginé ces sept noms PA, RA, GA, FO, BO, LO, DO, PA, qu'il applique aux sept secondes de l'Octave, dont chaque Ton contient 7 Merides, & chaque demi-Ton 4 Merides. Pour exprimer les Merides & les Heptamerides, & pour varier les Tons, il change les voyelles de cette Gamme en d'autres voyelles, selon qu'il veut abaisser ou élever ces Tons.

Il a encore inventé des notes qui répondent aux différens noms, dont la Gamme est susceptible par les changemens de voyelles dont on vient de parler. Ces notes reçoivent aussi divers changemens, soit pour exprimer la durée du Temps, soit pour exprimer les Merides, Heptamerides, & même les demi-Heptamerides, par rapport à l'élevation & à l'abaissement des Tons. Elles se rangent sur une seule ligne, au commencement de laquelle on met une des Clefs, qui sont encore de l'invention de M. Sauveur, & qui servent à marquer les différentes Octaves. On peut consulter sur ce nouveau Système le Memoire de l'Académie Royale des Sciences aux années 1701 & 1702.





P R O B L È M E S
D' O P T I Q U E.

L'Optique est une science qui considère les propriétés de la lumière, & par conséquent les couleurs : elle comprend tout ce qui sert d'objet à la vûe.

La lumière considérée en elle-même, peut être regardée de trois différentes manières. 1°. En tant qu'elle est directe, c'est-à-dire, que ses rayons sont envoyez du corps lumineux ou coloré vers l'œil. 2°. En tant qu'elle est réfléchie, c'est-à-dire, que ses rayons ayant frappé quelque corps poli, comme un miroir, ils sont renvoyez vers l'œil. 3°. En tant qu'elle est rompue, c'est-à-dire, que ses rayons ayant rencontré un corps transparent, ils le pénètrent en se brisant.

La première manière de considérer la lumière, sert d'objet à la perspective, qui trompe agréablement l'imagination. Cette partie de l'Optique nous apprend à tracer géométriquement sur un plan la représentation des objets selon leurs dimensions & leurs situations différentes ; en sorte que ces représentations fassent sur nos yeux le même effet que feroient les objets mêmes dont elles ne sont que les images.

On examine la lumière réfléchie dans la Catoptrique, qui considère les propriétés des Miroirs plats, convexes & concaves. Cette partie suppose

346 RECREAT. MATH. ET PHYS.
que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

La Dioptrique considère les propriétés de la lumière rompue. L'expérience apprend qu'un rayon de lumière passant obliquement d'un milieu dans un autre, se détourne en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire. Il s'en éloigne si le milieu dans lequel il entre, est plus difficile à pénétrer que celui dans lequel il est : mais il s'en approche, si le milieu dans lequel il passe est plus aisé à pénétrer que celui qu'il quitte.

L'Optique suppose aussi que les objets qui sont vus sous de plus petits angles, paroissent plus petits ; ce qui arrive ordinairement, lorsqu'ils sont plus éloignés. Sur ces suppositions, nous résoudrons plusieurs Problèmes utiles & agréables, comme vous allez voir.

PROBLEME I.

Faire qu'un objet étant vu de loin, ou de près, paroisse toujours de la même grandeur.

Plan-
che 10.
Fig. 47.

POUR faire que la ligne AB paroisse d'une même grandeur, lorsqu'elle sera mise en différents lieux plus ou moins éloignés de l'œil placé en C, il faut décrire un cercle dont la circonférence passera par l'œil, & mettre la ligne AB en tel endroit de la circonférence qu'il plaira, comme vous le voyez en ED & AB. Cette ligne étant en ED, qui est la situation la plus éloignée de l'œil, paroitra de la même grandeur, que si elle étoit en AB, qui est beaucoup plus proche : car l'œil arrêté en C, voit ces deux lignes égales AB, DE, sous les angles égaux ACB, DCE.

REMARQUE.

Il est évident que la ligne proposée AB sera toujours vûe sous un même angle, & que par conséquent elle paroîtra toujours d'une même grandeur à quelque distance que l'œil soit de cette ligne, pourvû qu'il ne quitte jamais la circonférence du cercle qui passe par les deux extrêmités A, B. Ainsi sans changer la situation de la ligne AB, on peut changer celle de l'œil, en le plaçant en tel point qu'on voudra de la circonférence d'un cercle quelconque qui passe par les deux extrêmités de la ligne, ou grandeur proposée AB, comme en F, ou en G: les angles visuels AFB, AGB, ACB, étant toujours égaux.

Il est aussi évident qu'une même ligne AB paroîtra toujours de la même grandeur en l'approchant de l'œil C, sans la placer dans la circonférence d'un cercle, pourvû que ses deux extrêmités demeurent toujours dans les mêmes rayons visuels AC, BC, comme il arrive en lui donnant la situation AD; parce que dans cette situation elle est vûe sous le même angle visuel ACB; ce qui ne doit point changer sa grandeur apparente, quoiqu'elle soit plus proche de l'œil C.

Planche 10.
Fig. 50.

PROBLEME II.

La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire sur AC à son extrêmité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC soit vûe la plus grande qu'elle puisse être vûe dans toute l'étendue de la ligne CZ.

Divisez la ligne AB au point F en deux parties égales AF, FB; des points A & B com-

Planche 7.
Fig. 7.

me centre, & de l'intervalle FC, décrivez deux arcs de cercles qui se couperont en G. Du point G menez sur CZ la perpendiculaire GD, le point D sera celui où l'œil étant placé, il verra la ligne AB la plus grande qu'il la puisse voir dans toute l'étendue de la ligne indéterminée CZ : car ayant décrit le cercle ABD, il est aisé de démontrer que l'angle ADB est le plus grand de tous ceux dont le sommet sera dans la ligne CZ, & qui auront pour base la ligne AB. Tous les angles qui sont au dessus ou au dessous de D, sont plus petits que celui qui est en D.

R E M A R Q U E.

Il est clair qu'en quelque point du plus grand arc ADB on place l'œil, la ligne AB sera vûe d'une même grandeur, puisqu'elle sera vûe sous le même angle.

P R O B L E M E III.

L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui soit vûe de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.

Plan-
che **
Fig. 8.

Ayant tiré les lignes BA, BC, BE, du point B, comme centre & de l'intervalle BI pris à volonté, décrivez l'arc de cercle IFH; faites GH égal à IF; par le point G menez la ligne BGD, la partie DE sera vûe de la même grandeur que la partie AC, puisqu'elles sont vûes sous les mêmes angles.

REMARQUES.

C'est par cette égalité des angles visuels, que l'on peut écrire contre une muraille des caractères, qui bien qu'inégaux paroîtront égaux, étant vûs d'un certain point, & que l'on peut placer sur un pinacle, ou sur quelque haut frontispice une statue d'une telle longueur & d'une telle grosseur, qu'étant vûe d'en bas, elle paroisse d'une grandeur proportionnée à la hauteur du lieu, sans qu'il soit besoin de polir extrêmement cette figure, & encore moins de s'arrêter aux muscles du corps, ni aux plis de la draperie, comme l'on feroit si la figure se voyoit de plus près.

Lorsqu'on voudra exécuter ce Problème sur une muraille, il faudra d'abord l'exécuter sur le papier : mais on doit prendre la distance du point de vûe à la muraille, & la hauteur de la muraille ou de ses parties, afin de rapporter ces mesures sur le papier par le moyen d'une échelle. On portera les distances trouvées sur le papier à la muraille, en observant de donner autant de toises ou de pieds sur la muraille, qu'on aura trouvé sur le papier de parties, qui correspondent dans l'échelle aux toises, pieds, pouces, &c.

PROBLEME IV.

Trouver un point, duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroissent égales.

IL y a une infinité de points différens, d'où les deux parties inégales AB , BC , de la ligne droite AC , étant vûes, peuvent paroître égales, parce qu'ils sont dans la circonférence d'un cercle : mais

Plan-
che 10.
Fig. 49.

sans nous arrêter à la Théorie, nous enseignerons ici une méthode très-courte pour trouver un de ces points, comme vous allez voir.

Décrivez des deux extrémités A, B, & de l'intervalle AB deux arcs de cercle, qui se coupent ici au point D, d'où il faudra décrire avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle vers F. Décrivez pareillement des deux extrémités B, C, & de l'intervalle BC, deux arcs de cercle, qui se coupent ici au point E, & décrivez de ce point E, avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle, qui coupe ici en F celui que vous avez décrit du point D. Ce point F sera celui duquel les deux lignes proposées AB, BC, étant vûes, paroîtront égales; à cause de l'égalité des deux angles visuels AFB. BFC.

R E M A R Q U E.

On opérera de la même façon, lorsque les deux extrémités des deux lignes proposées AB, BC, ne se joindront pas. Nous avons enseigné dans notre *Dictionnaire Mathématique*, la manière de trouver un point, duquel trois parties inégales d'une ligne droite étant vûes, paroîtront égales.

P R O B L E M E V.

Un Anneau étant placé à une certaine distance, proposer de l'enfiler avec une Baguette recourbée par l'une de ses extrémités.

IL faut, 1°. que celui qui se prépare à enfiler l'Anneau, puisse le toucher avec la Baguette. 2°. Qu'il n'en voie point l'ouverture. * 3°. Qu'il
* C'est-à-dire, que l'Anneau doit lui présenter son bord.

ferme un œil. 4°. Qu'il essaye à enfiler l'Anneau avec le bout recourbé de la Baguette.

Il n'est pas aisé d'enfiler cet Anneau aux conditions qu'on vient de marquer. Cette difficulté vient de ce qu'avec un œil seul on ne peut pas juger de la distance des objets.

PROBLEME VI.

Représenter en perspective tel objet que l'on voudra ; sans se servir de point de vûe.

Remièrement, pour trouver dans le Tableau Plan-
che 11.
Fig. 55. l'apparence de quelque point du plan Géométral, par exemple, du point E, tirez de ce point E, la ligne EG perpendiculaire à la ligne de terre CD. Portez la longueur de cette perpendiculaire GE, de part & d'autre du point G, sur la même ligne de terre CD, aux points F, D. Après cela ayant pris à volonté sur la ligne horizontale AB, les deux points de distance A, B, tirez de ces deux points A, B, par les points D, F, les droites AD, BF, qui donneront par leur intersection l'apparence H du point proposé E.

C'est de la même façon que l'on trouvera l'apparence de quelque autre point du plan Géométral, & par conséquent la représentation de la base de quelque corps que ce soit, lequel se pourra représenter en perspective, en tirant de tous les points de son assiete, ou plan perspectif des lignes perpendiculaires à la ligne de terre CD, & égales en apparence à la hauteur du corps proposé; ce qui se fera en cette sorte.

Ayant porté la hauteur naturelle du corps proposé sur la ligne de terre CD, par exemple, de

C en K, tirez de ces deux points C, K, au point L pris à discrétion sur la ligne horizontale AB, les droites LC, LK, qui termineront les hauteurs apparentes de tous les points du corps proposé, en tirant de ces points des lignes parallèles à la ligne de terre CD. Comme pour trouver la hauteur du point H, on tirera de ce point H une ligne parallèle à CD, qui coupera le Triangle LCK, & donnera MN. On portera cette longueur MN en HO, qu'on fera perpendiculaire à CD. Cette ligne HO sera la hauteur apparente du corps représenté dans le Tableau.

On fera la même chose à l'égard de tous les autres points du plan perspectif, & les lignes tirées de ces points parallèlement à CD, donneront dans le Triangle LCK les hauteurs apparentes, qu'il faut élever perpendiculairement à CD à chaque point du plan perspectif, comme on vient de le faire.

PROBLEME VII.

Représenter en perspective un Polyedre équilateral, terminé par six quarrés égaux, & par huit exagones réguliers & égaux entr'eux.

Plan-
che 12.
Fig. 56.

Ceux qui entendent la Perspective représenteront facilement ce corps dans le Tableau, dont le point de vûe est V, & un des deux points de distance est D, marqué sur la ligne horizontale DV, qui est parallèle à la ligne de terre AB, pourvû qu'ils en sçachent décrire le plan & le profil; ce qui se fera en cette sorte.

Premièrement, si l'on veut que ce corps s'appuye sur l'un de ses huit exagones, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, on décrira de son centre C un cercle,

cle , dont le rayon ou demi-diamètre C8 , ou C9 , ^{Plan-} soit tel , que son quarré soit au quarré de celui de ^{che 12.} l'exagone , comme 7 est à 3 ; de sorte que si le ^{Fig. 56.} rayon ou le côté 1 , 2 , de l'exagone est de 65465 parties égales , le rayon C8 , ou C9 du grand cercle en contiendra 100000.

Ayant donc ainsi décrit ce grand cercle , on le divisera inégalement , comme vous voyez dans la figure , en sorte que le plus petit côté 8 , 9 , & les autres cinq soient égaux chacun au côté de l'exagone , & que le plus grand 7 , 10 , & les cinq autres soient doubles chacun du plus petit ; auquel cas , le plus petit soutiendra un arc de 38. 12'. & le plus grand , ou son double un arc de 81. 48'. Mais sans cela il sera aisé de décrire ce plan par la seule inspection de la figure.

Pour le profil , décrivez autour du plus petit côté 21 , 15 , le demi-cercle 21 , O , 15 , & ayant décrit du point 4 par le point 15 , l'arc de cercle 15 , O , joignez la droite 21 , O qui sera la hauteur des points 9 , 8 , 14 , 13 , 20 , 17 , la hauteur des points 7 , 12 , 15 , 21 , 16 , 10 , étant égale au double de la ligne 21 , O , & la hauteur des points 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , étant égale au triple de la même ligne 21 , O.

Si l'on met en perspective ce plan ainsi décrit , & que de tous ses angles on élève des perpendiculaires à la ligne de terre , pour y mettre les hauteurs convenables à celles du profil , il n'y aura ^{Plan-} plus qu'à joindre les côtez , comme vous voyez ^{che 13.} dans la figure , & encore mieux dans la ^{Fig. 57.} 57. fig. que ^{Fig. 57.} nous avons représentée en plus grand volume , pour vous mieux faire distinguer les côtez qu'il faut joindre , dont ceux qui sont marquez par des lignes noires , sont ceux qui paroissent à l'œil , & les

autres qui sont marquées par des lignes ponctuées, sont ceux qu'on ne voit pas.

Plan-
che 13.
Fig. 58.

Secondement, si l'on veut que le corps s'appuie sur l'une de ses six surfaces quarrées, comme sur le quarré $a, b, 15, 21$, le plan, ou l'affiète de ce Polyèdre changera, & elle sera telle que vous la voyez dans la figure 58, qu'il ne faut que regarder pour la comprendre, pour le moins quand on sçaura que le grand côté de l'octogone irrégulier, comme $d12$ est égal à la diagonale $a15$, ou $b21$ du quarré intérieur, qui sert de base au Polyèdre.

Le profil change aussi; car la hauteur des points 3, 7, 6, 10, est égale à la moitié cd du grand côté $d12$ de l'octogone irrégulier, la hauteur des points 4, 5, 17, 6, m, d , est égale au côté entier $d12$, la hauteur des points 14, 20, n, c , est égale au même côté $d12$, & à sa moitié cd ; enfin la hauteur des points $a, b, 15, 21$, est double du même côté $d12$, dont le quarré est au quarré du rayon de l'octogone irrégulier, comme 4 est à 5; ce qui fait que si le rayon est de 100000 parties égales, le grand côté $d12$ en contient 89442, & soutient un arc de 53. 8'. & que le petit côté dm en comprend 63245, & soutient un arc de 36. 52'. Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis le Polyèdre en perspective, comme vous voyez dans la 59. fig.

Plan-
che 14.
Fig. 59.



PROBLEME VIII.

Représenter en perspective un Polyëdre équilatéral, terminé par six Quarrez égaux, & par huit Triangles équilatéraux, & égaux entr'eux.

SI vous voulez que le Polyëdre s'appuye sur l'un de ses six quarrez égaux, comme 9, 10, 11, 12, il n'y aura qu'à lui circonscire un autre quarre, & le plan sera achevé, dont le profil est tel. Planche 14. Fig. 60.

La hauteur des points 5, 6, 7, 8, est égale à la moitié 3, 5, du côté 6, 5, du quarré circonscrit, & la hauteur des points 1, 2, 3, 4, est égale au côté entier 6, 5, ou à la diagonale 11, 9, ou 10, 12, du quarré inscrit, qui sert de base au Polyëdre.

Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis ce Polyëdre en perspective, comme vous voyez dans la 61. Fig. qui vous fait voir distinctement les côtez qu'il faut joindre, quand on a trouvé dans le Tableau l'apparence des points qui bornent leurs extrêmitéz. Planche 15. Fig. 61.

PROBLEME IX.

Représenter en perspective un Polyëdre équilatéral; terminé par six Quarrez égaux, & par douze Triangles isoscèles & égaux entr'eux, dont la hauteur est égale à la base.

PRemièrement, si vous voulez que le Polyëdre s'appuye sur l'un de ses six quarrez égaux, comme 3, 6, 9, 12, son assiete sera telle que vous la voyez dans la Figure, où les demi-cercles Planche 15. Fig. 62.

qui sont décrits des quatre angles droits de la base 3, 6, 9, 12, & des milieux A, B, des deux côtes opposés 5, 2, & 12, 9, font assez connoître la description de ce plan, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

Plan-
che 16.
Fig. 63.
Plan-
che 17.
Fig. 64.

Pour le profil, nous dirons que la hauteur des points 4, 11, 7, 8, 1, 14, est égale à la touchante 7, 15, & que la hauteur des points 5, 6, 13, 12, est double de la précédente, c'est-à-dire, double de la même touchante 7, 15. Après quoi il n'y a plus qu'à regarder la 63. Fig. pour comprendre la manière de représenter ce Polyèdre en perspective, que je vous représente encore tout ombré, & vû d'une autre façon dans la 64. Fig.

Fig. 65.

Secondement, si vous voulez que le Polyèdre soit élevé droit sur l'un de ses angles solides, comme 1, auquel cas son assiete sera le simple exagone régulier 2, 3, 4, 5, 6, 7, dont le centre sera le point 1, & le profil sera tel.

La hauteur des points 8, 9, 10, 11, 12, 13, est égale à la moitié du côté de l'exagone : la hauteur des points 2, 3, 4, 5, 6, 7, est égale au triple de la précédente, c'est-à-dire, à trois moitiés du côté de l'exagone : & la hauteur du point 1 est double du côté de l'exagone, ou égale au diamètre 4, 7.

Plan-
che 18.
Fig. 66.

Je n'enseignerai pas ici la manière de représenter en perspective ce Polyèdre selon son plan & son profil, parce que nous en avons suffisamment parlé dans nôtre *Traité de Perspective*; c'est pourquoi je me contenterai de vous en donner simplement ici la Figure.



PROBLEME X.

Représenter en perspective un Polyëdre équilatéral, terminé par douze Quarrez égaux, par huit exagones réguliers & égaux, & par six octogones réguliers & égaux.

SI vous voulez que la base de ce corps soit l'un Plan-
che 19.
Fig. 68. de ses six octogones, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le centre est O, joignez les extrémités de deux côtes opposez & paralleles par des lignes droites paralleles entr'elles, qui par leurs mutuelles interfections formeront un quarré, comme ABCD. Prolongez les deux côtes opposez & paralleles 1, 2, & 5, 6, & pareillement les deux côtes opposez & paralleles 3, 4, & 7, 8, qui en rencontrant les deux premiers, formeront un autre quarré plus grand EFGH. Après quoi il sera facile d'achever le plan, sçavoir, en faisant la ligne E20 égale à la partie E7, &c.

Pour une description plus exacte de ce plan, on considerera qu'en supposant le rayon O1, ou O2, de 1000 parties égales, le rayon O13, ou O16, du cercle moyen comprend 1514 de ces parties, & que le rayon O12, ou O15, du plus grand cercle en contient 1731. Que le plus petit côté soutient dans le plus grand cercle un arc 11, 12, ou 14, 15, de 25 degrez 32'. dans le moyen un arc 1, 2, de 29 degrez 16'. & dans le plus petit un arc 1, 2, de 45 degrez. Et que le plus grand côté soutient dans le plus grand cercle un arc 14, 11, de 64 degrez 28'. & dans le cercle moyen un arc 10, 13, ou 9, 16, de 60 degrez, 44'. dont la corde est double du plus petit côté 9, 10.

Pour le profil, on donnera toute la ligne 15, 12, à la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont l'assiete est l'octogone intérieur, ou le plus petit octogone régulier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On donnera la partie 15, G, à la hauteur des points 9, 10, 13, 25, 22, 21, 18, 16, dont l'assiete est l'octogone moyen. On donnera la partie 15, 2, à la hauteur des points 14, 11, 12, 24, 23, 20, 19, 15, dont l'assiete est le plus grand octogone. On donnera la partie 15, 1, à la hauteur des points 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, dont l'assiete est le plus grand octogone. Enfin l'on donnera la partie 15, H, à la hauteur des points 40, 41, 28, 29, 32, 33, 36, 37, dont l'assiete est l'octogone moyen.

La hauteur 15, 12, se trouvera de 2930 parties, dont le rayon O1 du plus petit octogone en contient 1000, la hauteur 15, G, est de 2389 semblables parties : la hauteur 15, 2, en contient 1848 : la hauteur 15, 1, en comprend 1082 : enfin la hauteur 15, H, en contient 541

Plan-
che 20.
Fig 70.

Quand on aura mis en perspective le plan de ce Polyèdre terminé par 26 faces, & qu'on aura déterminé la position de ses angles solides suivant leurs hauteurs différentes, que le profil précédent vous donne, on joindra ces angles solides par des lignes droites qui seront les côtes égaux du Polyèdre comme vous voyez dans la Figure, qu'il suffit de regarder pour la comprendre.

Des Miroirs plats.

Ce qu'on va dire des Miroirs plats, doit s'entendre des Miroirs de glaces, quoiqu'on puisse en appliquer une grande partie à ceux de fonte, d'acier, &c.

PROBLEME XI.

Un point de quelque objet , & le lieu de l'œil , étant donnez , trouver le point de réflexion sur la surface d'un Miroir plat.

SOit B un point de l'objet , A l'œil , & le Mi-Plan-
 roir représenté par la ligne CD. Du point B che 10.
 menez à CD la perpendiculaire BD , que vous pro- Fig. 51.
 longerez jusqu'en F , en sorte que DF soit égale à
 DB. Par les points F & A tirez la ligne AF , qui
 coupera CD en E. Ce point E sera le point de ré-
 flexion cherché : de sorte que si l'on tire les deux
 lignes AE , BE , l'angle de réflexion AEC sera
 égal à l'angle d'incidence BED , comme il est aisé
 de le démontrer.

REMARQUE.

Dans nôtre *DiCTIONNAIRE Mathématique* on trou-
 ve ce Problème appliqué à un Miroir Sphérique :
 mais il se peut aisément appliquer au Jeu de Bil-
 lard. Supposons que la ligne CD représente un
 bord du Billard , & qu'aux deux points A , B , du
 tapis ou table du même Billard , il y ait deux bil-
 les , dont l'une , comme A , ne peut être envoyée
 directement contre l'autre B , à cause du Fer qui
 est entre deux. On trouvera le point E , comme il
 vient d'être enseigné , & ce point E sera celui où le
 Joueur envoyera la bille A , afin que par une bri-
 cole elle puisse toucher l'autre bille qui sera en B.
 Mais dans la pratique , cela se peut executer plus
 facilement en cette sorte.

On trouvera , dis-je , le point E , en prolonge-
 Z iiij

geant par la pensée la perpendiculaire BD jusqu'en F , en sorte que la ligne DF soit égale à cette perpendiculaire BD , & ayant mis en F une marque visible, le Joueur poussera sa bille A , selon la ligne AF . Alors cette bille A rencontrant le bord du Billard en E , le réfléchira, & ira rencontrer la bille B ; mais on doit observer de pousser fortement la bille A , pour surmonter les défauts du Billard.

Comme dans ce Jeu il n'est pas toujours facile, ni même permis de mettre une marque visible en F , parce que l'adversaire a la liberté de l'ôter, il faut que le Joueur vise du point F , la bille A , & qu'il remarque par le rayon visuel FA , le point E sur le bord du Billard, où il doit envoyer sa bille pour la faire réfléchir en B .

Plan-
che 10.
Fig. 52.

Si vous voulez trouver le point E de réflexion, pour faire que la bille A rencontre la bille B par deux bricoles, tirez du point A , la ligne AC , parallèle à la ligne DG , & du point B , la ligne BG parallèle à la ligne CD . Cherchez à la somme des deux lignes parallèles AC , GD , à la ligne AC , & à la somme des deux lignes parallèles CD , BG , une quatrième proportionnelle, dont la longueur étant portée en CE , donnera le point E qu'on cherche.

PROBLEME XII.

Tirer par derrière l'épaule un pistolet aussi justement que si on le couchoit en joue.

Plan-
che 11.
Fig. 53.

SOit AB une ligne qui représente le Miroir, & CD la perpendiculaire, menée à ce Miroir de C but où l'on veut tirer. Soit encore D l'image ou apparence de ce but qui paroîtra sur cette per-

PROBLEMES D'OPTIQUE. 361

pendiculaire aussi éloignée au-delà du Miroir , que le but C l'est en-deçà. Soit enfin l'œil placé en E qui regarde le but en D par la ligne de réflexion EFD. Le rayon d'incidence sera la ligne CF , selon laquelle il faut placer le pistolet GH derrière l'épaule , & le tourner de manière que son apparence IK convienne avec la ligne de réflexion EFD , & soit dirigée vers l'apparence D du but C. Le pistolet GH ainsi tourné , regardera directement le but C , & ne manquera point de le frapper , si on lâche le coup.

PROBLEME XIII.

Les points de l'œil & de quelque objet , avec le point de réflexion sur la surface d'un Miroir plan , étant donnez , déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.

SI l'œil est A , l'objet B , & E le point de réflexion sur la surface CD d'un Miroir plan , tirez de l'objet B , la ligne indéfinie BF perpendiculaire à cette surface , & prolongez le rayon de réflexion AE jusqu'à ce qu'il rencontre cette perpendiculaire en un point , comme F ; ou bien faites DF égale à DB. Le point F sera le lieu de l'image de l'objet B , c'est-à-dire , le point où l'objet B sera vû par l'œil A dans le Miroir plan CD. Car l'Optique apprend que l'image d'un objet se fait au concours du rayon de réflexion , & d'une ligne droite tirée de l'objet perpendiculairement à la surface du Miroir , soit que cette surface soit plane , soit qu'elle soit Sphérique.

D'où il est aisé de conclure par l'égalité des angles de réflexion & d'incidence , que quand le

Plan-
che 10.
Fig. 51.

Plan-
che 10.
Fig. 51.

Miroir est plan, comme nous le supposons ici ; l'objet doit être vû aussi enfoncé dans le Miroir, qu'il en est éloigné ; & c'est à cause de cela que nous avons fait la ligne DF égale à la perpendiculaire DB .

Il s'ensuit aussi que la distance AF de l'image F est égale au rayon d'incidence BE , & au rayon de réflexion AE , parce que le rayon d'incidence BE est égal à la ligne EF , à cause de l'égalité des deux Triangles rectangles EDB , EDF .

Il s'ensuit encore que si l'œil A s'approche ou s'éloigne dans le même rayon de réflexion AE du point de réflexion E , d'une certaine quantité, l'image F de l'objet B , sera approchée ou éloignée de l'œil A de la même quantité ; parce que la distance EF demeurant toujours la même, la distance AF croîtra ou décroîtra comme la distance AE .

Il s'ensuit de plus que quand le Miroir plan est parallele à l'horison, comme CD , une grandeur perpendiculaire à l'horison, comme BD , doit paroître renversée ; & que quand le Miroir plan est perpendiculaire à l'horison, la main droite d'une personne lui doit paroître à la gauche de son image, & la gauche à la droite.

Enfin il s'ensuit que la distance de l'œil à l'image de quelque objet vû dans le dernier Miroir par plusieurs réflexions à l'aide de plusieurs Miroirs plans, est égale à la somme de tous les rayons d'incidence & de réflexion, & qu'un objet se peut quelquefois multiplier dans un Miroir plan, lorsqu'il est de verre.

C'est ainsi que l'on voit quelquefois qu'un flambeau allumé paroît double dans un Miroir plan de verre un peu épais, à cause de la double réflexion qui s'y fait, l'une sur la surface extérieure du Mi-

voir , & l'autre sur le fonds du même Miroir. Car la lumière ne se réfléchissant pas toute sur la surface extérieure du Miroir , elle pénètre la glace , & va rencontrer cette feuille d'étain qu'on met derrière , pour empêcher les rayons de passer outre , où elle se réfléchit une seconde fois. L'œil se rencontrant dans le concours des deux rayons de réflexion , qui ne peuvent être parallèles , il ne faut pas s'étonner si on voit l'objet double , ou en deux endroits différens du Miroir. Il est évident que la diverse irrégularité du verre produisant diverses réflexions , peut multiplier davantage l'objet , sur tout lorsqu'il sera vû un peu de côté.

PROBLEME XIV.

Se représenter dans un Miroir comme volant.

IL faut placer une grande glace , de sorte qu'elle fasse un angle demi-droit avec l'horison , ou le plancher d'une chambre. Si on avance vers le Miroir ainsi incliné , & qu'on étende les bras en les agitant , comme les oiseaux font leurs aîles , le corps paroîtra horizontal à la terre , & il semblera voler en l'air : mais il faut porter toute son attention vers sa tête , afin de ne point jeter les yeux sur le pavé , qui est aussi élevé que les pieds.

PROBLEME XV.

Disposer plusieurs Miroirs de maniere qu'on se voye dans chacun en même temps.

ON disposera ces Miroirs à la circonférence d'un cercle , de telle sorte qu'ils conviennent avec les cordes de ce cercle. Pour se voir dans

364 RECREAT. MATH. ET PHYS.
chacun de ces Miroirs , il faut se placer au centre
du cercle.

R E M A R Q U E.

C'est par le moyen de ce Problème qu'on peut
faire voir plusieurs Jets d'eau dans une chambre
Optique , quoiqu'il n'y en ait qu'un.

P R O B L E M E X V I.

*Un mari jaloux étant dans une chambre , lui faire
voir ce que fait sa femme dans une autre chambre ,
l'un & l'autre étant près de la muraille qui sépare
les deux chambres.*

Plan-
che 3 *
Fig. 9.

QUe la figure ABCD représente les deux
chambres où se trouvent le mari & la fem-
me : que EH soit la muraille qui sépare ces deux
chambres : que le mari soit en G , & la femme
en H.

Il faut laisser entre la muraille de séparation &
le plancher une ouverture où l'on puisse placer ho-
rizontalement un Miroir comme E. Il faut encore
en mettre deux autres F & I aux deux murailles
AC , BD , de manière que les rayons qui parti-
ront du point H ayant frappé quelque point du
Miroir I , aillent frapper le Miroir E ; d'où s'étant
réfléchis , ils tomberont sur le Miroir F , & de-là
se réfléchiront en G , où nous avons supposé que
le mari s'étoit posté : il sera témoin de toutes les
actions de sa femme. Il est vrai que s'il ne veut pas
être apperçû , il ne doit point avoir de lumière ,
ou bien il doit fermer les volets des fenêtres de la
chambre où il est , si c'est pendant le jour qu'il
veut satisfaire sa jalousie. Les glaces dont on se

est à présent pour orner les Salons, sont très-commodes pour ce sujet. La lumière ayant été obligée de se détourner à la rencontre des trois Miroirs, s'affoiblira quelque peu.

R E M A R Q U E S.

On pourroit par ce moyen, étant dans une chambre, voir tout ce qui se passeroit dans la rue, si on mettoit le Miroir sur la tablette de la fenêtre, & qu'on le disposât de manière que les rayons des objets qui viendroient frapper le Miroir, pussent se réfléchir dans la chambre. Mais pour n'être point vû, il faudroit fermer les volets des fenêtres, & ne laisser d'espace qu'autant qu'il seroit nécessaire pour laisser passer les rayons des objets qu'on voudroit voir. Si on laissoit le Miroir dans la même disposition pendant la nuit, & que la chambre fût fort éclairée, on pourroit voir de la rue tout ce qui s'y passeroit.

P R O B L E M E X V I I.

Faire paroître dans un Miroir un autre objet que celui qui semble devoir y être représenté.

I.

PLacez une glace de Miroir plus élevée que la hauteur d'un homme, en l'inclinant tant soit peu à l'horison, s'il est nécessaire : mettez quelque objet vis-à-vis de ce Miroir, de manière qu'il semble que les rayons de cet objet ayant frappé le Miroir, dussent être renvoyez à l'œil. Au dessus du premier objet placez un autre objet, qui sera caché par quelque artifice, & dont les rayons pourtant ayant frappé le Miroir, seront réfléchis.

vers les yeux des Spectateurs. Alors le Miroir représentera autre chose que ce qu'il paroît devoir représenter. Si on a placé devant le Miroir un cercle, il représentera un quarré. Ayant mis la statue d'un homme, on verra un lion, ou quelque autre animal; ou bien ayant placé une pendule qui marque une certaine heure, elle paroîtra marquer dans le Miroir une heure toute contraire.

I I.

On placera une grande glace, qui ira assez près du plancher, auquel on fera une ouverture entre des solives, avec assez d'artifice pour que ceux qui sont dans la chambre ne s'en apperçoivent point. On mettra quelque image fort éclairée dans la chambre au dessus, de manière qu'elle puisse être vue dans le Miroir par ceux qui y regarderont. On fera fort étonné de voir ces objets qui ne paroissent point dans la chambre.

Au lieu de mettre l'image dans une chambre au dessus du Miroir, on peut la mettre dans une chambre à côté, en ménageant adroitement une ouverture dans la muraille de séparation.

R E M A R Q U E S.

C'est-là le fondement de ces curiositez d'Optique, qui donnent tant d'admiration aux Spectateurs. Lorsqu'on est dans une chambre entièrement obscure, & qu'on regarde vers un côté où sont placées des glaces, dont on ne s'est point apperçû auparavant, à cause d'un rideau qui étoit au devant: on voit avec étonnement le ciel représenté avec les étoiles, le soleil levant, des mers ou des lacs, des vaisseaux, des tours, des montagnes, des villes, des canons,

dont on apperçoit la lumière , lorsqu'ils tirent pour rendre le salut aux vaisseaux qui passent. On y voit enfin tout ce qu'une adresse ingénieuse peut inventer pour donner un plaisir qui est d'autant plus grand , que l'on ne sçait point d'où viennent tous ces objets : l'esprit inquiet croit que c'est quelque enchantement , quoique ce spectacle agréable ne vienne que du lieu qui est au dessus des Spectateurs.

PROBLEME XVIII.

Faire une boete où l'on voye des objets tout differens de ceux que l'on avoit vû en regardant par une autre ouverture , quoique les uns & les autres paroissent occuper toute la boete.

IL faut faire une boete qui ait plusieurs côtez , Plan. che 3^e Fig. 10. comme celle-ci AEDIHM , qui en a six. On séparera le dedans de la boete en plusieurs cellules par des ais qui iront de chaque angle A , F , E , &c. au centre de la boete G. Il y aura autant de séparations que de côtez : on appliquera à chacun de ces ais des Miroirs plats ; on fera à chaque côté de la boete des ouvertures comme h , i , pour regarder dans les séparations ; on mettra à ces ouvertures des morceaux de verre , dont la face qui sera au dedans de la boete , ne doit point être polie , mais un peu usée , afin qu'on ne puisse pas voir ce qui est dans les cellules. On mettra dans ces cellules ou séparations les objets qu'on voudra : enfin on couvrira le dessus de cette boete d'un parchemin fort mince , pour donner passage à la lumière.

Quand on regardera par une ouverture , on verra les objets de cette cellule représentés dans les Miroirs , & l'on croira qu'ils occupent toute la

boete ; mais en regardant par une autre ouverture on y verra d'autres objets qui paroîtront encore occuper toute la boete , & ainsi des autres.

R E M A R Q U E S.

Pour rendre plus transparent le parchemin qu'on met sur les machines d'Optique , il faut le laver plusieurs fois dans une lessive claire , que l'on changera à chaque fois : on le lavera pour la dernière fois dans de l'eau de fontaine. Enfin on le mettra secher à l'air , en le tenant étendu avec des cloux , ou avec des morceaux de bois.

Si on veut donner de la couleur à ce parchemin , on se servira pour le verd , de verd de gris délayé dans du vinaigre , avec un peu de verd foncé ; pour le rouge , de l'infusion de bois de bresil ; pour le bleu , du suc de jeunes mirtes ; pour le jaune , de l'infusion faite avec des bayes de nerprun cueillies au mois d'Août. On passera de temps en temps un vernis sur le parchemin.

P R O B L E M E X I X.

Faire une machine d'Optique , où il paroitra une gallerie , ou une allée d'arbres , &c. continuée à l'infini.

Cette boete , au lieu d'être poligone , comme celle qu'on vient de décrire , sera quarrée ; on lui donnera environ un pied & demi de face , plus ou moins , selon qu'on le jugera à propos. On appliquera sur chaque face perpendiculaire intérieure des glaces : on fera au milieu d'une des faces une ouverture ronde d'environ un pouce de diamètre ,

mètre , & à cet endroit on ôtera l'étain qui est sur la glace , afin qu'on puisse regarder dans la boete : sur le fond intérieur on mettra tels objets qu'on voudra , comme une galerie , une allée d'arbres , &c. accompagnées de bâtimens superbes , de jardins , de campagnes , de bois & autres ornemens qu'on imaginera : enfin on couvrira cette boete d'un parchemin semblable à celui dont on a parlé dans le Problème précédent. En regardant par l'ouverture du milieu d'une des faces , il semblera que les objets mis au fond de la boete , seront continuez à l'infini. Si c'est une galerie , par exemple , composée de colonnes , on la verra très-longue , & allant toujours en diminuant ; ce qui fait un très-bel effet.

R E M A R Q U E S.

A l'imitation de ces machines d'Optique , on pourroit construire des cabinets revêtus de glaces , dont l'effet rempliroit les Spectateurs d'admiration. On a des glaces assez grandes pour faire ces sortes de cabinets. Ce seroit un ouvrage superbe , & qui mériteroit l'attention des Curieux. Il faudroit au dessus de ces glaces laisser des ouvertures qu'on fermeroit de quarraux de verre , pour donner du jour dans ces cabinets.

Après les Problèmes qu'on vient de proposer , il ne sera point difficile d'imaginer des machines d'Optique , qui seront composées de celles qu'on a décrites , & qui seront très-curieuses , à cause des différens objets vûs de diverses manières , qui surprendront , lorsqu'on les regardera.

Observations diverses sur les Miroirs plats.

I.

Dans un Miroir plat, ce qui est à droite paroît à gauche, & ce qui est à gauche paroît à droite, & lorsqu'on l'éleve au dessus de la tête, les pieds & le pavé paroissent en haut, tandis que la tête paroît en bas.

II.

Si on se regarde la tête dans un Miroir depuis le menton jusqu'au front, l'espace qui comprend cette grandeur prise sur le Miroir, n'est que la moitié de cette grandeur même, c'est-à-dire, de la tête. La même chose arrivera à l'égard de tous les objets qui seront aussi éloignés du Miroir que l'œil en est éloigné.

III.

Si on approche un objet d'un Miroir dont la glace est épaisse, on y remarque deux images; l'une est bien éclairée, & l'autre est représentée avec une lumière plus foible.

IV.

Lorsqu'on approche fort obliquement une bougie allumée de l'extrémité d'un Miroir, & qu'on met l'œil à peu près aussi obliquement à l'extrémité opposée, on apperçoit plusieurs images de la lumière de la bougie, dont les uns sont plus foibles que les autres.

V.

Si on dispose à angles droits deux Miroirs, & qu'on s'approche de l'un en suivant une ligne qui lui soit perpendiculaire, il paroitra que la même

personne se meut en sens contraire. Car dans celui qui est parallele à la personne qui marche, elle paroîtra aller d'un sens comme du Septentrion au Midi; mais dans le Miroir dont elle s'approche, elle paroîtra aller d'un sens contraire, c'est-à-dire, du Midi au Septentrion.

V I.

Si deux Miroirs font un angle obtus un peu plus grand qu'un droit, par rapport à celui qui regarde, il se verra avec un seul œil; mais s'ils font un angle aigu un peu plus petit qu'un droit, il se verra avec trois yeux, deux nez, deux bouches, &c. l'angle des Miroirs étant plus obtus ou moins aigu, on verra d'autres figures grotesques.

V I I.

Si on dispose dans un cabinet de jardin plusieurs Miroirs les uns plus bas & inclinez à l'horison, & les autres plus haut, aussi inclinez à l'horison, ceux qui entreront dans ce cabinet, se verront d'une figure monstrueuse.

V I I I.

Les objets représentez dans un Miroir plat, paroissent autant enfoncez derriere le Miroir, qu'ils en sont éloignez par-devant. Ainsi pour voir un objet qui est dans un petit espace, comme s'il étoit fort éloigné, il faut lui faire faire plusieurs réflexions sur des Miroirs disposez sur les faces d'un poligone.

I X.

Quand on présente quelque écriture à un Miroir, elle paroît d'un sens contraire. S'il y a **ARREST**, les lettres paroissent retournées, &

372 RECREAT. MATH. ET PHYS.
on lit du même sens qu'il faut les mettre dans
les formes des Imprimeries.

PROBLEME XX.

Mesurer une hauteur par réflexion.

I.

Plan-
che II.
Fig. 54.

SI la hauteur est accessible, comme AB , en sorte qu'on puisse approcher de son extrémité B , & connoître de combien on en est éloigné, lorsqu'on est dans un plan horizontal, & au niveau de cette base B ; faites sur ce plan horizontal à une distance connue du point B , un petit creux C , que vous remplirez d'eau. Vous vous éloignerez de ce petit creux, de manière que vous puissiez voir dans l'eau le sommet A de la hauteur à mesurer AB , par le rayon de réflexion CE , qui passe par l'œil que je suppose en E . Mesurez exactement la hauteur de l'œil ED , & la distance CD du point C de réflexion. Nous supposons la hauteur ED de 4 pieds, la distance CD de 3, & la distance BC de 48. Après quoi on dira par la règle de Trois directe, si la distance CD de 3 pieds donne 4 pieds pour la hauteur ED , combien donnera la distance BC de 48 pieds? & l'on trouvera 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche; car en multipliant ensemble les deux derniers termes 4, 48, & en divisant leur produit 192 par le premier 3, il vient 64 pour le quatrième proportionnel.

II.

Mais si la hauteur AB est inaccessible, en sorte qu'on ne puisse pas mesurer actuellement la distance

ce BC, il faudra dans la même plaine faire en ligne droite sur CB prolongée, un autre creux à une distance connue du premier C, comme F, qu'on remplira pareillement d'eau. La même personne s'éloignera encore, de manière qu'elle puisse voir le même sommet A, par le rayon de réflexion FH, qui passe par l'œil que je suppose en H. J'ai dit la même personne, afin que la hauteur de l'œil GH soit la même que la première DE, que nous avons supposée de 4 pieds. Comme nous avons supposé la distance CD de 3, si l'on suppose la distance CF de 32, & la distance FG de 5, en multipliant ensemble les lignes ED, CF, c'est-à-dire, 4, 32, & en divisant le produit 128 par l'excès 2 de la distance FG sur la distance CD, on aura 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche.

R E M A R Q U E.

Si vous voulez connoître la distance BC, sans sçavoir la hauteur AB, multipliez ensemble les deux distances CD, CF, c'est-à-dire, 3 & 32, & divisez leur produit 96 par l'excès 2 de la distance FG, sur la distance CD. Le quotient donnera 48 pieds pour la distance BC.

Des Miroirs Cilindriques & Spheriques.

PROBLEME XXI.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface convexe d'un Miroir Sphérique, étant donnez, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.

S I l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface convexe DEL d'un Miroir

Planche 19.
Fig. 69.

Plan-
che 19.
Fig. 69.

Sphérique, dont le centre est C ; tirez de ce centre C , à l'objet B , la droite BC , qui sera perpendiculaire à la surface du Miroir Sphérique. C'est dans cette ligne BC que sera l'image de l'objet B , sçavoir, au point H , qu'on trouvera en prolongeant le rayon de réflexion AE , qui rencontre ici au dedans du Miroir la cathete d'incidence BC au point H : car il la peut rencontrer au point D de la surface du Miroir, & au dehors, sçavoir, lorsque l'angle d'incidence BEF , ou l'angle de réflexion AEG sera très-petit ; ce qui fait que l'objet B peut être vû au dedans du Miroir Sphérique, comme ici, quelquefois en sa surface, & quelquefois au dehors.

S C O L I E.

La touchante FG qui passe par le point E de réflexion, détermine, comme vous voyez, les angles d'incidence & de réflexion, & coupe la cathete d'incidence BC en I ; de telle sorte que les quatre lignes BC , CD , BI , DI , sont proportionnelles, & que par conséquent la ligne BC se trouve coupée aux points I , D , dans la moyenne & extrême raison proportionnelle, c'est-à-dire, que le rectangle sous toute la ligne BC , & sa partie du milieu DI , est égal au rectangle sous les deux autres parties extrêmes BI , CD , comme on le démontrera aisément, en tirant par le point B , la ligne BK parallèle au rayon de réflexion AE .

Il est évident par la propriété des foyers d'une Ellipse, que les deux points A , B , sont les foyers d'une Ellipse qui touche le Miroir sphérique au point de réflexion E , & qui a pour grand axe la somme des deux rayons AE , BE , de réflexion & d'incidence. Ainsi pour trouver le point de réflé-

xion E , il n'y a qu'à décrire une Ellipse qui touche la circonférence DEL , & dont les foyers soient les deux points A , B : ce qui se peut aisément faire par l'interfection de la circonférence DEL , & d'une hyperbole entre ses asymptotes , dont l'opposée passe par le centre C de la même circonférence DEL , comme nous avons démontré dans notre *Dictionnaire Mathématique*.

Plan-
che 19.
Fig. 69.

Il est évident aussi , que l'apparence H de l'objet B , est plus proche du point de réflexion E , que du centre C : car la ligne CH est toujours plus grande que la ligne EH , puisque l'angle CEH est toujours plus grand que l'angle ECH , comme on le connoîtra en prolongeant vers L le rayon d'incidence BE , & en lui tirant par le centre C , une parallèle MN.

Il est encore évident , que la même apparence H de l'objet B est aussi plus proche du point de réflexion E , ou du point D de la surface du Miroir , que l'objet B , c'est-à-dire , que la ligne EH est moindre que le rayon d'incidence BE , & que la ligne DH est moindre que la cathete d'incidence BD.

Enfin il est évident , que si la grandeur OE est perpendiculaire à la surface du Miroir sphérique DEL , en sorte qu'étant prolongée elle passe par son centre C , le point P plus proche du Miroir , doit paroître moins enfoncé que le point O plus éloigné : & que cette grandeur OE doit paroître renversée & plus petite.

D'où il suit qu'une grandeur doit paroître dans un Miroir sphérique convexe toujours plus grande à mesure qu'elle s'approche du Miroir parallèlement à soi-même , parce qu'alors elle paroît moins enfoncée , & par conséquent plus près de l'œil , &

qu'elle se trouve renfermée dans un plus grand angle. Il arrivera la même chose si l'objet demeure immobile, & que l'œil s'approche du Miroir, parce qu'alors il verra cet objet moins enfoncé dans le Miroir, & par conséquent plus grand, puisqu'il le verra de plus proche.

P R O B L E M E X X I I.

Déterminer le lieu de quelque objet, vû par réflexion sur la surface d'un Miroir cylindrique.

Plan-
che 18.
Fig. 67.

CE Problème est assez difficile, parce qu'un Miroir cylindrique étant pris selon sa longueur, peut être considéré comme un Miroir plan; étant pris exactement selon sa rondeur, il peut être considéré comme un Miroir sphérique: enfin étant pris en tout autre sens, il participe des propriétés d'un Miroir plan & d'un sphérique.

C'est pourquoi si l'œil & le point de quelque objet sont dans un plan qui passe par l'axe du Miroir cylindrique, ce point sera vû par réflexion dans le Miroir cylindrique, comme dans un Miroir plan, je veux dire aussi enfoncé dans le Miroir qu'il en sera éloigné.

Comme si l'on suppose l'œil B & un point A de quelque objet dans un plan qui passe par l'axe CD du Miroir cylindrique EFGH, ce point A sera vû par le rayon de réflexion BIM en M, qui est le point où se rencontrent ce rayon de réflexion & la ligne ALM perpendiculaire à la commune section EH du Miroir & du plan qui passe par l'œil & par le point de l'objet A. Dans ce cas, il est évident que l'objet A paroît aussi enfoncé dans le Miroir, qu'il en est éloigné, c'est-à-dire, que les

lignes AL , LM , font égales entr'elles, à cause des deux Triangles rectangles égaux ALI , MLI .

Mais si l'œil & le point de l'objet sont dans un plan parallele à la base du Miroir cylindrique, comme la section de ce plan & du Miroir est un cercle, l'objet paroîtra dans ce Miroir cylindrique, comme nous avons vû qu'il devoit paroître dans un Miroir sphérique. * D'où il suit que les grandeurs paralleles à la base d'un Miroir cylindrique y paroissent fort racourcies, & que celles qui sont paralleles à l'axe du même Miroir, y paroissent presque de la même grandeur, comme dans un Miroir plan. Cela est encore vrai dans un Miroir Conique, comme il est aisé de le démontrer.

* Problème précédent.

PROBLEME XXIII.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface concave d'un Miroir Sphérique, étant donnez, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.

SI l'œil est A , l'objet B , & E le point de réflexion sur la surface concave FEG d'un Miroir Sphérique, dont le centre est C , tirez de ce centre C , à l'objet B , la droite BC , qui étant prolongée, rencontre ici le rayon de réflexion AE aussi prolongé, au point H , qui sera l'image ou la représentation de l'objet proposé B , parce que ce point H est le concours du rayon de réflexion AE & de la cathete d'incidence CD , tirée du centre C par l'objet B .

Plan: che 203 Fig. 71.

REMARQUE.

Si l'objet avoit été plus près du Miroir, comme

Plan-
che 20.
Fig 21.

en K, son apparence I se seroit trouvée de l'autre côté, sçavoir, au concours du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CI, tirée du centre C par l'objet K. Si l'objet étoit en L, on ne le verroit point du tout, parce que dans ce cas la cathete d'incidence FG, tirée du centre C par l'objet L, ne rencontreroit point le rayon de réflexion AE, ces deux lignes étant paralleles. Enfin si l'objet étoit en M, son apparence N se trouveroit en dehors, sçavoir, au concours du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CN, tirée du centre C par l'objet M.

Par-là on voit la raison de ce que l'expérience nous fait connoître, sçavoir, qu'un objet peut être vû par réflexion dans un Miroir concave, comme dans un convexe, hors de la surface du Miroir, comme est ici le point N, qui est l'image de l'objet M : & en dedans, comme H, qui est l'image de l'objet B, ou I, qui est l'image de l'objet K. Ces deux images H, I, paroissent enfoncées dans le Miroir, mais jamais tant que dans un Miroir plan. Cela vient des différens concours des rayons de réflexion, & des cathetes d'incidence, qui peuvent faire voir les objets quelquefois en la surface du Miroir, quelquefois en dedans, & d'autres fois en dehors & pardevant, plus ou moins loin du Miroir ; de sorte qu'on les voit tantôt entre l'objet & le Miroir, tantôt au lieu même où est l'objet ; ce qui fait que l'on peut manier l'image de la main ou de sa face hors du Miroir : tantôt plus loin du Miroir que l'objet n'en est éloigné ; & tantôt au lieu même où l'œil est placé. D'où il arrive que ceux qui en ignorent la raison, ont peur, & se retirent, quand ils voyent sortir du Miroir l'image d'une épée ou d'une dague, que quelqu'un tient derriere eux.

Il est évident que la touchante OP , qui passe par le point E de réflexion, détermine l'angle d'incidence BEP , & son égal, ou l'angle de réflexion AEO : & que la ligne CE , qui est perpendiculaire à la touchante OP , divise en deux également l'angle AEB fait par les rayons d'incidence & de réflexion. D'où il suit que si on divise en deux également cet angle par une ligne droite, cette ligne droite passera par le centre C du Miroir Sphérique, parce qu'elle sera perpendiculaire à la touchante OP .

Il est aisé de juger que l'objet B peut être vû par réflexion en deux endroits différens, lorsque l'œil est placé en un certain point : car si on mène un rayon d'incidence quelconque BE , avec son rayon de réflexion AE , & un autre rayon d'incidence BQ , avec son rayon de réflexion QR , qui rencontrera le premier en un point, comme A , où l'œil étant mis, il verra l'objet B par les deux rayons de réflexion AE , AQ , & par conséquent en deux endroits différens, sçavoir, aux points H , R , au dedans & au dehors du Miroir.

Il est aussi facile de juger que si l'objet est placé au centre C du Miroir, son image se réfléchit contre lui-même : car dans ce cas l'angle d'incidence est droit. C'est pourquoi celui qui aura l'œil au centre C du Miroir, ne pourra voir autre chose que soi-même.

P R O B L E M E X X I V.

Des Miroirs ardans.

Nous avons vû dans le Problème précédent, que deux rayons de réflexion, qui appartiennent

Voyez
le Probl.
XII. de
Physique.

Plan-
che 20.
Fig. 71.

nent à un même objet, comme AE , AQ , qui appartiennent à l'objet B , s'unissent & se rencontrent au point A , au-devant du Miroir : ce qui n'arrive pas aux Miroirs plans, où les rayons de réflexion s'écartent, & encore moins aux Miroirs convexes, où les rayons de réflexion s'écartant encore davantage, s'unissent au-delà du Miroir. D'où il suit que par leur moyen on ne peut pas produire du feu, comme l'on fait avec un Miroir concave, qu'on appelle pour cela *Miroir ardent*, & qui peut être parabolique ou sphérique.

Il est facile de faire des Miroirs sphériques, parce que le tour peut aisément servir à en faire des modèles, & qu'on peut aisément les polir : mais le tour ne peut pas être mis si facilement en usage, pour faire des modèles qui puissent servir à construire des Miroirs paraboliques ; ce qui fait qu'ils sont très-rares, & qu'ils ne sont pas si bons que les sphériques, quoique selon la Théorie, ils dussent être meilleurs. C'est pourquoi nous parlerons seulement ici des Miroirs sphériques.

Plan-
che 21.
Fig. 72.

Soit donc ABC la surface concave d'un Miroir sphérique bien poli, dont le centre soit D , & un demi-diamètre BD . Soit EF un rayon de lumière parallèle au demi-diamètre BD , qui se réfléchissant par le rayon de réflexion FG , coupera le demi-diamètre BD en un point, comme G , plus proche de la surface du Miroir sphérique, que de son centre, c'est-à-dire, que la ligne BG sera toujours plus petite que la ligne DG , comme on le connoîtra en tirant le demi-diamètre DF , & menant GK perpendiculaire au milieu de DF , le Triangle FGD sera isoscèle : les lignes DG , GF seront plus grandes que DF , égal à DB . Ayant donc ôté DG de part & d'autre, il

restera GF , égal à DG , plus grand que GB . Plan 3

Il est aisé de juger que si de l'autre côté il y a ché 21.
un rayon de lumière HI parallele au même demi- Fig. 72.
diamètre BD , & aussi éloigné de ce demi-dia-
mètre BD que le rayon EF , en sorte que les arcs
 BF , BI , soient égaux, ce rayon HI se réfléchira
par le rayon IG , qui passera par le même point
 G . Si ce rayon de lumière étoit plus ou moins
éloigné du demi-diamètre BD , son rayon de ré-
flexion ne couperoit pas ce demi-diamètre BD au
même point G ; mais en quelque lieu qu'il le cou-
pe, ce point de rencontre sera toujours plus éloi-
gné du centre que de la surface du Miroir. Or,
comme on peut concevoir une infinité de rayons
différens paralleles entr'eux & au demi-diamètre
 BD , & également éloignez du même demi-diamé-
tre BD , il est évident que tous ces rayons doi-
vent se réfléchir en un même point, comme G ,
qu'on appelle *Foyer*. C'est dans ce point qu'on
peut aux rayons du Soleil allumer une bougie,
ou un flambeau, fondre en peu de temps quelque
métail que ce soit, & vitrifier la pierre, quand le
Miroir est un peu grand.

On peut aisément connoître par la Trigono-
métrie la distance de ce Foyer G à la surface du
Miroir, la distance du rayon d'incidence ou de lu-
mière étant connue en degrez, & le demi-diamé-
tre du Miroir étant connu en pieds ou en pouces.
Comme si le rayon d'incidence EF est éloigné du
demi-diamètre BD , par exemple, de 5 degrez,
en sorte que l'arc BF , ou l'angle BDF soit de 5
degrez; & si l'on suppose le demi-diamètre DB ,
ou DF de 100000 parties, on trouvera en ces mê-
mes parties la distance DG , en tirant du Foyer G
la ligne GK perpendiculaire au demi-diamètre DF ,

Plan.
che 21.
Fig. 71.

qui sera divisé en deux également au point K ; ce qui fait que la moitié DK sera de 50000 parties , & en faisant dans le Triangle DKG cette analogie.

| | |
|---------------------------|--------|
| Comme le Sinus total | 100000 |
| A la Secante de l'angle D | 100382 |
| Ainsi la ligne DK | 50000 |
| A la ligne DG | 50191 |

Ce nombre 50191 étant ôté du demi-diamètre BD, ou de 100000, il restera 49809 pour la ligne GB, ou pour la distance du Foyer à la surface concave du Miroir.

C'est de cette manière que nous avons supputé la Table suivante, où l'on voit que le Foyer G s'approche toujours de la surface concave d'un Mi-

| | | | | | | | |
|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|
| 1 | 49992 | 16 | 47985 | 31 | 41668 | 46 | 28022 |
| 2 | 49970 | 17 | 47715 | 32 | 41041 | 47 | 26686 |
| 3 | 49932 | 18 | 47427 | 33 | 40382 | 48 | 25276 |
| 4 | 49878 | 19 | 47269 | 34 | 39689 | 49 | 23787 |
| 5 | 49809 | 20 | 46791 | 35 | 38961 | 50 | 22214 |
| 6 | 49725 | 21 | 46443 | 36 | 38197 | 51 | 20549 |
| 7 | 49625 | 22 | 46075 | 37 | 37393 | 52 | 18787 |
| 8 | 49509 | 23 | 45682 | 38 | 36549 | 53 | 16918 |
| 9 | 49377 | 24 | 45268 | 39 | 35662 | 54 | 14935 |
| 10 | 49229 | 25 | 44831 | 40 | 34730 | 55 | 12828 |
| 11 | 49064 | 26 | 44370 | 41 | 33749 | 56 | 10586 |
| 12 | 48883 | 27 | 43884 | 42 | 32798 | 57 | 8196 |
| 13 | 48685 | 28 | 43372 | 43 | 31634 | 58 | 5646 |
| 14 | 48468 | 29 | 42832 | 44 | 30492 | 59 | 2920 |
| 15 | 48236 | 30 | 42265 | 45 | 29289 | 60 | 0000 |

roir sphérique, à mesure que les rayons d'incidence s'éloignent du centre du Miroir ; de sorte que quand ils en sont éloignés de 60 degrés, le Foyer

G se trouve précisément au point B de la surface concave du Miroir.

On voit aussi dans cette Table, que les rayons d'incidence, depuis un degré jusqu'environ à 15 degrez de distance, s'unissent par réflexion presque en un même point, parce que la distance du Foyer G ne décroît pas sensiblement. Ce qui fait qu'une telle quantité de rayons envoyez du Soleil sur la surface concave d'un Miroir sphérique, qui peuvent passer pour paralleles, à cause de la grande distance du Soleil à la terre, se réfléchit presque en un même point. Par conséquent tous les rayons de réflexion, qui se trouvent compris dans une portion concave de Sphere d'environ 30 degrez, peuvent par leur union produire du feu, comme l'expérience le montre.

On voit encore dans la Table précédente, que le Foyer G est éloigné de la surface concave du Miroir d'environ la quatrième partie du diamètre, ou de la moitié du demi-diamètre DB, & que par conséquent un Miroir concave sphérique doit brûler d'autant plus loin, que son diamètre sera plus grand. Il ne faut pourtant pas croire qu'il puisse brûler à une distance énorme; car outre la difficulté qu'il y auroit à faire un Miroir assez grand, pour produire cet effet, les rayons de réflexion qui s'unissent en un très-petit espace vers G dans un petit Miroir, ne s'uniroient pas si parfaitement dans un grand Miroir; ce qui diminueroit considérablement la force des rayons. Ainsi il n'est pas croiable qu'Archimède se soit servi d'un Miroir concave pour brûler la Flote des Romains à une distance de 375 pas Géométriques, qui reviennent à 1875 pieds.

COROLLAIRE.

Il suit de ce qui a été dit dans ce Problème & dans le précédent, que si l'on met un corps lumineux, comme une chandelle au Foyer G , ses rayons se réfléchiront par des lignes parallèles entr'elles & au demi-diamètre BD : & que si on la met au centre D , ses rayons se réfléchiront contr'eux-mêmes, parce qu'alors ils seront perpendiculaires à la surface du Miroir.

On peut par le moyen d'un semblable Miroir, représenter tels caractères qu'on voudra sur une muraille obscure, pourvû que le Miroir n'en soit pas fort éloigné. On écrira sur la surface concave du Miroir avec de la cire ou autre matière, des lettres renversées, & d'un caractère un peu gros, & on exposera le Miroir au Soleil, de manière que les rayons renvoyez vers la muraille, y fassent paroître les lettres, qui se trouveront dans leur situation ordinaire.

On peut aussi par le moyen du même Miroir, augmenter la lumière dans une grande chambre, en appliquant une bougie allumée au Foyer de ce Miroir; car les rayons de cette bougie se réfléchiront par toute la chambre, & feront une telle clarté, qu'on pourra aisément lire de loin sur les murailles.

Enfin on peut se servir de la même façon de ce Miroir pour s'éclairer la nuit, & voir de bien loin ce qui se passe: il peut être utile à ceux qui veulent conserver leur vûe, en se servant de la lumière d'une lampe mise au Foyer du Miroir, qui doit être placé un peu haut, & à côté, afin qu'il puisse envoyer commodément la lumière de la lampe sur la table où l'on veut lire, ou écrire.

Remarques

Remarques sur les Miroirs concaves.

I.

Les Miroirs ardans se font ordinairement de métal ; la réflexion s'y fait plus facilement , & l'effet en est plus prompt & plus vigoureux. On peut aussi les faire de verre ; la réflexion s'y fera presque aussi-bien , pourvû que le verre soit bien net , & un peu mince , & que l'enduit en soit bon , pour empêcher les rayons d'incidence de traverser & de se briser.

I I.

Pour trouver facilement le foyer d'un Miroir concave , quand il est exposé aux rayons du Soleil , il faut éloigner ou approcher du Miroir une petite pièce de bois , ou de quelqu'autre matière solide , en telle sorte que le disque de lumière qui paroîtra par réflexion contre cette pièce , paroisse le plus petit qu'il sera possible ; car alors la pièce se trouvera au foyer. Ou bien on mettra de l'eau chaude auprès du Miroir du côté de la concavité qui regarde directement le Soleil : la fumée qui sortira de cette eau chaude , fera voir avec plaisir le cone de réflexion , dont la pointe sera le foyer. Ou bien encore on jettera de la poussiere au devant de la concavité du Miroir qui regarde directement le Soleil ; on connoîtra dans cette poussiere , comme dans la fumée , le cone de lumière réfléchié , & par conséquent sa pointe , qui sera le foyer qu'on cherche. On peut même en hyver remarquer ce foyer & tout le cone de réflexion sans poussiere & sans fumée , lorsque l'air sera grossier & condensé par le froid.

III.

Quoiqu'il semble que pour produire du feu par le moyen d'un Miroir concave, il doive être éclairé des rayons du Soleil, afin que la réflexion s'y puisse faire, on peut néanmoins en produire dans un lieu obscur, en renvoyant les rayons du Soleil contre la concavité de ce Miroir par le moyen d'un Miroir plan, qui doit être un peu grand, afin qu'un plus grand nombre de rayons s'unissant au foyer, puisse brûler avec plus de force.

IV.

Vollius remarque dans sa Catoptrique, que Kirker étant à Siracuse, avoit observé que la distance à laquelle les Vaisseaux des Romains auroient dû être brûlez, n'étoit que de trente pas. Quoique cette distance soit bien moindre que celle qu'on a rapporté sur la fin du Problème XXIV. elle est cependant encore assez considérable pour faire douter de la vérité du fait; puisqu'Archimède auroit dû se servir d'une portion de Sphere, dont le diamètre auroit eu plus de 120 pieds. Une telle portion de Sphere auroit fort approché de la figure plate, & par conséquent elle n'auroit pu faire un grand effet. On dit encore que Proclus, par le même artifice qu'Archimède, brûla la Flote de Vitalien qui assiegeoit Bisance: mais la vérité de ces faits est fort incertaine, pour la raison qu'on vient de dire.

V.

Il vaut mieux s'en tenir à ce que dit le même Vollius de quelques Miroirs qui sont très-remarquables. Manfrede Septala, Chanoine de Milan,

avoit un Miroir parabolique, dont le foyer étoit à 15 ou 16 pas, où il brûloit des morceaux de bois. Vilette, Ouvrier de Lyon, avoit fait trois Miroirs, dont les effets rapportez par Volfius, sont très-dignes de remarque; leur foyer étoit assez large, & n'étoit éloigné que de trois pieds. L'un de ces Miroirs fut présenté au Roy de Perse par Tavernier, connu par ses Voiages: l'autre fut acheté par le Roy de Dannemark, & le troisième fut donné au Roy de France. M. Tschirnaus en avoit fait un qui l'emportoit sur tous ceux-là: il étoit composé d'une lame de cuivre, qui n'étoit gueres plus épaisse que deux fois le dos d'une lame de couteau ordinaire: la largeur du Miroir étoit d'environ trois aulnes de Lipfick, & son foyer n'avoit que deux de ces aulnes de distance. Voici quelques-uns de ses effets.

1°. Il mettoit le feu en un moment à un morceau de bois mis à son foyer; la flamme exposée au plus grand vent, ne s'éteignoit point. 2°. Il faisoit bouillir l'eau avec tant de violence, que les œufs qu'on y mettoit étoient bien-tôt cuits, & si on laissoit l'eau un peu de temps, elle s'évaporoit entierement. 3°. Un morceau d'étain ou de plomb présenté au foyer, se fondoit goutte à goutte, & étoit percé en deux ou trois minutes. 4°. Des lames de fer, d'acier, de cuivre, d'argent, &c. devenoient rouges sur le champ, & étoient percées en moins de six minutes. 5°. Les pierres, les briques, & les autres matières qui ne se liquefient point, devenoient rouges comme un fer ardent. 6°. L'ardoise, les tuiles, les morceaux de pots cassez, qui avoient souffert un feu violent, les pierres de pont, les morceaux de creuzet, les os, les motes de terre, se changeoient en verre.

V I.

A l'imitation du Miroir de M. Tschirnaus, un Artisan de Dresde en fit quelques-uns de bois, qui produisoient des effets presque aussi surprenans. Trabere rapporte qu'on peut faire des Miroirs ardans avec des morceaux d'or * ou de verre. On les dispose dans une jatte de bois, creusée en forme de Miroir sphérique: on les y attache avec de la poix mêlée de cire, dont on a enduit également le dedans de la jatte. Zahn rapporte aussi qu'un Ingénieur nommé Neuman, fit * à Vienne en Autriche un Miroir concave, qui étoit composé de carton fort & de paille collez ensemble. Ce Miroir avoit assez de force pour faire fondre toutes sortes de métaux.

* Auro
* en 1699.

V I I.

Il y a du plaisir à regarder dans les Miroirs concaves, sur-tout lorsque ce sont des portions de grandes Spheres. Si on en approche d'assez près, on se voit une face fort large, un nez extrêmement long, de grands yeux, les cheveux & la barbe d'une grosseur considérable; le poil folet y paroît comme une grosse barbe: enfin on remarque sur le visage les moindres taches, & des monticules sur la peau, qui paroît sans miroir la plus unie. Si on s'éloigne du Miroir à une certaine distance, on s'y voit renversé. Si on se met à une autre distance, & qu'on avance la main ou une épée nue, on apperçoit l'image de la main ou celle de l'épée entre soi & le Miroir: il semble qu'on se touche les doigts, & que l'épée même avance vers l'œil, quand on la porte vers le Miroir. Un flambeau présenté derrière la personne qui regarde le Miroir,

paraîtra lui venir brûler le visage. Peut-être y auroit-il quelque plaisir à voir les figures d'un Singe, à qui on présenteroit un Miroir concave, & qui verroit sa pate & son image au dehors.

VIII.

Quand on place l'œil au centre du Miroir concave, on ne voit qu'un grand œil représenté près de la surface du Miroir. Si le Miroir dont on se sert est une portion d'une petite Sphere, on s'y voit d'une figure monstrueuse, avec deux nez, trois yeux, deux bouches, quelquefois avec des yeux qui n'ont qu'une seule paupiere, entre deux nez. On peut examiner ce qui arriveroit, si on enchassoit un Miroir concave entre deux Miroirs plats, &c.

IX.

Si le verre du Miroir est teint de quelque couleur, il la communique à celui qui se regarde; en sorte qu'on se voit pâle, cendré, livide, &c. suivant les couleurs qu'on a donné à la glace du Miroir.

V. les Remarques du Problème XLII.

X.

Il seroit difficile de rapporter toutes les différentes situations où l'on peut placer le Miroir, pour y représenter des figures surprenantes. Je me contenterai de rapporter celle-ci, qui est de placer un Miroir fait d'une portion d'une grande Sphere au haut du plancher, on s'y verra comme pendu en l'air hors du Miroir; la tête paroîtra en haut & les pieds en bas, dans la même situation qu'un pendu.

PROBLEME XXV.

Construire une chambre Optique, où l'on voye les objets plus grands que la boete.

Plan-
che 3 *
Fig. 11.

FAites une boete quarrée ABCDEFG, convenable pour le Miroir concave, dont vous voulez vous servir: il faut que le centre du Miroir tombe hors de la boete, c'est-à-dire, qu'il faut que la largeur AD de la boete soit plus petite que le rayon de la Sphere, dont le Miroir est une portion. Couvrez le dessus de la boete d'un parchemin transparent, comme celui qu'on a décrit au Problème XVIII. ou d'un verre bruni & non poli. * Appliquez à la face interieure ABG un Miroir concave, on doit préférer une portion de grande Sphere: placez à la face intérieure opposée DEFC, quelque image peinte, comme celle d'un homme, d'un bâtiment, &c. ménagez au haut de cette même face en IH une ouverture en long, que vous garnirez d'un verre poli. Lorsque l'on regardera par cette ouverture, on verra la peinture beaucoup plus grande que la boete.

PROBLEME XXVI.

Faire le moule d'un Miroir concave Spherique.

1°. **A**yant pris de la boue desséchée, & l'ayant réduite en poudre, passez-la au tamis, pour en ôter le gravier & les autres ordures.

2°. Détrempez cette poudre tamisée dans de

* On brunira ce verre, en le frottant sur une surface plane avec du menu sable broyé.

l'eau , & étant réduite en bouillie , passez-la par un bluteau , ou tamis.

3°. Prenez de la fiente de cheval & de la bourre , mêlez-la avec cette masse jusqu'à ce que ce composé ne fasse plus qu'un corps d'une certaine consistance. On y peut joindre du poussier ou de la brique bien pilée & passée au crible.

4°. Avec de la pierre qu'on trouve dans les fablonnières , faites deux moules grossièrement ébauchez , dont l'un sera convexe & l'autre concave : puis frottez l'un dans l'autre , jusqu'à ce qu'ils s'emboitent bien ensemble ; & pour y réussir plus aisément , vous aurez soin de mettre entre ces deux moules du sable mouillé , qu'il est bon d'avoir passé auparavant au crible , afin qu'il n'y reste point de gravier , ni de petites pierres , qui pourroient gâter la surface des moules.

5°. Servez-vous d'un rouleau de bois pour étendre sur une table ce lut ou cette masse ci-devant préparée , jusqu'à ce qu'elle ait l'épaisseur que vous voulez donner au Miroir sphérique. Ce lut étant ainsi étendu , vous le soupoudrez de poudre de brique pilée , afin qu'il ne s'attache point au moule convexe , dont vous lui ferez prendre la figure , en le mettant dans ce moule.

6°. Après qu'il sera sec , vous le frotterez de quelque graisse , & le remplirez d'un couvercle fait de la même matière , c'est-à-dire , du même lut.

7°. Ce couvercle étant sec , vous ôterez le lut qui a la figure du Miroir , & qui occupe la place qui est entre le moule de pierre & le couvercle , puis vous frotterez le dedans du moule de pierre d'une composition faite avec de la craie & du lait , & vous mettrez le couvercle dessus.

8°. Mais pour empêcher que ce couvercle ne

tombe au fond du moule de pierre, vous y ferez un rebord, qui s'appuyera sur le bord du moule de pierre, de manière qu'étant posé dans le moule de pierre, il y occupe la même place qu'il occupoit lorsque le moule du Miroir y étoit.

9°. Enfin vous garnirez de fils de fer le dehors du moule de pierre, & vous ménagerez au rebord deux trous, afin que quand on versera la matière du métal par l'un, l'air enfermé entre ces moules, puisse sortir par l'autre.

P R O B L E M E X X V I I.

Faire la composition que l'on employe aux Miroirs de métal.

Prenez huit parties d'un cuivre qui n'ait point encore servi, deux parties d'étain d'Angleterre, & cinq parties de marcassie; faites-les fondre ensemble; puis vous prendrez au bout d'un fer chaud un peu de cette matière fondue; si étant refroidie elle est trop rouge, vous y mettrez un peu d'étain; mais si elle est trop blanche, vous y ajouterez un peu de cuivre, jusqu'à ce que la couleur soit convenable; enfin vous verserez cette matière fondue dans le moule préparé au Problème précédent.

R E M A R Q U E.

On peut encore faire une autre composition avec dix parties de cuivre, quatre parties d'étain d'Angleterre, quelque peu d'antimoine & de sel ammoniac; on remue cette matière fondue avec une baguette ou espatule, jusqu'à ce qu'il en sorte une vapeur, qu'il faut bien prendre garde de respirer, parce que c'est un poison.

PROBLEME XXVIII.

Polir les Miroirs de métal.

Vous ajusterez avec de la poix noire une molette ou poignée de bois au miroir de métal, & vous le frotterez sur le moule rond de pierre, dont on a parlé au Problème XXVI. en y mettant d'abord du sable ou grez broyé & mouillé. Quand le Miroir sera bien frotté, vous n'employerez plus de grez; cependant vous frotterez jusqu'à ce que vous le voyez propre à être poli. Alors vous laisserez secher le moule rond de pierre, & quand il sera sec, vous l'envelopperez d'un papier blanc, sur lequel vous mettrez du tripoli & de la potée d'étain: vous frotterez le Miroir jusqu'à ce qu'il soit bien poli.

REMARQUE.

On polit de la même manière les Miroirs de verre; mais il faut les froter dans le moule creux.

Du Sable ou Grez.

Le sable ou grez dont on a parlé dans les Problèmes précédens, & dont on se sert principalement pour travailler le verre & le polir, est fait avec des morceaux de meules à aiguiser. On les broye pour les réduire en poudre: on doit avoir trois ou quatre sortes de cette poudre, qui auront chacune leur degré de force, pour les employer selon la qualité de l'ouvrage qu'on veut faire. On les sépare fort commodément de cette sorte: on met tout le grez broyé dans un grand vaisseau plein d'eau, que l'on remue beaucoup

pendant quelque temps ; on le laisse un peu reposer ; pendant ce temps tout le plus gros va au fond. Alors inclinant promptement ce vaisseau, on verse toute l'eau encore trouble dans un autre ; on laisse aussi reposer cette seconde eau un peu de temps, puis on verse cette eau dans un troisième vaisseau, & ainsi de suite : de cette manière on a le grez qui se trouve au fonds des vaisseaux dont on a versé l'eau, & ces différens grez ont des degrez de force différens, suivant le nombre des vaisseaux où l'on a reçu ces eaux troubles, qu'on a laissé reposer. On conserve ces diverses sortes de grez dans des vaisseaux séparés.

De Tripoli.

Le Tripoli est une pierre ou espèce de terre ; le meilleur est celui qui vient d'Allemagne, & celui qu'on tire d'une montagne près de Rennes en Bretagne : mais le Tripoli qu'on apporte d'Auvergne n'est pas si estimé : de quelque endroit qu'il vienne, il faut choisir le plus léger. On peut employer le Tripoli tel qu'on le tire de la terre sans autre préparation, lorsqu'il a de bonnes qualitez. La seconde manière de préparer le Tripoli, est de le broyer en le détrempant avec de l'eau de vie, ou à son défaut avec du vin blanc, & d'en mettre une certaine quantité dans un vaisseau de verre bien bouché. Quand ce Tripoli sera resté quatre ou cinq mois dans ce vaisseau, il sera fort adouci : on en prendra ce qu'on jugera à propos pour en faire de petites masses, qu'on laissera sécher à l'ombre. On s'en sert à sec, quoiqu'on puisse aussi l'employer tel qu'on le retire du vaisseau où il aura été gardé,

La troisième manière de préparer le Tripoli , sert à l'adoucir extrêmement , & à augmenter sa qualité déterfivè. On emplit de Tripoli deux creuzets , que l'on met l'un sur l'autre : on les lute bien , tant à leur jointure que tout à l'entour ; ensuite on laisse sécher le lut à l'ombre , afin qu'il ne se fende point. On met ces creuzets dans un four de Boulanger , où les ayant enterré dans la braise , on les laisse au moins pendant deux jours. C'est un excellent Tripoli , qui peut être employé sec ou détrempé.

De la Potée d'Étain.

Il y a deux sortes de Potée d'Étain , l'une qui est blanche , & l'autre qui est grise. Celle-ci se fait avec des ratures d'étain qu'on jette dans de l'eau forte , où elle se précipite , & se résout en une poussière grisâtre & très-subtile , mais cependant plus grossière que la blanche.

La Potée blanche se fait de cette manière. On met de l'étain fin d'Angleterre dans un pot de terre qui puisse résister au feu : on couvre ce pot , & on le lute avec de la terre de Potier bien cotroyée & mêlée avec de la bourre. On laisse sécher ce lut , puis on met le pot dans un four de Potier de terre , avec les autres vaisseaux ; on l'y laisse jusqu'à ce qu'il soit refroidi de lui-même. Cela étant fait , on trouve dans le pot une Potée très-blanche , qui n'est que l'étain parfaitement calciné. Voyez la Dioptrique Oculaire du P. Cherubin d'Orleans , p. 353. & 354

Des Spheres de verre , propres à produire du feu aux rayons du Soleil.

ON peut encore produire du feu aux rayons du Soleil avec une Sphere de verre , de cristal , ou de quelqu'autre matière qui puisse facilement être pénétrée par la lumière , comme avec de l'eau renfermée dans une bouteille bien ronde , ou avec une Sphere de glace. Ce feu n'est pas produit par réflexion , mais par réfraction , qui peut aussi assembler en un point plusieurs rayons de lumière paralleles entr'eux. Ces rayons en entrant dans la Sphere , se brisent en s'approchant de la perpendiculaire , & en sortant de la Sphere ils se brisent de nouveau en s'écartant de la perpendiculaire. Ce qui les fait approcher du diamètre de la Sphere qu'ils rencontrent en dehors dans un point qui est le foyer ; mais l'effet n'est pas si prompt , ni si vigoureux que dans un Miroir ardent.

P R O B L E M E XXIX.

Trouver le Foyer d'une Sphere ou Boule de verre.

Plan-
che 21.
Fig. 73.

SOit BCD une Sphere ou Boule de verre , dont le centre soit F , & CD un diamètre. Soit un rayon de lumière ou d'incidence AB , qui rencontrant la surface de la Boule de verre en B , la pénètre , & entre dedans : mais au lieu de continuer selon la ligne droite ABH , comme il arriveroit , s'il ne rencontroit aucune résistance , il se brise en ce point B , (lequel à cause de cela est appelé *point de réfraction*) & en s'approchant de la perpendiculaire GBF vers le centre F , il

continue selon la ligne BI. Cette ligne BI étant ^{plan} prolongée, rencontre le diamètre CD, aussi pro- che 21: longé au point E, qui seroit le foyer, si le rayon Fig. 73: brisé BI ne se brisoit de nouveau au point I, par la ligne IO, qui en s'écartant de la perpendiculaire IL, va rencontrer le diamètre CD au point O, qui est le foyer.

Avant que d'enseigner à trouver ce foyer O, ou sa distance DO à la surface de la Boule de verre, nous expliquerons ici quelques termes & quelques propriétés des angles brisés & des angles de réfraction dans le verre, qui ne sont pas les mêmes dans les autres corps diaphanes, comme l'expérience le fait connoître.

Si la ligne AB est un *rayon d'incidence* la droite BI s'appelle *rayon de réfraction*, & l'angle HBI se nomme *angle de réfraction*. La droite BG, qui est perpendiculaire à la surface de la Boule, s'appelle *axe d'incidence*. La ligne BF, qui passe par le centre, & qui n'est que la ligne BC prolongée, se nomme *axe de réfraction*.

Le plan qu'on imagine par le rayon d'incidence AB, & par le rayon de réfraction BI, s'appelle *plan de réfraction*: il est toujours perpendiculaire à la surface de la Boule qu'on nomme *surface rompante*, parce que le rayon d'incidence se brise au point où il rencontre cette surface. Il est évident que le plan de réfraction passe par les axes d'incidence & de réfraction, & qu'il contient l'angle de réfraction HBI, l'angle IBF, qu'on appelle *angle brisé*, & l'angle ABG, qui se nomme *angle d'inclinaison*, lequel est toujours égal au complément de l'angle d'incidence ABP.

L'angle brisé croît ou décroît à mesure que l'angle d'inclinaison est plus grand ou plus petit;

Plan-
che 21.
Fig. 73.

de sorte que quand l'un de ces deux angles est nul, l'autre angle est aussi nul. Comme si la perpendiculaire BG est un rayon d'incidence, l'angle d'inclinaison sera nul; ce rayon d'incidence GB en pénétrant le verre, ne se brisera point, mais continuera en ligne droite vers le centre F; ce qui fait que l'angle brisé est aussi nul. Ainsi vous voyez que lorsque le rayon d'incidence est perpendiculaire à la surface rompante, il ne se fait aucune réfraction, parce qu'il n'y a aucune raison pour laquelle cette réfraction se doive faire plutôt d'un côté que d'un autre.

Quoique l'angle brisé croisse à mesure que l'angle d'inclinaison augmente, néanmoins il ne croît pas de la même façon, c'est-à-dire, que si l'angle d'inclinaison augmente, par exemple, d'un degré, l'angle brisé n'augmentera pas aussi d'un degré. Mais cette augmentation est telle, que les Sinus des angles d'inclinaison dans un même milieu sont proportionnels aux Sinus de leurs angles brisés dans un autre milieu plus facile ou plus difficile à pénétrer: de sorte que le Sinus d'un angle d'inclinaison est au Sinus de son angle brisé, comme le Sinus d'un autre angle d'inclinaison est au Sinus de son angle brisé. C'est pourquoi si l'on a une fois connu par expérience un angle brisé pour quelque angle d'inclinaison que ce soit, il sera facile de connoître par supputation les angles brisés pour tous les autres angles d'inclinaison.

Parce que les deux lignes AH, CD, sont parallèles, l'angle E est égal à l'angle de réfraction HBE: & parce que dans tout Triangle rectiligne les Sinus des angles sont proportionnels à leurs côtés opposés, on connoît que le Sinus de l'angle brisé EBF, est à son côté opposé EF, comme

le Sinus de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaison ABG, au rayon de réfraction BE. Et comme on a reconnu par expérience, que lorsque la Boule BCD est de verre, le Sinus de l'angle brisé EBF est au Sinus de l'angle d'inclinaison ABG, ou BFC, comme 2 est à 3, il s'ensuit que si la ligne EF est de 200 parties, le rayon de réfraction BE en doit contenir 300. Ainsi on peut facilement trouver par la Trigonométrie l'angle E, ou l'angle de réfraction HBE, l'angle brisé EBF, & le demi-diamètre BF, lorsque l'on connoît l'angle d'inclinaison ABG, ou son égal BFC, dans le Triangle obliquangle BFE, où trois choses sont connues, sçavoir, le côté BE de 300 parties, le côté EF de 200, & l'angle BFE, qui est le reste à 180 degrez de l'angle BFC, qui est égal à l'angle d'inclinaison ABG, que l'on suppose connu.

Supposons que l'angle d'inclinaison ABG soit de 10 degrez, auquel cas l'angle BFE sera de 170 degrez, & qu'on veuille trouver l'angle brisé EBF, on fera cette analogie,

| | |
|---------------------------------------|-------|
| <i>Comme le côté BE</i> | 300 |
| <i>Au Sinus de l'angle opposé BFE</i> | 17365 |
| <i>Ainsi le côté EF</i> | 200 |
| <i>Au Sinus de l'angle brisé EBF</i> | 11577 |

qui se trouvera d'environ 6. 39'. & qui étant ôté de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaison ABG, que nous avons supposé de 10 degrez, donnera 3. 21'. pour l'angle de réfraction HBE, ou pour l'angle E, qui servira à trouver le demi-diamètre BF, par cette analogie,

Plan-
che 21.
Fig. 73.

| | |
|--------------------------------------|-------|
| <i>Comme le Sinus de l'angle BFE</i> | 17365 |
| <i>A son côté opposé BE</i> | 300 |
| <i>Ainsi le Sinus de l'angle E</i> | 5843 |
| <i>A son côté opposé BE</i> | 101 |

Mais si le demi-diamètre BF est déjà connu, comme s'il avoit 100 parties, on trouvera dans les mêmes parties la ligne EF, en faisant dans le même Triangle BEF, cette analogie,

| | |
|---------------------------------------|-----|
| <i>Comme le demi-diamètre BF</i> | 101 |
| <i>A la ligne EF</i> | 200 |
| <i>Ainsi le même demi-diamètre BF</i> | 100 |
| <i>A la même ligne EF</i> | 198 |

à laquelle ajoutant le demi-diamètre FC, ou 100, on aura 298 pour la ligne CF.

C'est de cette manière qu'on a supputé la Table suivante, où l'on trouve vis-à-vis de l'angle d'in-

| ABG | EBF | HBE | CE | ABG | EBF | HBE | CE |
|-----|------|------|-----|-----|-------|------|-----|
| 1 | 0.40 | 0.20 | 300 | 11 | 7.18 | 3.42 | 297 |
| 2 | 1.20 | 0.40 | 300 | 12 | 7.58 | 4.2 | 297 |
| 3 | 2.0 | 1.0 | 300 | 13 | 8.38 | 4.22 | 297 |
| 4 | 2.40 | 1.20 | 300 | 14 | 9.16 | 4.44 | 296 |
| 5 | 3.20 | 1.40 | 300 | 15 | 9.56 | 5.4 | 295 |
| 6 | 4.0 | 2.0 | 299 | 16 | 10.35 | 5.25 | 295 |
| 7 | 4.40 | 2.20 | 299 | 17 | 11.14 | 5.46 | 294 |
| 8 | 5.19 | 2.41 | 298 | 18 | 11.53 | 6.7 | 293 |
| 9 | 5.59 | 3.1 | 298 | 19 | 12.32 | 6.28 | 292 |
| 10 | 6.39 | 3.21 | 298 | 20 | 13.11 | 6.49 | 292 |

clinaison ABG, la quantité de l'angle brisé EBF,
&

& de l'angle de réfraction HBE, avec celle de la ligne CE; le diamètre CD de la Sphere de verre étant supposé de 200 parties.

Planche 27.
Fig. 73.

Nous n'avons pas prolongé cette Table au-delà du vingtième degré d'inclinaison, parce qu'elle suffit pour faire voir en quelle proportion la ligne CE décroît; car elle décroît fort lentement, étant par tout à peu près égale à trois demi-diamètres, puisque la plus grande différence n'est qu'environ la vingt-cinquième partie du diamètre; ce qui fait que la ligne DE est presque égale au demi-diamètre de la même Sphere, c'est-à-dire, à la ligne DF.

Cette ligne DE, qui se trouve de 92 parties pour un angle d'inclinaison de 20 degrés, comme on le connoît en ôtant CD de CE, ou 200 de 292, servira à trouver le foyer O. Mais il faut remarquer auparavant que l'angle brisé EBF est presque double de l'angle de réfraction HBE, & que cet angle de réfraction HBE est à peu près égal à la troisième partie de l'angle d'inclinaison ABG, comme on le voit sans peine dans la Table précédente.

Pour trouver le foyer O, on considèrera que puisque les lignes DE, DF, sont presque égales, les angles IEF, IFE, sont à peu près égaux; ce qui fait que l'angle EIL, qui leur est égal, est presque double de chacun, & par conséquent de l'angle E. Cela étant supposé, si on considère la ligne OI comme un rayon d'incidence, en sorte que l'angle OIL soit un angle d'inclinaison: alors la ligne IB sera un rayon de réfraction, l'angle OIE sera un angle de réfraction, & l'angle EIL un angle brisé. On connoîtra aussi que cet angle brisé EIL est double de l'angle de réfraction

Plan-
che 21.
Fig. 73.

EIO, comme nous avons remarqué auparavant.
D'où il suit que les deux angles E, EIO, sont égaux entr'eux, & que par conséquent les lignes OE, OI, sont aussi égales entr'elles. Et parce que la ligne OI est presque égale à la ligne OD, la ligne OE sera aussi presque égale à la ligne OD. Ainsi le foyer O est à peu près au milieu de la ligne DE, & par conséquent la ligne DO est égale à la moitié de la ligne DE, ou du demi-diamètre DF. Si donc on prend sur le diamètre prolongé la ligne DO égale à la moitié du demi-diamètre DF, ou au quart du diamètre CD, on aura en O le foyer qu'on cherche.

REMARQUES.

L'angle EBF, qui est un angle brisé à l'égard du rayon d'incidence AB, qui sortant de l'air pour entrer dans le verre, se brise par la ligne BE, qui est un rayon de réfraction, devient un angle d'inclinaison à l'égard du rayon d'incidence IB, qui sortant du verre pour entrer dans l'air, se brise réciproquement par la ligne AB, qui sera un rayon de réfraction. Et comme cet angle EBF est double de l'angle de réfraction HBE, on voit que lorsqu'un rayon d'incidence sort du verre pour entrer dans l'air, l'angle d'inclinaison est double de l'angle de réfraction; ce qu'il est bon de remarquer, parce que cela nous servira pour le Problème suivant.



Des Lentilles de verre , propres à produire du feu aux rayons du Soleil.

LEs Lentilles de verre qui servent à produire du feu , étant exposées directement aux rayons du Soleil , peuvent être plates d'un côté & convexes de l'autre , comme un segment de Sphere ; ou bien convexes des deux côtés , comme les lunettes des vieillards , & les microscopes qui grossissent extraordinairement les objets , & servent à découvrir les moindres parties & plus petits corps de la nature ; ou bien convexes d'un côté & concaves de l'autre : celles-ci ne sont pas si utiles que les autres , parce qu'elles ne peuvent servir à produire du feu que quand leur convexité est tournée directement au Soleil ; car lorsque leur concavité regarde le Soleil , les rayons de réfraction au lieu d'être *convergens* , deviennent *divergens* , c'est-à-dire , qu'ils s'écartent les uns des autres ; ce qui les empêche de s'unir , & de produire du feu , comme nous ferons voir dans la suite.

P R O B L E M E X X X.

Trouver le foyer des Lentilles de verre convexes d'un côté & planes de l'autre , faites en forme de segment de Sphere.

I.

EXposons premièrement au Soleil la surface plane FC de la Lentille de verre FBC , dont la convexité FBC a son centre E dans l'axe d'incidence EBH , qui divise l'arc FBC en deux également au point B , & sa corde FC aussi en deux également au point I. C'est aussi dans cet axe EH que

Plan-
che 21.
Fig. 74.

C c ij

Plan-
che 21.
Fig. 74

se trouve le foyer H de tous les rayons d'incidence qui lui sont parallèles, & par conséquent perpendiculaires à la surface plane FC. Ce foyer H, ou sa distance BH depuis la convexité du Miroir, se déterminera en cette sorte.

Soit un rayon d'incidence DA, lequel étant parallèle à l'axe d'incidence EH, tombera sur la surface plane FC à angles droits, & la traversera par conséquent sans se briser; mais étant parvenu au point A de la surface convexe, il se brisera en sortant du verre; & au lieu d'aller droit en G, il se détournera par le rayon de réfraction AH, qui coupera l'axe d'incidence EH au point H, où tous les autres rayons d'incidence parallèles au rayon DA, s'uniront par réfraction, pourvu néanmoins que l'arc BC ou BF ne soit pas plus grand que 20 degrés; car les rayons de réfraction ne s'uniroient pas au même point H, mais plus près du point B, si ces arcs étoient plus grands que 20 degrés, comme on l'a vû dans le Problème précédent. Ainsi le point H sera le foyer, parce que c'est le lieu où les rayons du Soleil s'unissant par réfraction, peuvent produire du feu.

Cela étant supposé, on considérera que l'angle d'inclinaison DAE, ou son égal AEH étant double de l'angle de réfraction GAH, ou AHE son égal, comme nous avons vû au Problème précédent, le Sinus de l'angle AEH sera presque double du Sinus de l'angle AHE, à cause de la petitesse de ces angles. Mais parce que dans un Triangle rectiligne les côtes sont proportionnels aux Sinus de leurs angles oppozés, le côté AH, sera aussi presque double du côté AE, & comme le côté AH approche d'être égal à la ligne BH, il s'ensuit que la distance EH du foyer H à la surface convexe

FBC est presque double du demi-diamètre AE, ou BE, que par conséquent toute la distance EH est à peu près triple de ce demi-diamètre.

II.

Mais si l'on tourne la partie convexe FBC vers le Soleil, le rayon DA, & tous les autres parallèles à l'axe d'incidence EB, se briseront deux fois avant que de s'unir au point K, qui sera le foyer; une fois en entrant dans le verre par la ligne AH, qui s'approche de la perpendiculaire EAO, & une seconde fois en sortant du verre par la ligne LK, qui s'écarte de la perpendiculaire LM.

Plan-
che 2.
Fig. 75.

Il est évident par ce qui a été dit au Problème précédent, que dans la première réfraction l'angle d'inclinaison DAO, ou AEB, est triple de l'angle de réfraction GAH, ou AHE, & que par conséquent la ligne AH est triple du demi-diamètre EA. Mais parce que la ligne AH est presque égale à la ligne BH, cette ligne BH sera aussi presque triple du même demi-diamètre AE, ou BE, comme auparavant: ce qui fait connoître que le foyer seroit en H, s'il n'y avoit qu'une réfraction; mais comme il y en a deux,

Il est évident aussi par la remarque du Problème précédent, que dans la seconde réfraction HLM, ou KHL est double de l'angle de réfraction KLH; par conséquent la ligne KL est double de la ligne KH. Et parce que la ligne KL est presque égale à la ligne KB, lorsque la Lentille BI est fort mince, comme nous la supposons ici, cette ligne KB est aussi presque double de la ligne KH; par conséquent toute la ligne BH est à peu près triple de la ligne KH. Mais nous avons reconnu que la même ligne BH est aussi triple

du demi-diamètre BE ; il s'ensuit donc que ce demi-diamètre BE est égale à la ligne KH , & par conséquent la ligne KB est double du demi-diamètre BE , ou égale à tout le diamètre. Si donc on porte le demi-diamètre EB depuis le centre E en K , ce point K sera le foyer qu'on cherche.

PROBLEME XXXI.

Trouver le foyer des Lentilles de verre , convexes des deux côtez.

Plan-
che 21.
Fig. 76.

POUR trouver le foyer de la Lentille de verre ABCD , dont l'axe EI passe par le centre E de la convexité ADC , & par le centre F de la convexité ABC , tirez un rayon quelconque d'incidence GH parallèle à l'axe EI , & ayant pris sur cet axe la ligne BI triple du demi-diamètre BF , menez la droite HI , qui donnera le point K de la seconde réfraction. Par ce point K tirez du centre E la droite EKM , qui sera perpendiculaire à la surface rompante ADC. La ligne IK étant considérée comme un rayon d'incidence , l'angle IKM sera un angle d'inclinaison , lequel est double de l'angle de réfraction , comme il a été remarqué au Problème précédent : si donc on fait en K l'angle IKL égal à la moitié de l'angle IKM , on aura en L le foyer qu'on cherche , à l'égard de la convexité ABC exposée au Soleil.

REMARQUE.

Lorsque les demi-diamètres ED , BF , seront égaux entr'eux , c'est-à-dire , lorsque les convexitez ABC , ADC , seront des portions égales de

la superficie d'une même Sphere, le foyer se trouvera à peu près au centre F de la convexité ABC exposée au Soleil, ou au centre E de la convexité ADC tournée vers le Soleil. Mais soit que les demi-diamètres ED, BF, soient égaux ou inégaux, la distance du foyer L sera toujours la même, en tournant vers le Soleil celle qu'on voudra des deux convexitez ABC, ADC.

PROBLEME XXXII.

Trouver le foyer des Lentilles de verre, convexes d'un côté, & concaves de l'autre.

I.

LE foyer d'une semblable Lentille se trouve, Plan-
che 21.
Fig. 77. comme dans la précédente, lorsque sa convexité regarde le Soleil. Mais il y a une méthode abrégée pour le trouver, quand le diamètre de la concavité est triple de celui de la convexité. Alors le foyer se trouve éloigné d'un diamètre & demi, ou de trois demi-diamètres de la convexité, que nous supposons tournée vers le Soleil, c'est-à-dire, qu'il est au centre de la concavité, en considérant l'épaisseur de la Lentille comme très-petite.

Proposons la Lentille de verre ABCD, telle que le demi-diamètre EB de la convexité ABC, qui est exposée au Soleil, soit la troisième partie du demi-diamètre FD de la concavité ADC. Cela étant, je dis que tous les rayons d'incidence parallèles à l'axe BF, comme GH, s'uniront par réfraction au centre F de la concavité ADC : car ce rayon GH traversant le verre, se brisera par la droite HI, qui étant continuée passeroit par le point F, éloigné de la convexité ABC de trois

demi-diamètres , comme on l'a vû auparavant. Mais ce rayon de réfraction HF se trouvant perpendiculaire à la surface concave ADC , ne se brisera point en I , lorsqu'il sortira du verre ; il continuera directement vers le point F , lequel par conséquent sera le foyer qu'on cherche.

II.

Plan-
che 21.
Fig. 7 &

Mais si l'on tourne la concavité vers le Soleil , le foyer se trouvera de même que dans les articles précédens. On pourra aussi le trouver par une méthode plus courte , lorsque le demi-diamètre AB de la concavité sera la troisième partie du demi-diamètre CD de la convexité. Dans ce cas , le foyer se trouvera au centre C de la convexité , lorsque l'épaisseur BD de la Lentille ne sera pas considérable ; ce qu'il faut toujours supposer , comme on le connoîtra par un raisonnement semblable au précédent. Mais on ne peut tirer aucune utilité d'une telle Lentille exposée au Soleil , puisque ses rayons de réfraction s'écartent , au lieu de s'unir. Ainsi le point C n'est appelé foyer qu'improprement , parce que les rayons de réfraction ne peuvent pas s'assembler en ce point , qui est du côté du Soleil ; mais ils s'écartent par des lignes qui tendent à se réunir en ce point.

REMARQUES.

I.

Ce foyer C , qui ne peut servir à produire du feu , est appelé *foyer virtuel* , pour le distinguer du *foyer véritable* , où les rayons du Soleil s'unissant par réfraction , peuvent produire du feu.

On peut trouver ce foyer véritable par cette

analogie , qui suppose que l'épaisseur de la Lentille , dont la convexité regarde le Soleil , est très-petite.

*Comme la différence des demi-diamètres de la concavité & de la convexité ,
Au demi-diamètre de la convexité ;
Ainsi le diamètre de la concavité ,
A la distance du foyer à la Lentille.*

I I.

Dans une Lentille convexe des deux côtez , le foyer qui est toujours véritable , se peut trouver par cette analogie , qui comme la précédente , suppose que l'épaisseur de la Lentille est très-petite.

*Comme la somme des demi-diamètres des deux convexitez ,
Au demi-diamètre de l'une des convexitez ;
Ainsi le diamètre de l'autre convexité ,
A la distance du foyer à la Lentille.*

I I I.

Cette analogie servira aussi à trouver le foyer d'une Lentille concave des deux côtez ; mais comme ce foyer n'est que virtuel dans cette espèce de Lentilles , aussi-bien que dans celles qui sont plates d'un côté , & concaves de l'autre , nous n'en parlerons pas davantage.

I V.

Si l'on fait une Lentille de verre ABCG , concave d'un côté , & convexe de l'autre , en sorte que la convexité ABC soit la surface d'une portion de Spheroïde produit par la circonvo-
Plan-
che 21.
Fig 79.

Plan-
che 21.
Fig. 79.

410 RECREAT. MATH. ET PHYS.
de l'Ellipse ABCD, autour de son grand axe BD, qui soit à la distance EF des deux foyers E, F, de l'Ellipse, comme 3 est à 2, & dont la concavité AGC ait pour centre le foyer E; en exposant cette Lentille aux rayons du Soleil, en sorte que sa convexité ABC regarde directement le Soleil, tous les rayons d'incidence qui seront paralleles au grand axe BD, s'uniront par réfraction au foyer E, lequel par conséquent sera le foyer véritable de cette Lentille Spherico-Elliptique. Sa convexité se peut aussi faire hyperbolique; mais cela est trop spéculatif pour des Récréations Mathématiques. Voyez la Dioptrique du Pere Dechales.

V.

Ce seroit ici le lieu de parler des grands Verres ardens de M. Tschirnaus, & principalement de celui que ce Gentilhomme Saxon a vendu à M. le Duc d'Orleans; mais il trouvera sa place dans les Problèmes de Physique, où l'on aura encore occasion de parler des Lentilles & de leurs effets. On ajoutera cependant quelques effets de ces Verres, dont il est fait mention dans les Actes de Sçavans de l'année 1697. page 415 & suivantes. Le bois le plus dur, humecté même d'eau, mis à leur foyer, prend feu en un moment; l'eau boult aussi-tôt qu'elle y est présentée, pourvû qu'elle soit contenue dans un petit vase; les métaux se fondent; les briques, la pierre de ponce, la porcelaine d'Hollande & l'asbeste se changent en verre; le soufre, la colophane, la poix & les autres matières de même nature, se liquéfient en eau; les charbons & les cendres se vitrifient: en un mot, tout ce qu'on présente au foyer de ces Verres ardens se fond, ou se change en chaux, ou s'évapore dans l'air.

Comme ces Lentilles sont fort grandes , on a soin , pour faire ces expériences , d'ajouter une petite Lentille vers le foyer de la grande , afin de rassembler en un espace plus proche les rayons rompus.

P R O B L E M E X X X I I I.

Représenter dans une chambre fermée les objets de dehors avec leurs couleurs naturelles , par le moyen d'une Lentille de verre convexe des deux costez.

AYant fermé la porte & les fenêtres de la chambre , en sorte que toutes les avenues soient bouchées à la lumière , excepté un petit trou que l'on fera à une fenêtre qui réponde sur quelque place fréquentée , ou sur quelque beau jardin , si cela se peut ; appliquez à ce trou une Lentille de verre convexe des deux côtez , qui ait fort peu d'épaisseur , afin que son foyer soit plus éloigné , comme un verre des lunettes dont se servent les vieillards. Alors les images des objets de dehors , qui passeront au travers de ce verre étant reçues sur un linge blanc tendu à plomb , ou sur un carton bien blanc placé au foyer du même Verre , y paroîtront avec leurs couleurs naturelles , & même plus vives que le naturel , sur tout lorsque le Soleil les éclairera. Il ne faut point que le Verre soit exposé au Soleil , parce que la trop grande lumière frappant le Verre , empêcheroit de discerner avec plaisir les images des objets extérieurs , qui sans cela s'y distingueront d'une telle manière avec leurs mouvemens , que l'on pourra sans peine discerner les hommes d'avec les animaux qui passeront , &

même un homme d'avec une femme , remarquer les oiseaux qui voleront en l'air , & connoître s'il y a du vent par le tremblement des herbes ou des feuilles des arbres , qui se rendra sensible sur le linge ou sur le carton.

R E M A R Q U E S.

I.

On peut aussi sans Verre distinguer sur une muraille de la chambre , ou sur le plancher , les images des objets extérieurs , & principalement de ceux qui sont en mouvement ; mais ces images ne paroissent pas avec tant d'agrément & de distinction , parce que leurs couleurs ne sont que sombres & mortes. Or de quelque manière qu'on les voye , elles paroîtront toujours renversées ; mais on les peut redresser en plusieurs manières ; ce qui ne sert pourtant de rien , parce que cela n'augmente pas le plaisir qu'il y a de les voir avec un Verre dans leurs couleurs naturelles , & ne diminue en rien l'usage qu'on en tire , qui est que l'on peut représenter en raccourci sur le carton les paysages , & tout ce qui pourra envoyer son image sur ce carton. Ce qui se fera en passant un crayon sur tous les traits de cette représentation , qui paroîtra comme en perspective , dont les parties seront d'autant mieux proportionnées , que la Lentille de verre sera moins épaisse par le milieu , & que le trou par où les espèces passent pour entrer dans le Verre , sera petit. Ce trou ne doit pas avoir une épaisseur considérable ; c'est pourquoi il doit être fait dans une platine de métal bien mince , qu'on appliquera contre le trou de la fenêtre , qu'il est bon de faire un peu grand , afin de don-

ner un passage libre aux espèces ou images des objets de dehors , qui seront de côté.

I I.

On peut aussi voir dans une chambre , dont les fenêtres seront fermées , pourvû que la porte soit ouverte , ce qui se passe au dehors par le moyen de plusieurs Miroirs plans , qui pourront se communiquer par réflexion les espèces l'un à l'autre , &c.

I I I.

J'ai oublié de dire , que par cette manière de représenter sur une surface les images des objets avec une Lentille de verre , les Physiciens expliquent comment se fait la vûe , en prenant le creux de l'œil pour la chambre fermée , le fond de l'œil , ou la retine pour la surface qui reçoit les espèces , le cristallin pour la Lentille de verre , & le trou de la prunelle pour le trou de la fenêtre par où passent les espèces ou images des objets.

I V.

L'œil artificiel représente beaucoup mieux l'œil naturel que cette chambre fermée. On va le décrire tel qu'il est décrit dans les *Expériences Physiques* * de M. Poliniere , qui nous a communiqué * page dans ce Livre ses découvertes sur la Physique , 472. seconde édition. avec plusieurs autres , qu'il a rendu fort claires , tant par l'exposition des expériences , que par leur explication. C'est un Livre que les jeunes Physiciens sur tout doivent avoir ; il se trouve dans la même boutique où l'on vend ces Récréations. Plan-

AB est une boule de bois creuse , qu'on peut séparer en deux parties en DE ; son diamètre est d'environ 5 à 6 pouces. En BC est un Verre len-

che 3 *
Fig. 12.

ticulaire , dont le foyer en est éloigné de 5 pouces ou environ. FA est un tuyau collé à la boule AB en AH : ce tuyau est de 8 à 9 pouces de long , & à 2 pouces & demi de diamètre. GA est un tuyau qui entre dans l'autre FA , & qui porte à son extrémité AH un papier huilé , ou un verre plane , qui a été un peu dépoli en le frottant sur une surface plane avec du menu sable broyé. Ce verre est appliqué au bout du tuyau mobile GA , pour être facilement placé au foyer du verre CB.

Si l'œil est placé vers G pour regarder le verre AH , en repoussant un peu, ou en retirant le tuyau G , il appercevra distinctement les objets extérieurs peints sur le verre AH dans une situation renversée.

On voit que dans cet œil artificiel la Lentille BC tient la place des humeurs de l'œil , & le verre bruni ou papier huilé AH , celle de la retine , que l'on croit vraisemblablement transmettre au cerveau les images qui y sont peintes.

V.

Pour bien voir ces images dans l'œil naturel , il faut séparer un œil de mouton des chairs & peaux dont il est entouré ; couper un peu du fond de cet œil pour découvrir l'humeur vitrée. Alors y ayant mis un petit morceau de papier huilé , & ayant placé le devant de cet œil à une petite ouverture de fenêtre d'une chambre fermée , l'image des objets éclairés paroît sur ce papier dans une situation renversée. Cet œil étant de même exposé vis-à-vis d'une bougie allumée , l'image de la flamme paroît renversée sur ce papier , les objets proches sont mieux représentés que les objets éloignés.

L'œil de mouton est préférable à celui de bœuf ou de veau, parce que la prunelle des moutons ou des brebis ne se ferme pas tant en mourant que celle des bœufs.

PROBLEME XXXIV.

Construire une chambre obscure, qu'on puisse transporter.

FAites une caisse de bois ABCD, à laquelle vous donnerez environ 9 pouces de largeur, & 2 ou 3 pieds de longueur plus ou moins, la distance des foyers des Lentilles dont vous voulez vous servir. Ajustez à l'un des côtez un tuyau EF, ou plusieurs qui s'emboitent l'un dans l'autre, puissent s'allonger ou s'acourcir, selon le besoin: vous appliquerez dans ces tuyaux deux, ou même trois Lentilles convexes des deux côtez. Les foyers des Lentilles extérieures auront environ 7 pouces de distance, & celui de la Lentille intérieure aura environ 5 pouces. Vous attacherez un papier huilé GH, qui sera suspendu perpendiculairement à travers la caisse dans le lieu où l'on jugera que se doivent peindre les images des objets, dont les rayons auront été rompus dans les verres lenticulaires du tuyau. Enfin ménagez au côté opposé au tuyau une ouverture en I, qui soit assez grande pour recevoir les deux yeux. La caisse doit être bien fermée de tous côtez.

Planche 3*
Fig. 13.

Quand vous voudrez voir quelques objets, vous tournerez le tuyau garni de ses Lentilles vers ces objets, & vous les ajusterez de manière que l'image en soit peinte clairement sur le papier huilé. Ce que vous reconnoîtrez en regardant par

L'ouverture I. Pour mieux voir, il est bon de s'envelopper la tête & l'ouverture, afin qu'il n'y entre point de lumière par cette ouverture. Les objets paroîtront représentés avec toutes leurs couleurs, de même que dans la chambre fermée qu'on a décrit dans le Problème précédent.

R E M A R Q U E S.

I.

Vollius rapporté dans sa Dioptrique une autre construction de chambre obscure, pour redresser les images des objets qu'on voit dans une situation renversée. Si l'on veut avoir quelque chose de singulier en ce genre, il faut consulter les expériences Physiques citées ci-dessus, dans les expériences 101 & 103 de la seconde Edition.

II.

Mais on augmentera la multiplicité des objets, si on ajuste à la place du premier Verre lenticulaire un Verre à facettes, pour recevoir les rayons des objets, & qu'on mette à son foyer un autre Verre convexe dans le tuyau de la chambre obscure. Ces Verres à facettes font une curiosité d'Optique, dont on parlera dans le Problème suivant.

III.

Voici la description d'une autre chambre obscure, inventée par G.J. 'sGravesande, qui l'a donné à la suite de son Essai de Perspective.

Cette Machine a la forme à peu près d'une Chaise à Porteur. Le dessus en est arrondi vers le derrière, & par le devant elle est faite en talut jusqu'à la moitié de sa hauteur. Voyez la Figure

Plan-
che 4 *
Fig. 14.

re

re qui représente cette Machine, dont le côté opposé à la porte est supposé enlevé, pour qu'on en puisse voir le dedans.

Planche 4 *
Fig 14.

1. Au dedans la planche A sert de table; elle tourne sur deux chevilles de fer qui entrent dans les bois qui forment le devant de la Machine. Cette table est soutenue par deux chaînettes; de sorte qu'on peut la soulever pour entrer plus commodément par la porte qui est de côté.

2. De part & d'autre il y a vers le derriere de la Machine un tuyau de fer blanc recourbé vers les deux bouts, comme on le voit dans la Figure 15. Ce tuyau se place dans la garniture qui est au dedans, & il a une de ses extrêmitéz, qui donne dans la Machine, & une qui aboutit au dehors: il sert à donner de l'air, sans que la lumière y puisse passer. On peut avoir plusieurs de ces tuyaux, & les ajuster à la chaisé, si on en a besoin pour donner plus d'air.

Fig 15.

3. Au derriere de la Machine en dehors sont attachez quatre petits fers c, c, c, c, dans lesquels glissent deux régles de bois DE, DE, lesquelles sont de la largeur d'environ trois pouces. Au travers de ces deux régles passent vers DD deux lattes qui tiennent attachées une planche F, laquelle par leur moyen on peut faire avancer & reculer.

Fig. 16.

4. Au dessus de la Machine il y a une planche longue d'environ quinze pouces, & large de neuf, dans laquelle il y a une échancrure PMOQ, longue de neuf ou dix pouces, & large de quatre.

5. On attache sur cette planche deux régles faites en forme de queue d'aronde, entre lesquelles on fait glisser une autre planche de même longueur que la première, & large d'environ six pouces. Cette se-

Plan-
che 4 *
Fig. 14.

conde planche est percée par le milieu, & dans cette ouverture qui doit avoir trois pouces de diamètre, on fait une écroue, qui sert à élever & à abaisser un cylindre, sur lequel il y a une vis, & dont la hauteur est d'environ quatre pouces. C'est dans ce cylindre, comme on le verra dans la suite, qu'est placé le verre convexe.

6. On fait glisser au dessus de la planche dont on a parlé n. 4. une boete X, en forme de petite tour quarrée, large d'environ sept ou huit pouces, & haute de dix; le côté B, qui lui sert de porte, est tourné vers le devant de la Machine. Le derrière de cette boete a vers le bas une ouverture quarrée N, d'environ quatre pouces, laquelle peut se fermer par une petite planche I, qui glisse entre deux régles.

7. Au dessus de cette ouverture quarrée il y a une fente parallele à l'horison, & qui tient toute la largeur de la boete: par cette fente on fait entrer dans la boete un petit Miroir, qui des deux côtez glisse entre deux régles placées de telle manière, que la glace du Miroir, qui est tournée vers la porte B, fait avec l'horison un angle de cent douze degrez & demi.

8. Ce Miroir, sur le milieu du côté qui reste hors de la boete, a une petite platine de fer qui tient lieu de base à une petite vis, laquelle avance & sert à arrêter le Miroir dans l'endroit où on le voit en H. Pour le fixer ainsi, on fait passer la vis dans un petit trou qu'on fait dans la planche dont il est parlé n. 5. & par une fente qu'on fait pour cet effet dans la planche qui est au dessous de celle-là, & dont on a parlé n. 4. Ce Miroir se tourne verticalement de tous côtez, & on l'arrête par le moyen d'une écroue R. Quand on ôte le Miroir

de cette situation , la fente dont on vient de parler se ferme par une petite planche , qui au dedans de la Machine glisse entre deux petites règles. Quant à la fente dont il est parlé *n.* 7 , elle se ferme en partie par la planche I , quand on ouvre l'ouverture N , & les deux bouts qui restent ouverts , se ferment par de petites règles.

9. A un des côtez de la boete , on fait glisser une règle dans deux petits fers , pareils à ceux qui sont au derriere de la Machine *n.* 3. Cette règle passe de quelques pouces le derriere de la boete , & à son extrêmité elle a un trou par où l'on fait passer la vis du Miroir dont je viens de parler ; de sorte qu'on peut incliner ce Miroir sous toutes sortes d'angles au devant de l'ouverture N.

10. Outre ce premier Miroir , il y en a un autre marqué L , qui est plus petit ; il est attaché vers son milieu à une latte , qui passe par le milieu du haut de la boete. Cette latte peut s'arrêter à vis , & elle sert à élever & à abaisser le Miroir qui lui est attaché , de manière à pouvoir être fixé à toutes sortes d'inclinaisons.

R E M A R Q U E.

Ceux qui croiront que les tuyaux dont il est parlé *n.* 2 , ne suffisent point pour donner de l'air à la Machine , pourront mettre sous le siege un petit soufflet , qu'on fera agir par le moyen du pied. De cette manière on renouvellera continuellement l'air de la Machine, le soufflet chassant celui qui y est , & obligeant ainsi celui de dehors d'entrer par les tuyaux.

Usage de la Machine qu'on vient de décrire.

I.

Représenter les objets dans leur situation naturelle.

Plan-
che 4*
Fig. 14.

QUAND on veut représenter les objets dans cette Machine, on étend un papier sur la table; où bien, ce qui est mieux, on étend le papier sur une autre planche, en sorte qu'il déborde, & on infere cette planche ainsi couverte dans un cadre; de manière qu'elle soit fixée par le moyen de deux règles faites en forme de queue d'aronde.

On met dans le cylindre C, qui tourne à vis dans le haut de la Machine, un verre convexe, dont le foyer est à une distance à peu près égale à la hauteur de la Machine au-dessus de la table: on ouvre par derrière la boîte qui est au-dessus de la Machine; & on incline vers cette ouverture le Miroir L; en sorte qu'il fasse avec l'horison un angle demi droit, quand on veut représenter les objets pour le tableau perpendiculaire. Alors si on ôte le Miroir H, & la planche F, aussi-bien que les règles DE, DE, on verra se placer sur le papier tous les objets, qui envoient sur le Miroir L des rayons, qui peuvent être réfléchis sur le verre convexe, lequel on élève, ou l'on abaisse par le moyen de la vis du cylindre, jusques à ce que les objets paroissent entièrement distincts.

Quand on veut représenter ces mêmes objets pour le tableau incliné, on doit donner au Miroir la moitié de l'inclinaison qu'on veut donner au tableau.

Pour le tableau parallèle, il faut fermer l'ouver-

ture N , & ouvrir la porte B : après quoi il faut élever le Miroir E jusques au haut de la boete , en le mettant dans une situation parallele à l'horison. Cette disposition de la Machine peut servir, quand on est sur un balcon , ou quelque étage élevé , à dessiner un Parterre qui seroit au bas.

Si on vouloit dessiner une Statue , qui seroit dans un lieu un peu élevé , & qu'on voulût la représenter de la manière qu'il faudroit la peindre , contre un plafond , il faudroit tourner le derriere de la Machine vers la Statue , & tourner aussi la boete , en sorte que la porte B regardât la Statue. Alors après avoir ouvert la porte , il faudroit mettre le Miroir E verticalement , la glace tournée vers la Statue , & avancer ou reculer la boete , ou bien élever ou abaisser le Miroir , jusques à ce que les rayons qui viennent de la Statue sur le Miroir , pussent être réfléchis sur le verre. Quand ces changemens de la boete ou du Miroir ne suffisent pas pour donner cette réflexion sur le verre , il faut avancer ou reculer la Machine entiere.

II.

Représenter les objets , en faisant paroître à droite ce qui doit être à gauche.

Ayant mis la boete X dans la situation qu'on voit dans la Figure , il faut ouvrir la porte B , & fermer l'ouverture N , puis mettant le Miroir H dans la disposition qui a été dite n. 7 , élevez le Miroir E vers le haut de la boete , & inclinez-le vers le premier Miroir , en sorte qu'il fasse avec l'horison un angle de 22 degrez & demi , c'est-à-dire , que le dessus de la Machine , après une double réflexion , paroisse vertical dans le premier Miroir.

Plan-
che 4 *
Fig. 14.

Pour le tableau incliné, il faut que le Miroir L fasse avec l'horison un angle égal à la moitié de l'angle de l'inclinaison du tableau, moins le quart d'un angle droit. On trouve cet angle avec assez de précision pour la pratique, en inclinant le Miroir L jusques à ce que l'apparence du dessus de la Machine, après une double réflexion, paroisse dans l'autre Miroir sous un angle avec l'horison, égal à l'inclinaison qu'on veut donner au tableau. Si l'inclinaison du tableau étoit moindre que du quart de 90 degrez, il ne faudroit pas incliner le Miroir L vers le premier, comme il vient d'être dit ci-dessus, mais du côté opposé, en faisant l'angle de l'inclinaison du Miroir égal à la différence de l'angle de l'inclinaison du tableau, au quart de 90 degrez.

Quand on veut représenter les objets pour le tableau parallèle, il faut mettre le Miroir L dans la disposition qui a été dite, Article I. de l'Usage, & le Miroir H dans celle qui a été dite au n. 9, en l'inclinant vers l'horison, sous un angle demi-droit, la glace tournée vers la terre, quand on suppose le tableau au dessous de l'œil, & vers le ciel, quand on le suppose au dessus.

Cette disposition de la Machine peut aussi être d'usage pour les tableaux inclinés, qui font avec l'horison un angle fort petit; mais alors il faut diminuer l'inclinaison d'un des Miroirs, de la moitié de l'inclinaison du tableau.



III.

Représenter tour à tour les objets qui sont aux environs d'une campagne ou d'un jardin, au milieu duquel on a placé la Machine, & faire paroître ces objets redressez devant celui qui est assis dans la Machine.

IL faut tourner le dos de la Machine vers le Soleil, parce que les objets qui sont derrière la Machine se représentant par une seule réflexion, leur apparence sera toujours plus claire, bien qu'ils soient dans l'ombre, que celle des objets placez aux autres côtez, & qui ne peuvent être vûs que par une double réflexion.

Les objets qui sont aux deux côtez de la Machine, se représentent par le moyen du Miroir H, situé comme on le voit dans la Figure & n. 8. On couvre ce Miroir d'une tour ou boete de carton, ouverte du côté des objets, comme aussi du côté de l'ouverture N de la boete X : on doit user de cette précaution; car si on laisse le Miroir entierement exposé, il réfléchira sur le Miroir L, les rayons de lumière qui viennent de côté, lesquels entrant par le verre convexe, après avoir été réfléchis par le Miroir L, affoibliront extrêmement la représentation.

Les objets qui sont au devant de la Machine, se représentent comme il a été dit au commencement de l'Article II.

IV.

Représenter des Tableaux ou des Tailles-douces.

LEs Tableaux & les Tailles-douces qu'on veut représenter, s'attachent contre la planche F, du côté qui regarde le derrière de la Machine,

Plan-
che 4 *
Fig. 14.

que l'on tourne, en sorte que ces Tailles-douces soient exposées au Soleil. Dans cette situation on les représente comme les autres objets (Art. I.) avec cette seule différence, qu'il faut changer le verre convexe, qui est dans le cylindre C : car si on se propose de donner aux Tailles-douces leur véritable grandeur, il faut que la distance du foyer à ce verre soit égale à la moitié de la hauteur de la Machine au-dessus de la table, c'est-à-dire, à la moitié de AC. Si on vouloit, dans le dessein donner à ces mêmes figures plus de grandeur qu'elles n'en ont véritablement, il faudroit que la distance du foyer à son verre fût encore plus petite; & il faudroit au contraire qu'elle fût plus grande, si on vouloit représenter les figures plus petites qu'elles ne sont. L'éloignement dans lequel il faut mettre les Tailles-douces, se trouve en avançant ou en reculant la planche F, jusques à ce qu'elles paroissent distinctement dans la Machine. On peut déterminer cet éloignement par la proportion suivante.

*La hauteur de la Machine au dessus de la table, moins la distance du foyer au verre, est à
La hauteur de la Machine au-dessus de la table, comme La distance du foyer au verre, est à
La distance du verre à la figure.*

Remarquez que cette distance du verre à la figure, se mesure par un rayon réfléchi, qui part de la figure parallèlement à l'horison, & qui est réfléchi par le Miroir perpendiculairement sur le verre. Remarquez encore que quand on veut éloigner les figures au-delà du derrière de la Machine, il faut les attacher contre le côté F de la planche, & la

tourner en faisant passer les lattes par les règles DE, DE, de manière que la face F regarde l'ouverture N.

REMARQUE I.

Sur la représentation des Visages.

Il seroit assurément très-curieux & très-utile de pouvoir dessiner les visages des hommes au naturel. La chose réussit fort bien en petit, quand même l'apparence de la personne entière n'occupoit pas un demi-pouce sur le papier. Mais il y a plus de difficulté à réussir en grand.

REMARQUE II.

Sur l'ouverture du Verre convexe.

Dans tout ce qui vient d'être dit, il ne faut pas négliger d'examiner l'ouverture qu'on doit donner au verre convexe; car bien qu'on ne puisse pas réduire cette ouverture à une mesure fixe, il sera bon toujours de faire attention aux remarques suivantes. 1. Qu'on peut ordinairement donner au verre la même ouverture qu'on donneroit à une lunette d'approche, dont ce verre seroit l'objectif. 2. Qu'il faut diminuer cette ouverture, quand les objets sont fort éclairés, & qu'il la faut augmenter, quand au contraire ils sont exposés à un jour plus foible. 3. Que les traits paroissent mieux marquez avec une petite ouverture qu'avec une plus grande; & qu'ainsi lorsqu'on veut dessiner, il faut donner au verre le moins d'ouverture qu'il sera possible; avec cette précaution pourtant, qu'il ne faut pas trop exténuër la lumière qui entre par-là dans la Machine.

On voit par toutes ces remarques, qu'il est bon d'avoir plusieurs pièces de fer blanc, ou de

Plan-
che 4 *
Fig. 14.

cuivre mince , qui soient rondes , de la grandeur du verre , & percées différemment , afin de pouvoir ainsi donner au verre l'ouverture dont on a besoin. On pourroit encore faire différentes ouvertures dans une lame de cuivre , qu'on feroit glisser sur le verre , ou se servir d'une plaque ronde , qui tournant sur son centre , feroit passer sur le verre des trous de différentes grandeurs.

REMARQUE III.

On trouvera , dans l'Essai de Perspective, qu'on a cité, les Démonstrations de tous ces Usages , & la Description d'une autre Machine , qui a des avantages particuliers , mais qui cependant n'est point préférable à celle qu'on a décrite ici.

PROBLEME XXXV.

Des Verres à facettes.

Planche
5 * Fig.
16.

LEs Verres à facettes sont des Verres taillez à plusieurs faces , tels que le Verre LHIM , dont on n'a représenté ici que trois faces LH , HI , IM. Ces Verres représentent autant de fois le même objet qu'ils ont de facettes ; en sorte que si un Verre a 41 facettes , & qu'on regarde un Soldat armé , en mettant l'œil dans le point où les rayons de l'objet , qui se sont brisez en passant dans les 41 faces , se croisent , on voit une Compagnie de 41 Soldats , quoiqu'il n'y en ait qu'un.

C'est ce qu'on peut remarquer en jettant les yeux sur la figure qui représente la coupe de trois faces. L'objet A envoie ses rayons sur les trois faces LH , HI , IM. Ces faces sont tellement taillées , que ces rayons s'étant rompus en passant

par le Verre , ils vont se croiser au point G , où l'œil étant placé , il appercevra l'objet A en A , en B & en C , par les trois rayons directs GA , GB , GC : car on a coûtume de rapporter dans la ligne droite , qui vient en dernier lieu frapper l'organe de la vûe , les objets appercûs , quoique les rayons qui passent de ces objets ayent souffert plusieurs détours , comme on le voit assez par les Miroirs plans.

On peut enchasser un de ces Verres à facettes à l'extrémité d'un tuyau , & placer à l'autre extrémité une Lentille dans l'endroit où tous les rayons du Verre à facettes se croisent , & que j'ai appelé son foyer. On a représenté un de ces Verres ainsi enchassé dans la Figure HLIM.

Plan-
che 5.
Fig. 17.

R E M A R Q U E S.

Si on présente un Verre à facettes aux rayons du Soleil , & qu'on le mette à la seule ouverture qu'on aura laissé dans une chambre bien fermée , on verra représenter sur un papier blanc , mis à une distance convenable , autant d'images du Soleil qu'il y aura de facettes au Verre : & ces images seront d'autant plus vives , que la chambre sera plus obscure.

Mais on verra quelque chose d'agréable , si après avoir mis à l'ouverture de la chambre obscure un prisme triangulaire , on fait passer par un grand Verre à facettes les différentes couleurs des rayons du Soleil , produites par le prisme , & qu'on les reçoive sur un papier blanc. On variera encore ces couleurs en leur présentant des Verres lenticulaires , & en les faisant ensuite passer par un Verre à facettes. On remarquera sans aucune confusion

dans le foyer du Verre à facettes, les couleurs les plus belles & les plus brillantes qu'on puisse voir.

P R O B L E M E X X X V I.

Construire un Tableau Magique.

Plan-
che 5 *
Fig. 18.

C'Est avec un Verre à facettes qu'on fait voir une Figure très-bien faite, quoiqu'elle soit tout-à-fait difforme sur le Tableau où elle est peinte. Pour construire ces sortes de Tableaux, qu'on appelle *Magiques*, on élèvera à plomb sur une table ABCD une autre table ou planche ADEF : on fera sur ces deux tables des reinures, suivant leur longueur ; les reinures AB & CD de la table horizontale serviront à éloigner ou avancer le pied BCH, & les reinures AF, DE de la planche verticale, serviront à hausser ou baisser un carton sur lequel on colera un papier blanc. On ajustera au haut du pied BCH un tuyau KI dans un autre IH, le tuyau KI contiendra un Verre à facettes, placé en I, & un carton en K, auquel on aura fait un petit trou vers le foyer du Verre à facettes.

Cela étant ainsi disposé, on placera le pied BHC sur la table horizontale, dans un lieu convenable, & on l'éloignera plus ou moins de la planche verticale, selon qu'on voudra que les parties de la Figure à dessiner sur le papier blanc du Tableau, & qu'on veut rassembler par le Verre à facettes, soient plus ou moins éloignées les unes des autres. Au petit trou K on placera une lampe (ce ne doit point être une chandelle) qui renvoyera de la lumière sur le papier blanc appliqué à la planche verticale ADEF, & l'on marquera avec du crayon le contour de ces surfaces lumineuses.

Quand on aura examiné , en regardant par le trou K, si ces surfaces lumineuses paroissent faire une même superficie , on peindra dans chacune de ces superficies les parties d'un objet qui doivent se réunir toutes , quand on les regardera par le Verre à facettes , placé dans le tuyau KI. Et sur les espaces qui sont entre ces surfaces , on mettra telles Figures grotesques qu'il plaira , pour faire paroître le Tableau d'autant plus difforme. On peut aussi peindre dans ces espaces des Figures qui composeront une même Figure , en les considérant à la vûe , avec celles qui seront représentées sur les surfaces lumineuses.

Ainsi lorsqu'on regardera par le trou K , on ne remarquera qu'une seule figure ou image composée de toutes les parties qui sont peintes sur les surfaces lumineuses , & l'on n'appercevra en aucune façon celles qui sont peintes dans les espaces qui sont au milieu. Voyez Wolfius dans sa Dioptrique , & Nicéron dans sa Perspective curieuse.

P R O B L E M E X X X V I I .

De la Lanterne Magique.

LA Lanterne Magique est une sorte de Lanterne qui contient une lampe mise au foyer d'un verre convexe , ou d'un Miroir concave , à laquelle on applique de petites figures peintes sur des verres renfermez dans un châssis de bois , qu'on fait passer devant la lampe. Ces figures se représentent d'une grandeur énorme sur une muraille ou un drap blanc , exposé à une certaine distance dans une chambre entièrement obscure.

On ne s'étendra pas ici davantage sur la descrip-

Plan-
che 6 *
Fig. 19.

tion, ni sur les effets de la Lanterne Magique ; parce qu'on aura occasion d'en parler dans les Problèmes de Physique.

PROBLÈME XXXVIII.

Des Lunettes d'approche ou Telescopes.

ENtre les différentes Machines d'Optique, les Lunettes d'approche sont celles qui sont d'un plus grand usage. Elles sont composées des verres dont on a parlé dans le Problème XXX. & suivans, & servent à faire paroître près les objets éloignés. Il y a plusieurs sortes de Lunettes d'approche, 1. à deux verres, dont l'un est convexe & l'autre concave, qui représentent les objets droits, comme on les voit naturellement. 2°. à deux verres convexes, qui représentent les objets renversés. 3°. à quatre verres convexes, qui redressent les objets qui paroissent renversés, en les regardant avec deux verres convexes.

REMARQUES.

I.

Il est aisé de faire une Lunette d'approche de la première sorte, qu'on appelle *Lunette d'Hollande* ou *de Galilée*. On prend un verre plan d'un côté, & convexe de l'autre, ou convexe des deux côtés, pourvu que la convexité soit faite avec une portion de grande Sphere : on ajuste ce verre, qu'on nomme *objectif*, à l'extrémité d'un tuyau de carton ou d'autre matière, selon qu'on le trouvera meilleur : on emboîte dans ce tuyau un autre tuyau de même matière, de sorte que celui-ci puisse

rentrer dans le premier : on ajuste encore à l'extrémité de ce second tuyau un autre verre concave des deux côtez. Enfin on place ce verre concave en coulant le tuyau dans lequel il est enchassé, de manière qu'on puisse voir distinctement les objets qu'on veut regarder. La concavité de ce verre, qu'on nomme *Oculaire*, doit être faite avec la portion d'une petite Sphere. Le verre concave sera placé entre le verre convexe & son foyer. Si un verre concave ne faisoit point paroître les objets assez clairement, on en chercheroit un autre jusqu'à ce qu'on en ait trouvé un qui les fist voir distinctement.

II.

Quand on a trouvé le point où l'on voit distinctement les objets assez éloignez, on fait une marque au tour du second tuyau avec de l'encre, à l'endroit où finit le premier, afin de le remettre au même endroit, lorsqu'on veut voir les mêmes objets. Mais il est à remarquer que cet endroit ne conviendra pas à toutes sortes de personnes pour voir le même objet, ni à la même personne pour regarder des objets inégalement éloignez. Il faut que chacun ajuste le second tuyau, qui contient l'oculaire, à la portée de sa vue.

III.

On aura une Lunette d'approche fort claire & fort commode d'un pied huit pouces de longueur ou environ, si on se sert d'un objectif convexe des deux côtez, qui ait quatre pieds de diamètre, & d'un oculaire concave des deux côtez, qui ait quatre pieds & demi de diamètre. Mais on fera un très-bon Telescope avec un oculaire concave des deux côtez, dont le diamètre soit de cinq

pouces & demi , & un objectif convexe des deux côtez , ou d'un côté seulement , & plan de l'autre , dont le diamètre soit de douze pieds. Ce Telescope sera excellent pour observer les Astres.

I V.

Les Lunettes à deux verres convexes se feront de la même manière ; mais l'oculaire sera placé au dessous du foyer de l'objectif. Comme les objets paroissent renversez , on pourra corriger ce défaut en plaçant un Miroir au-dessus du foyer de l'oculaire , à peu près à l'endroit où l'on doit placer l'œil. Ce Miroir sera de métal , bien poli , d'un pouce en ovale , & faisant un angle demi-droit avec l'axe des verres : il faudra en approcher l'œil assez près pour voir distinctement les objets qui paroîtront dans leur situation naturelle. Quand on observe les Astres , il n'est pas nécessaire d'y ajouter un Miroir , il importe peu en quelle situation ils paroissent : d'ailleurs on s'accoutume bien-tôt à distinguer leur partie orientale d'avec l'occidentale.

V.

On observera que dans ces sortes de Lunettes , le diamètre de l'objectif doit être grand par rapport à celui de l'oculaire : car , par exemple , une Lunette dont l'objectif est de vingt-cinq pieds , portera un oculaire de trois pouces , & celle dont l'objectif sera de cinquante pieds , portera un oculaire , qui n'aura que quatre pouces & demi de diamètre. On peut faire une Lunette d'une grandeur commode , avec un objectif de deux pieds trois pouces , & un oculaire d'un pouce & demi.

V I.

Il y a une différence à faire entre les objectifs
convexes

convexes des deux côtez , & les objectifs convexes plans. Les objectifs convexes des deux côtez d'une même convexité ont leur foyer au centre de l'une des convexitez , & les objectifs convexes plans ont leur foyer à l'extrêmité du diamètre de la convexité. On mesure la longueur de ces Lunettes par l'éloignement du foyer de leur objectif. Ainsi on dit qu'une Lunette a douze pieds , si le demi-diamètre de l'objectif convexe des deux côtez est de douze pieds , ou bien si le diamètre de l'objectif plan-convexe est de douze pieds.

VII.

Si l'on ajoute à la Lunette qu'on vient de décrire deux Lentilles semblables à l'oculaire , on aura une Lunette d'approche qui fera paroître les objets dans leur situation ordinaire , & qui sera meilleure que la Lunette appelée communément *Lunette de Galilée*. Ces deux Lentilles ajoutées , se placent auprès de l'oculaire dans un tuyau séparé , qu'on peut ôter quand on veut. Ainsi une Lunette à deux verres peut devenir Lunette à quatre verres , en ajoutant le tuyau qui contient les deux oculaires , & en ôtant ce même tuyau , une Lunette à quatre verres deviendra facilement Lunette à deux verres. Si la Lunette à quatre verres a quelque avantage sur la Lunette à deux verres , elle a aussi ce désavantage , qu'elle représente les objets moins clairement.

VIII.

Pour rendre l'objet vû par les Lunettes plus clair , on met sur l'objectif un carton percé au milieu ; on fait plusieurs de ces cartons , dont les ouvertures sont de différente grandeur : on essaye ce-

lui avec lequel on voit l'objet plus distinctement. Ce carton doit avoir son diamètre égal à la largeur de l'objectif ; il faut aussi le noircir , aussi-bien que le dedans des tuyaux, pour empêcher les rayons de lumière de se réfléchir.

I X.

On frotera le dedans des tuyaux d'un noir huilé , puis on y mettra du charbon broyé , & on les secouera ; enfin on les laissera sécher. On peut encore noircir ces tuyaux de Lunettes avec la fumée d'une bougie de poix résine.

Des Microscopes.

Les Lunettes d'approche nous font voir les objets ; que nous n'appercevons à la vûe que confusément , à cause de leur éloignement ; les Microscopes nous font voir distinctement les parties des corps que leur petitesse nous rend insensibles. On distingue en général deux sortes de Microscopes ; le simple , qui est fait avec une seule Lentille , & le composé , qui est fait de plusieurs Lentilles. Les Microscopes n'ont été connus que dans le siècle dernier vers l'an 1620.

On ne donnera ici la description que de quelques Microscopes simples , qu'on peut faire soi-même pour se divertir , la dépense n'en sera pas grande. Si on veut avoir d'autres Microscopes , soit simples , soit composez , on consultera les Auteurs qui en ont traité , comme Volfius , Joblot , & autres.



PROBLEME XXXIX.

Faire une Lentille pour un Microscope simple.

IL faut prendre un morceau de glace de Miroir ou de carosse, le réduire en très-petits morceaux avec un gresoir de Vitrier; au défaut de cet instrument on se servira des dents d'une clef. On choisira entre ces petits morceaux ceux qui seront les plus petits & les plus plats: on en prendra un avec la pointe d'une grosse aiguille, qui doit être assez longue. On mettra ce petit morceau de glace dans la flamme d'une bougie, où il se fondra en peu de temps; lorsqu'il sera fondu, il tombera de lui-même.

REMARKES.

On mouillera la pointe de l'aiguille avec de la salive, pour y coler le petit morceau de glace, s'il ne s'y attache point autrement: on panchera un peu la bougie, afin que la Lentille ne tombe point dans la cire, & pour la recevoir, il faut mettre au-dessous un morceau de papier, dont les bords soient relevez; car s'ils ne l'étoient pas, les petites gouttes en tombant faueroient & se perdroient: si ces petites gouttes n'étoient pas assez rondes, on les reprendroit, & on les feroit refondre pour les arondir davantage. On prend une aiguille assez longue, afin de ne se point brûler, quand on la met dans la flamme de la bougie. On préférera la flamme bleue de la bougie, ou la flamme de l'esprit de vin à la flamme de la bougie.

PROBLEME XL.

Faire un Microscope avec la Lentille dont on vient de donner la construction.

Prenez une petite plaque de plomb, que vous rendrez plus ou moins mince, à proportion de la petitesse de la Lentille. Faites-y avec la pointe de l'aiguille un trou propre à recevoir la Lentille que vous voulez y appliquer; vous l'y arrêterez avec les bords du trou que vous releverez.

Usage de ce Microscope.

Ayant laissé tremper pendant deux ou trois jours de l'écorce de chêne, des feuilles d'herbes ou de fleurs séchées, ou autres choses dans de l'eau, on en prendra une goutte avec un petit bâton; on appliquera cette goutte d'eau sur la surface d'un côté de la Lentille: on approchera le plus près qu'on pourra de l'œil l'autre côté de la Lentille, & en regardant à la lumière d'une bougie, on verra une infinité de petits animaux, qui sont dans un mouvement continuel.

On peut appliquer sur l'une des surfaces de la Lentille, un cheveu, ou autre chose, qu'on y attachera avec un peu de cire des deux côtés de la Lentille.

PROBLEME XLI.

Faire un Microscope avec une goutte d'eau.

AU lieu de la Lentille, on mettra une goutte de l'infusion dans le trou de la plaque de plomb, dont on vient de parler dans le Problème

précédent ; on regardera à travers cette goutte d'infusion à la lumière d'une bougie , & l'on y appercevra les petits animaux , qui ne cessent de se mouvoir , jusqu'à ce que la goutte soit desséchée , ou qu'elle ait perdu la figure sphérique.

On peut ajuster ce Microscope à l'extrémité d'un tuyau de carton , afin que la lumière du grand jour n'empêche point celle de la bougie. Il sera aisé à chacun de faire des réflexions sur ce qu'on vient de dire , pour rendre ces Microscopes plus complets , ou pour en inventer d'autres.

Remarques sur les Microscopes simples.

Les Microscopes simples augmentent le diamètre de l'objet qu'on regarde, en raison de la distance du foyer à huit doigts , qui est la distance où l'on peut voir distinctement un petit objet , comme seroient les lettres d'une écriture assez menue. Ainsi si la distance du foyer d'un Microscope à ce Microscope est d'un demi-doigt , le diamètre de l'objet posé dans le foyer , sera augmenté de seize fois , c'est-à-dire , que ce diamètre paroîtra seize fois plus grand. Plus la distance du foyer sera petite , plus le diamètre de l'objet , sera augmenté. D'où il suit que les Microscopes simples seront d'autant meilleurs , qu'ils seront faits de Spheres plus petites.

En comparant une goutte d'eau avec une goutte de glace , dont on a fait les Microscopes dans les Problèmes précédens , on trouve que la goutte de glace augmente plus le diamètre de l'objet , que la goutte d'eau : car supposant que ces deux gouttes ayent chacune $\frac{1}{10}$ de doigt pour leurs diamètres , le diamètre d'un même objet paroîtra aug-

menté d'environ 103 fois en le regardant à travers la goutte de glace, au lieu qu'il ne paroîtra augmenté que d'environ 80 fois en le regardant à travers la goutte d'eau.

La Géométrie nous apprend que la superficie d'un quarré ou d'un cercle est en raison doublée du côté du quarré ou du diamètre du cercle, & que le corps cubique ou sphérique est en raison triplée du côté du cube ou du diamètre de la Sphère. Ainsi la superficie d'un corps, dont le diamètre sera augmenté de 100 fois, paroîtra 10000 fois plus grande, & le corps même paroîtra 1000000 fois plus grand, que s'il étoit vû sans Microscope. Ce qui est une augmentation très-considerable.

C'est avec cette sorte de Microscope qu'on remarque que la poussiere qui est sur les papillons, est semblable à des plumes; que celle qui est sur l'étamine des fleurs, paroît être une multitude de petites boules; que l'eau qui se trouve dans les moules contient un grand nombre de petites moules; que la semence des animaux contient une grande quantité de petits animaux qui s'y remuent en tous sens; que les cheveux sont ronds & creux. Enfin on peut observer la figure des parties du sang, du lait, &c.

Observations sur les Microscopes composez.

Les Microscopes composez ont des avantages très-considerables. Les grains de sable fort menus paroissent comme de petits cristaux; les parties du corps d'une mouche s'y voyent très-distinctement; les particules d'acier qui tombent du fusil quand on le bat pour allumer du feu, paroissent rondes

& semblables au plomb des Chasseurs. On remarque très-distinctement la circulation du sang, principalement dans la queue d'un Poisson appelé *Tanche*, &c. Voyez Poliniere dans ses Expériences Physiques, p. 501. de la seconde édition.

De la Perspective curieuse.

P R O B L E M E X L I I.

Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un point déterminé.

ON peut déguiser, c'est-à-dire, rendre difforme une figure, par exemple, une tête, en sorte qu'elle n'aura aucune proportion étant regardée de front sur le plan où on l'aura tracée; mais étant vûe d'un certain point, elle paroîtra belle, c'est-à-dire, dans ses justes proportions. Cela se pratiquera de la sorte.

Ayant dessiné sur du papier la figure que vous voulez déguiser avec ses justes mesures, décrivez un quarré autour de cette figure, comme ABCD, & réduisez-le en plusieurs autres petits quarrés, divisant les côtez en plusieurs parties égales, par exemple, en sept, & tirant des lignes droites en long & en travers par les points opposez des divisions, comme font les Peintres, quand ils veulent contre-tirer un tableau, & le réduire au petit pied, c'est-à-dire, de grand en petit.

Cette préparation étant faite, décrivez à discrétion sur le plan proposé le quarré long EBF \bar{G} , & divisez l'un des deux plus petits côtez EG, BF, comme EG, en autant de parties égales qu'en contient DC, l'un des côtez du quarré ABCD, comme ici en sept. Divisez l'autre côté BF en deux également au point H, duquel vous tirerez

par les points de division du côté opposé EG , autant de lignes droites, dont les deux dernières seront EH , GH .

Après cela ayant pris à discrétion sur le côté BF , le point I , au-dessus du point H , pour la hauteur de l'œil au-dessus du plan du tableau, tirez de ce point I , au point E , la ligne droite EI , qui coupe ici celles qui partent du point H , aux points $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Par ces points d'intersection vous tirerez des lignes droites parallèles entr'elles, & à la base EG du Triangle EHG , qui se trouvera ainsi divisé en autant de trapezes qu'il y a de quarrés dans le quarré $ABCD$. C'est pourquoi si l'on rapporte dans ce Triangle EGH , la figure qui est dans le quarré $ABCD$, en faisant passer chaque trait par les mêmes trapezes ou quarrés perspectifs, qui sont représentés par les quarrés naturels du grand $ABCD$, la figure difforme se trouvera décrite. On la verra conforme à son prototype, c'est-à-dire, comme dans le quarré $ABCD$, en la regardant par un trou qui doit être petit du côté de l'œil, & bien évasé du côté de la figure, comme K , que je suppose perpendiculairement élevé sur le point H , en sorte que sa hauteur LK soit égale à la hauteur HI , qui ne doit pas être bien grande, afin que la figure soit plus difforme dans le tableau. Voyez le Probl. XLIV.

PROBLEME XLIII.

Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse dans sa perfection, étant vûe par réflexion dans un Miroir plan.

Plan.
che 22.
Fig. 81.

AYant, comme on vient de faire, compris la figure qu'on veut déguiser dans un quarré,

tel qu'est ABCD, divisé en plusieurs autres petits Plan-
 quarez, qui sont ici au nombre de seize, & sup- che 22
 posant que le Miroir est une glace parfaitement Fig. 81.
 quarrée, toute nue & sans cadre, comme EFGH,
 tirez sur le plan du tableau la ligne droite IK,
 égale au côté EF du Miroir, afin que la figure oc-
 cupe entierement le Miroir EFGH. Ensuite ayant
 divisé en deux également au point P cette ligne
 IK, menez par le point du milieu P, la perpen-
 diculaire indéfinie LM, en sorte que les deux par-
 ties PL, PM, soient égales entr'elles, & d'une
 longueur prise à volonté.

Après cela élevez au point E, la ligne LQ per-
 pendiculaire à la ligne LM, & égale au double de
 la ligne IK, ou du côté du Miroir EF, & au point
 M, la ligne NO perpendiculaire à la même ligne
 LM, que vous prendrez aussi double de la ligne
 IK, en sorte que chacune des deux parties MN,
 MO, soit égale à la ligne IK. Joignez les droites
 LN, LO, qui passeront par les points I, K, &
 formeront le Triangle LNO, que l'on divisera,
 comme au Problème précédent, en autant de
 quarez perspectifs, que le quarré ABCD en con-
 tient de naturels, pour y transporter de la même
 façon la figure du quarré ABCD, qui se trouvera
 difforme sur le plan du tableau, & qui paroîtra
 belle & semblable à son prototype, étant vûe du
 point Q élevé perpendiculairement sur le point L,
 comme nous avons dit au Problème précédent :
 ou bien on la verra en son naturel par réflexion
 dans le Miroir EFGH, placé sur la ligne IK, en
 regardant le Miroir par un petit trou élevé perpen-
 diculairement sur le point M, à la hauteur de LQ,
 comme vous le voyez dans la Fig. 82. où IR SK Fig. 82.
 représente le Miroir, & Q le point de l'œil, &c.

PROBLEME XLIV.

Decrire sur un plan horisontal une figure difforme, qui paroisse au naturel sur un plan vertical transparant, posé entre l'œil & la figure difforme.

Plan-
che 23.
Fig. 83.

IL est évident que si l'on met en perspective quelque figure que ce soit sur du papier, considéré comme un plan horisontal, & que sur la ligne de terre on élève à angles droits un plan transparant, qui soit, par exemple, de verre; l'œil étant placé vis-à-vis du point de vûe, à une hauteur égale à la distance de la ligne de terre à la ligne horisontale, & éloigné du plan transparant, qui représente le tableau d'une distance égale à celle qu'on a supposée dans la perspective, on verra dans le verre la figure difforme dans son naturel. Ceux qui entendent la perspective, comprennent facilement ce que je viens de dire, & ceux qui ne l'entendent pas, pourront résoudre ce Problème mécaniquement en cette sorte.

Ayant décrit sur une pièce de carton ABCD, la figure que vous voulez déguiser, avec ses justes proportions, par exemple, l'œil EF, picquez cette figure EF, comme si vous vouliez faire un poncis: & ayant élevé à angles droits ce carton ainsi picqué sur le plan MNOP, où vous voulez décrire la figure difforme, mettez derriere le carton ABCD, une bougie allumée à telle hauteur & à telle distance qu'il vous plaira, comme en G. Alors la lumière passant par les trous du carton ABCD, portera la figure sur le plan MNOP, & l'y représentera toute défigurée, comme HIKL.

que l'on marquera avec un crayon, ou autrement. Cette image ainsi défigurée, paroîtra en son naturel sur un verre mis à la place du carton ABCD, étant regardée par l'œil placé au point G. Elle paroîtra aussi semblable à son prototype EF, étant vûe simplement par un petit trou mis au point G, comme au Problème XLII.

PROBLEME XLV.

Décrire sur la surface convexe d'une Sphere une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un point déterminé.

Ayant dessiné sur du papier la figure que vous voulez déguiser avec ses justes proportions, enfermez-la dans un cercle ABCD, dont le diamètre AC, ou BD, soit égal au diamètre de la Sphere proposée. Divisez la circonférence de ce cercle en autant de parties égales qu'il vous plaira, par exemple, en seize. Tirez du centre de ce cercle par les points de division, autant de lignes droites. Divisez aussi le diamètre AC, ou BD de ce cercle en un certain nombre de parties égales, comme en huit, & décrivez du même centre par les points de division des circonférences de cercle, lesquelles avec les lignes droites tirées du centre, diviseront le cercle ABCD en 64 petits espaces.

Plan-
che 24.
Fig. 84.

Décrivez encore un autre cercle EFGH égal au précédent ABCD, & menez de son centre I la ligne droite IK, égale à la distance de l'œil au centre de la Sphere proposée, en sorte que la partie GK soit égale à la hauteur de l'œil sur la surface de la même Sphere. Ensuite ayant mené par le même centre I, le diamètre FH perpendiculaire à la li-

Plan-
che 24.
Fig. 84.

444 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

gne IK, divisez ce diamètre FH en autant de parties égales, que le diamètre du premier cercle ABCD, sçavoir, en huit parties égales. Puistirez du point K, par les points de division autant de lignes droites, qui donneront sur le demi-cercle FGH, les points 1, 2, 3, 4, & sur l'autre demi-cercle FEH, les points 5, 6, 7.

Cette préparation étant faite, décrivez sur la surface convexe du globe proposé MLO du point L, comme pole, & des intervalles G₁, G₂, G₃, G₄, G₅, G₆, G₇, des cercles paralleles entr'eux, dont le plus grand sera MNO, duquel on ne voit ici que la moitié, qu'il faut diviser en autant de parties égales que la moitié du cercle ABCD, comme ici en huit parties égales. Décrivez par les points de division & par le pole L, autant de grands cercles, qui avec les précédens diviseront l'hémisphère LMNO en autant de petits espaces que le cercle ABCD, dans lesquels on transportera l'image du cercle ABCD. Cette image ou figure, qui sera défigurée dans l'hémisphère LMNO, paroîtra néanmoins semblable à son prototype, qui se trouve dans le cercle ABCD, étant regardée d'un point élevé perpendiculairement sur le point L, & éloigné de ce point L d'une distance égale à la ligne GK.

R E M A R Q U E.

Ce que nous avons fait sur la surface convexe d'une Sphere, se peut faire de la même façon sur la surface concave de la même Sphere, excepté que les cercles paralleles qui ont été décrits du pole L, avec les ouvertures G₁, G₂, G₃, &c. doivent être décrits avec les ouvertures E₅, E₆, E₇, EF, c'est-à-dire, qu'au lieu de se servir du demi-cercle

FGH, que l'œil placé au point K voit par sa convexité, on doit se servir de l'autre demi-cercle FEH, que l'œil placé au même point K, voit par sa concavité.

PROBLEME XLVI.

Décrire sur la surface convexe d'un cylindre une figure difforme, qui paroisse belle quand elle sera vûe d'un point déterminé.

Ayant, comme à l'ordinaire, renfermé la figure Plan- che 246 Fig. 85. que qu'on veut déguiser en un quarré KLMN, divisé en plusieurs autres petits quarez, & ayant déterminé le point de l'œil en O, à une distance raisonnable du cylindre proposé ABCD, dont la base est le cercle AFBG, tirez du centre E de cette base par le point déterminé O, la ligne droite EO; menez perpendiculairement à cette ligne EO, par le même centre E, le diamètre AB, que vous diviserez en autant de parties égales, qu'en contient le côté KL du quarré KLMN. Tirez du point O, par les points de division autant de lignes droites, qui donneront sur la circonférence du demi-cercle AFB, que l'œil voit, les points 1, 2, 3, 4, & sur la circonférence de l'autre demi-cercle AGB, que l'œil ne voit pas, les points 5, 6, 7.

Après cela tirez par les points 1, 2, 3, 4, sur la surface du cylindre des lignes paralleles entre elles, & à l'axe du même cylindre, ou au côté AD, ou BC. Puis ayant divisé une de ces paralleles en autant de parties égales qu'en contient le diamètre AB, décrivez sur la surface du même cylindre par les points de division des circonfé-

rences de cercle parallèles à la circonférence $AFBG$, lesquelles, avec les lignes droites parallèles précédentes, formeront de petits espaces, dans lesquels on transportera la figure du carré $KLMN$. Cette image qui se trouvera défigurée sur la surface du cylindre $ABCD$, paroîtra néanmoins conforme à son prototype, étant regardée par un petit trou placé au point O , où l'œil a été supposé dans la construction.

REMARQUE.

Ce que nous venons de faire sur la surface convexe du cylindre $ABCD$, se peut faire de la même façon dans la surface concave, en se servant du demi-cercle AGB , comme nous avons fait du demi-cercle AFB , c'est-à-dire, en élevant des perpendiculaires des points $5, 6, 7$, dans la surface concave, comme nous avons fait des points $1, 2, 3, 4$, dans la surface convexe, &c.

PROBLEME XLVII.

Décrire sur la surface convexe d'un cône une figure difforme, qui paroisse en son naturel, étant regardée d'un point déterminé.

Plan-
che 25.
Fig. 86.

Décrivez autour de la figure que vous voulez déguiser, un cercle à volonté, comme $ABCD$, & divisez sa circonférence en autant de parties égales qu'il vous plaira, comme en huit. Tirez par les points de division A, E, B, F , &c. au centre O , autant de demi-diamètres. L'un de ces demi-diamètres, comme AO , étant divisé, par exemple, en trois parties égales aux points $7, 8$,

vous décrirez du centre O , par ces points de division 7, 8, autant de circonferences de cercles, qui avec les demi-diamètres précédens, diviseront l'espace terminé par la première & plus grande circonference $ABCD$ en 24 petits espaces, qui serviront à contre-tirer l'image qui y sera comprise, & à la défigurer sur la surface convexe du cone, quand cette surface aura été divisée en autant de semblables petits espaces, en cette sorte.

Plan
che 25
Fig. 86

Ayant tiré à part la ligne IK égale au diamètre de la base du cone proposé, & l'ayant divisé en deux également au point L , élevez en ce point L la perpendiculaire LM égale à la hauteur du cone. Joignez les droites MI , MK , qui représenteront les côtes de ce cone, que je suppose droit, comme si ce cone avoit été coupé par un plan tiré par son axe, de sorte que le Triangle isoscèle IKM représentera le Triangle de l'axe.

Cela étant fait, prolongez la perpendiculaire LM en N , autant au-dessus du point M , qui représente la pointe du cone, que vous voudrez que l'œil soit élevé au-dessus de cette pointe; en sorte que la ligne MN soit égale à la distance de l'œil au sommet du cone. Ayant divisé la moitié IL de la base IK en autant de parties égales que le demi-diamètre AO du prototype, tirez du point N , par les points de division 1, 2, les droites N_1 , N_2 , qui donneront sur le côté IM les points 4, 3. Enfin décrivez de la pointe du cone & des intervalles M_3 , M_4 , des circonferences de cercles sur la convexité du cone, qui représenteront les circonferences du prototype $ABCD$. Puis ayant divisé la circonference de la base du cone en autant de parties égales qu'en contient la circonference $ABCD$, tirez de la pointe du cone par les

points de division autant de lignes droites, qui avec les circonferences précédentes, diviseront la surface convexe du cone en 24 espaces difformes, qui représenteront ceux du prototype ABCD, & dans lesquels par conséquent on transportera la figure de ce prototype, qui se trouvera difforme sur la surface du cone, & qui étant regardé de l'œil mis directement au-dessus de la pointe du cone à la distance MN, paroîtra comme une surface plane, & conforme à son prototype.

R E M A R Q U E.

Plan-
che 25.
Fig. 87.

Ce que nous venons de faire sur la surface convexe d'un cone posé sur sa base, se peut pratiquer de la même façon sur la surface concave d'un cone creux, posé sur sa pointe, excepté qu'il faut prolonger la perpendiculaire LM au-delà du point L en N; de sorte que la ligne MN soit égale à la distance de l'œil à la pointe du cone, qui dans ce cas lui doit servir de base, afin que l'œil placé en N, le puisse voir par le dedans, &c.

P R O B L E M E X L V I I I.

Décrire sur un plan horizontal une figure difforme, qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Miroir cylindrique droit, étant vûe par réflexion d'un point donné.

Fig. 88.

IL faut premièrement enfermer dans un quarré, comme ABCD, la figure qu'on veut déguiser, & diviser ce quarré ABCD en seize autres petits quarez, qui serviront à transporter la figure du prototype sur les quarez semblables difformes qu'on

qu'on aura décrits sur la surface placée au pied du Miroir cylindrique, dont la base est le cercle $FGHI$, qui a le point E pour centre. Ce qui se fera en cette sorte.

Plans
che 51.
Fig. 88.

Si K est l'assiete de l'œil, c'est-à-dire, le point qui répond sur le plan horizontal perpendiculairement à l'œil, qui peut être éloigné du cylindre d'un ou de deux pieds, & un peu plus haut que le cylindre, afin qu'il puisse voir par réflexion plus de parties du plan horizontal; tirez par ce point K & par le centre E , la droite KE . Divisez KE en deux parties égales au point L . De ce point L & pour rayon LE , décrivez l'arc de cercle FEH , qui donnera sur la circonférence $FGHI$, les deux points F, H . Par le point K , & par les points F, H , vous tirerez les droites KFS, KHT , qui toucheront cette circonférence aux mêmes points F, H .

Après cela divisez chacun des deux arcs égaux EF, EH , en deux également aux points M, N , & tirez du point K par les points M, N , les droites KM, KN , qui donneront sur la circonférence $FGHI$, les deux points O, P . Par ces points O, P , vous tirerez les deux lignes OQ, PR , en sorte que l'angle de réflexion FOQ soit égal à l'angle d'incidence POK , en prenant la ligne KO pour un rayon d'incidence; & que pareillement l'angle de réflexion HPR soit égal à l'angle d'incidence OPK , en prenant la ligne KP pour un rayon d'incidence. Alors les cinq lignes IK, OQ, PR, FS, HT , représenteront les lignes du prototype, qui sont parallèles aux deux côtes AD, BC , que les deux touchantes FS, HT , représentent. Il ne reste plus qu'à diviser ces lignes en quatre parties égales en représentation; ce que je

Plan-
che 25.
Fig. 88.

ferai de la manière qui suit, pour avoir plutôt fait, sans que l'erreur puisse être considérable.

Ayant mené par le point I, où la ligne KE coupe la circonférence FIH, la ligne 1, 2, perpendiculaire à la même ligne KE, qui sera terminée aux points 1, 2, par les deux touchantes KF, KH, tirez du centre E par le point H la droite Ho, que vous ferez égale à la ligne 1, 2, & divisez-la en quatre parties égales aux points 7, 8, 9. Tirez ensuite par le point K, la droite KX, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallèle à la ligne Ho, ou perpendiculaire à la touchante KH. Ayant appliqué une règle bien droite au point X, & aux points de division 7, 8, 9, 0, marquez des points sur la ligne HT, dans les endroits où elle se trouvera coupée successivement par la règle. La ligne HT se trouvera divisée aux points 7, 8, 9, T, en parties égales en apparence à celles de la ligne 1, 2, qui est divisée par les lignes tirées du point K, en quatre parties qui sont presque égales entr'elles. Enfin portez les divisions de la touchante HT sur l'autre touchante FS.

Pour diviser la ligne PR en quatre parties égales en représentation à celles de la ligne 1, 2, tirez par le point P la ligne P6, que vous ferez perpendiculaire à la ligne KP, & égale à la ligne 1, 2. Divisez cette perpendiculaire P6 en quatre parties égales aux points 3, 4, 5. Tirez pareillement par le point K, la ligne KV, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallèle à la ligne P6, ou perpendiculaire à KP. Ayant, comme auparavant, appliqué une règle au point V, & aux points de division 3, 4, 5, 6, marquez sur la ligne KP prolongée les points 3, 4, 5, 6,

dans les endroits où elle sera coupée par la règle. Plan-
 Enfin portez les divisions de la ligne PN sur cha- che 25.
 cune des deux lignes PR, OQ, & faites passer Fig. 88,
 par les points également éloignez de la circonfé-
 rence FGHI, qui ont été marquez sur les quatre
 lignes FS, OQ, PR, HT, quatre circonféren-
 ces de cercle, qui avec les lignes droites FS,
 OQ, IK, PR, HT, formeront seize quarrez
 difformes, dans lesquels on transportera la figure
 du prototype ABCD, qui se trouvera défigurée
 sur le plan horizontal, & qui paroîtra dans sa
 perfection sur la surface convexe du Miroir cylin-
 drique, posé droit sur la base FGHI, quand elle
 sera vûe par réflexion de l'œil élevé perpendiculai-
 rement sur le point K à une hauteur égale à la li-
 gne KV, ou KX. Voyez la remarque du Pro-
 blême suivant.

PROBLEME XLIX.

*Décrire sur un plan horizontal une figure difforme
 qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Mi-
 roir conique élevé à angles droits sur ce plan,
 étant vûe par réflexion d'un point donné dans
 l'axe prolongé de ce Cone.*

Décrivez autour de la figure que vous voulez Plan-
 déguiser, le cercle ABCD d'une grandeur che 26.
 prise à volonté, & divisez sa circonférence en tel Fig. 89,
 nombre de parties égales qu'il vous plaira. Tirez
 du centre E par les points de division autant de
 demi-diamètres, dont l'un, comme AE, ou DE,
 doit aussi être divisé en un certain nombre de par-
 ties égales. Décrivez du centre E par les points
 de division autant de circonférences de cercle, qui

Plan-
che 26.
Fig. 89.

avec les demi-diamètres précédens , diviseront l'espace terminé par la première & plus grande circonférence ABCD , en plusieurs petits espaces, qui serviront à contretirer la figure qui y sera comprise , & à la défigurer sur le plan horizontal autour de la base FGHI du Miroir conique en cette sorte.

Ayant pris le cercle FGHI, dont le centre est O, pour la base du cone, faites à part le Triangle rectangle KLM, dont la base KL soit prise égale au demi-diamètre OG de la base du cone, & la hauteur KM égale à la hauteur du même cone. Prolongez cette hauteur KM en N, de sorte que la partie MN soit égale à la distance de l'œil à la pointe du cone, ou toute la ligne KN égale à la hauteur de l'œil au-dessus de la base du cone. Ayant divisé la base KL en autant de parties égales qu'en contient le demi-diamètre AE, ou DE, du prototype, tirez du point N, par les points de division P, Q, R, autant de lignes droites, qui donneront sur l'hypoténuse LM, qui représente le côté du cone, les points S, T, V. Faites au point V l'angle LV₁ égal à l'angle LVR, au point T l'angle LT₂ égal à l'angle LTQ, au point S l'angle LS₃ égal à l'angle LSP, & au point M, qui représente le sommet du cone, l'angle LM₄ égal à l'angle LMK, pour avoir sur la base KL prolongée les points 1, 2, 3, 4.

Enfin décrivez du centre O de la base FGHI du Miroir conique, & des intervalles K₁, K₂, K₃, K₄, des circonférences de cercle, qui représenteront celles du prototype ABCD, & dont la plus grande doit être divisée en autant de parties égales que la circonférence ABCD. Puis tirez du centre O, par les points de division des demi-diamètres,

qui donneront sur le plan horizontal autant de petits espaces difformes que dans le prototype ABCD, dans lesquels par conséquent on pourra transporter la figure du prototype. Cette image se trouvera extrêmement défigurée sur le plan horizontal, & paroîtra néanmoins par réflexion dans ses justes proportions sur la surface du Miroir conique posée sur le cercle FGHI, quand l'œil sera mis perpendiculairement au-dessus du centre O, & éloigné de ce centre O d'une distance égale à la ligne KN.

R E M A R Q U E.

Pour ne vous pas tromper en transportant ce qui est dans le prototype ABCD, sur le plan horizontal, on prendra garde que ce qui est le plus éloigné du centre E, doit être le plus proche de la base FGHI du Miroir conique, comme vous voyez par les mêmes lettres *a, b, c, d, e, f, g, h*, du plan horizontal & du prototype. On observera la même chose à l'égard d'un Miroir cylindrique, comme vous voyez aussi par les quatre lettres semblables *a, b, c, d*, du plan horizontal & du prototype. Plan. che 25. Fig. 88.

P R O B L E M E E.

Décrire une Lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puisse lire la nuit de fort loin.

FAites une Lanterne qui ait la forme d'un cylindre, ou d'un petit tonneau situé selon sa longueur, comme un tonneau de vin posé dans une cave, en sorte que la fumée passe par le bondon. Mettez à l'un de ses deux fonds un Miroir

concave parabolique. Appliquez à son foyer la flamme d'une bougie, dont la lumière se réfléchira fort loin en passant par l'autre fond qui doit être ouvert, & elle paroîtra si éclatante, que de nuit on pourra lire de fort loin des lettres très-petites, lorsqu'on les regardera avec des lunettes de longue-vûe. Ceux qui verront de loin la lumière de cette bougie, croiront voir un grand feu, qui paroîtroit encore plus éclatant, si la Lanterne étant étamée par le dedans, avoit la figure d'une Ellipse.

R E M A R Q U E.

On se sert aussi d'un semblable Miroir pour la *Lanterne Magique*, ainsi appelée, parce que par son moyen l'on fait voir sur une muraille blanche de quelque chambre obscure tout ce que l'on veut. De sorte qu'on peut faire paroître des monstres & des spectres si affreux, que celui qui les voit sans en connoître le secret, croit que cela se fait par magie. La lumière qui se réfléchit par le moyen de ce Miroir, passe par un trou de la Lanterne, où il y a un verre de lunette. On fait passer entre ce verre & la lumière une pièce de bois plate & déliée, contenant plusieurs petits verres peints de diverses figures extraordinaires & affreuses, que l'on fait couler successivement par une fente qui est dans le corps de la Lanterne. Ces petites figures se représentent sur la muraille opposée avec leurs mêmes couleurs & proportions en plus grand volume: ce qui donne de la terreur, & cause de l'admiration aux spectateurs qui n'en connoissent pas l'artifice. Voyez les Problèmes de Physique.

PROBLEME LI.

Par le moyen de deux Miroirs plans faire paroître un visage sous des formes différentes.

Ayant placé horizontalement l'un des deux Miroirs plans, élevez l'autre à peu près à angles droits au-dessus du premier : les deux Miroirs demeurant dans cette situation, si vous vous approchez du Miroir perpendiculaire, vous y verrez votre visage tout-à-fait difforme & imparfait. Car il paroîtra sans front, sans yeux, sans nez & sans oreilles, vous ne verrez que la bouche & le menton fort élevez. Si vous inclinez tant soit peu le Miroir perpendiculaire, votre visage y paroîtra avec toutes les parties, excepté les yeux & le front. Si vous l'inclinez un peu plus, vous y verrez deux nez & quatre yeux, & en l'inclinant encore un peu davantage, vous y verrez trois nez & six yeux. Si vous continuez à l'incliner un peu davantage, vous ne verrez plus que deux nez, deux bouches & deux mentons ; & en l'inclinant encore un peu plus, vous y verrez seulement un nez & une bouche : & votre visage cessera de paroître entierement dans ce Miroir, si vous l'inclinez encore un peu plus ; ce qui arrivera lorsque l'angle d'inclinaison sera d'environ 45 degrez.

Si vous inclinez les deux Miroirs l'un à l'autre, vous y pourrez voir votre visage tout entier, & par les différentes inclinaisons, vous verrez dans le même Miroir l'image de votre visage alternativement droite & renversée, &c.

REMARQUES.

Si on mêle avec la matière du Miroir, lorsqu'elle

est encore dans la fournaise , un peu de massicot , de safran , ou quelque autre couleur jaune , celui qui s'y mirera paroîtra avoir la jaunisse. Si on y mêle du noir en petite quantité , il paroîtra avoir la face livide & comme plombée : si on en mêle en plus grande quantité , il semblera avoir le visage d'un Ethiopien. Si on y jette de la lacque , du cinabre ou vermillon , celui qui s'y regardera , sera étonné de se voir tout rouge & comme enflammé de colere , ou enluminé comme un yvrogne. En un mot , on paroîtra avoir autant de couleurs différentes qu'on en aura mêlé dans la matière dont on aura fait les Miroirs , où l'on se regardera.

P R O B L E M E L I I.

Faire voir un Jetton qui seroit caché à l'œil dans le fond d'un vase vuide.

ON a mis un jetton C au fond d'un vase vuide AB. On s'est éloigné du vase , jusqu'à ce que l'extrémité E du bord de ce vase ait caché ce jetton à l'œil placé en D. On propose de faire en sorte que l'œil apperçoive le jetton , sans changer la situation de l'un ni de l'autre. Faites emplir d'eau le vase : aussitôt l'œil appercevra le jetton , comme s'il étoit un peu élevé vers F.

On a déjà dit que les rayons de lumière se rompoient en s'écartant de la perpendiculaire , lorsqu'ils passaient d'un milieu transparent dans un autre milieu transparent plus fluide. Le vase étant vuide , on ne pouvoit appercevoir le jetton , parce que le bord du vase empêchoit les rayons de lumière d'être réfléchis du jetton à l'œil. Mais le

vase ayant été rempli d'eau, un rayon de lumière, par exemple, CE, sortant de l'eau, au lieu de continuer jusqu'en G par la droite EG, se détourne, & va frapper l'œil par la ligne ED, qui s'écarte de la perpendiculaire EH.

Ce jetton paroît un peu élevé vers F, à cause qu'on croit le voir par la ligne droite DF, qui est égale aux deux lignes AE & EC.

On explique par ce principe pourquoi un bâton mis obliquement dans l'eau, paroît rompu.

P R O B L E M E L I I I.

Représenter une Iris sur le plancher d'une chambre obscure.

IL faut se servir d'un prisme triangulaire, que les Artisans appellent simplement *triangle*, qui étant appliqué sur la racine du nez, fait paroître les objets avec des couleurs semblables à celles de l'Iris, ou Arc-en-ciel. Mettez ce prisme à une fenêtre de la chambre où le Soleil donne, les rayons du Soleil en passant au travers de ce verre triangulaire, formeront sur le plancher de la chambre une Iris, qui sera très-agréable à voir, principalement si le plancher est fait en voûte, parce que cela donnera à l'Iris une figure ronde & semblable à celle de l'Iris que nous voyons dans les nuées.

R E M A R Q U E S.

Ce prisme triangulaire nous donne occasion de rapporter ici ce que M. de Mairan a dit dans sa Dissertation sur les Phosphores & les Noctiluques, touchant les rayons de lumière qui passent

au travers d'un prisme triangulaire. Voici de quelle manière il s'exprime.

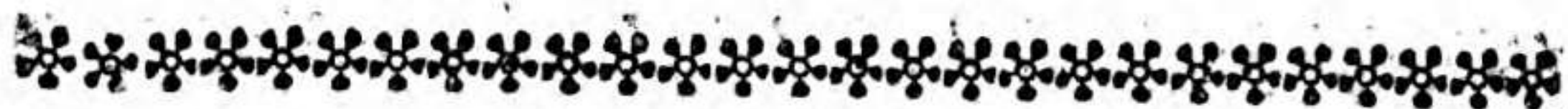
- » On prouve par des expériences décisives ,
- » Que la lumière contient en elle-même toutes les
- » couleurs indépendamment des configurations in-
- » térieures ou extérieures des corps au travers des-
- » quels elle passe , ou sur lesquels elle se réfléchit ;
- » c'est-à-dire , qu'un rayon sensible du Soleil , par
- » exemple , est composé de particules de différente
- » espèce , dont chacune a la propriété d'exciter
- » dans l'ame , par le moyen de l'organe de la vûe ,
- » le sentiment de couleur particulière de cette es-
- » pèce , sans qu'aucune réflexion , ni qu'aucune
- » réfraction puisse jamais la changer.
- » Que le blanc n'est pas proprement une couleur ,
- » mais un composé de toutes les couleurs , & que
- » le noir au contraire n'est que la négation de tou-
- » tes les couleurs.
- » Que chaque couleur des corps ne consiste dans
- » la figure & dans l'arrangement particulier des
- » parties qui le composent , qu'entant qu'ils sont
- » par-là plus propres à rompre & à absorber dans
- » leurs pores la lumière d'une certaine couleur , &
- » à réfléchir celles d'une autre couleur. Ainsi le
- » carmin , par exemple , est fort rouge , parce qu'il
- » ne réfléchit que la lumière rouge , & que toutes
- » les autres espèces de lumière se rompent & se
- » perdent dans les pores sans se réfléchir.
- » Enfin que chaque espèce de lumière a sa réfra-
- » ction déterminée , c'est-à-dire , que chaque cou-
- » leur en passant obliquement d'un milieu dans un
- » autre , de l'air , par exemple , dans le cristal se
- » rompt à sa rencontre par un angle particulier ,
- » différent de celui des autres couleurs. C'est ce
- » que *M. Newton* , Auteur de cette découverte ,

appelle la *différente réfrangibilité des couleurs de la lumière*. C'est principalement par cette propriété qu'il a reconnu toutes les autres, & les ingénieuses expériences dont il s'est servi pour s'en assurer, pourroient toutes seules immortaliser un nom moins célèbre que le sien. Voici la plus facile, qui suffira néanmoins pour mettre les personnes qui n'ont pas vû l'Optique de M. Newton, au fait de ce que j'ai à dire sur cette matière.

Faites entrer un rayon de soleil dans une chambre obscure, par un petit trou rond de 3 ou 4 lignes de diamètre : placez horizontalement auprès de ce trou un prisme triangulaire de verre, dans une telle situation, que le rayon du Soleil soit à peu près perpendiculaire à l'axe de ce prisme, & qu'il entre par une de ses surfaces, & sorte par l'autre, de manière que le tranchant formé par ces deux surfaces, regarde en bas. Ce rayon, après avoir traversé le prisme, entrera dans la chambre, en s'étendant de bas en haut, & s'ira peindre sur le mur opposé. Il est encore mieux de le recevoir sur un carton bien blanc, à sept ou huit pas de la fenêtre, & il y formera une bande verticale d'un pied de longueur, par exemple, & de deux ou trois pouces de largeur. Cette bande contiendra séparément les cinq *couleurs primitives*, rouge, jaune, verd, bleu & violet, qui la diviseront en cinq espaces un peu inégaux, en commençant par le bas dans l'ordre précédent, rouge, &c. Les nuances, ou les couleurs secondes, se trouveront entre les couleurs primitives, dont elles participent ; sçavoir, entre le rouge & le jaune, le couleur d'or foncé ; entre le bleu azuré & le violet, le bleu turquin, & ainsi des au-

» tres. Si l'on fait passer au travers d'un autre pris-
 » me , à quatre ou cinq pas du premier , une seule
 » de ces couleurs séparées , qui composoient le
 » rayon , elle ne changera point du tout en s'y rom-
 » pant , parce qu'elle ne contient qu'une lumière
 » homogène : mais si on les ramasse toutes par le
 » moyen de quelque verre convexe , elles se con-
 » fondront , & il se formera de leur confusion un
 » nouveau rayon de lumière blanc tirant sur le jau-
 » ne , & tel qu'il étoit en partant du Soleil , ou
 » avant que d'avoir traversé ce premier prisme.
 » On peut varier cette expérience de mille manié-
 » res , & à force de filtrer , si je l'ose dire , & de
 » tamiser ainsi la lumière , se convaincre parfaite-
 » ment qu'elle a toutes les propriétés dont j'ai fait
 » mention. Il faut observer sur-tout que le diffé-
 » rent degré de *réfrangibilité* de ses couleurs , lors-
 » qu'elle passe au travers d'un prisme , est l'uni-
 » que cause de leur séparation , & qu'ainsi le violet ,
 » par exemple , est plus *réfrangible* que le rouge
 » de la quantité d'un angle , dont le sinus est pro-
 » portionnel à la distance qu'il a du rouge au vio-
 » let dans la bande verticale.

Fin du premier Tome.



T A B L E

D E S P R O B L E M E S.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

PROBLEME I. *Des Religieuses sont retirées en huit Cellules tellement disposées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du Dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres est au milieu de chaque côté. L'Abbesse, qu'on suppose aveugle, fait sa visite : elle compte le nombre des Religieuses qui sont dans les trois Cellules d'un rang; elle trouve que le nombre des Religieuses d'un rang est égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour un rang deux Cellules des coins & celle du milieu. Cette Abbesse fait une seconde visite, & compte dans chaque rang le même nombre de personnes que dans la première visite, quoiqu'il y soit entré quatre hommes. Enfin dans la troisième visite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de personnes qu'au paravant, quoique les quatre hommes soient sortis, & qu'ils ayent emmené chacun une Religieuse. page 1*

PROBL. II. *On a mené sur le bord d'une riviere un Loup, une Chèvre & un Chou. On propose à un Batelier de les passer seul à seul, de manière qu'en son absence le Loup ne fasse aucun mal à la Chèvre, & que la Chèvre ne touche point au Chou. 3*

PROBL. III. *Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obscure, au passage d'une riviere. Ils rencontrent un bateau sans Batelier. Ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter que deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront deux à deux, de sorte qu'aucune*

T A B L E

| | |
|--|----|
| <i>femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.</i> | 4 |
| PROBL. IV. <i>Faire l'addition d'une manière particulière, & qui soit inconnue à tout autre.</i> | 5 |
| PROBL. V. <i>Soustraire par une seule opération plusieurs sommes de plusieurs autres sommes données.</i> | 6 |
| PROBL. VI. <i>Multiplication abrégée.</i> | 7 |
| <i>Multiplication par les doigts.</i> | 11 |
| <i>Autre Multiplication abrégée.</i> | 12 |
| PROBL. VII. <i>Division abrégée.</i> | 13 |
| PROBL. VIII. <i>De quelques propriétés des nombres.</i> | 16 |
| <i>Règle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra.</i> | 39 |
| <i>Table des nombres premiers entre 1 & 10000.</i> | 47 |
| PROBL. IX. <i>Des Triangles rectangles en nombres.</i> | 50 |
| PROBL. X. <i>De la Progression Arithmétique.</i> | 56 |
| QUESTION I. <i>Un propriétaire fait faire un puits à un Masson, avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la première toise de profondeur, 5 pour la seconde, 7 pour la troisième, & ainsi de suite en augmentant de 2 liv. à chaque toise, jusqu'à 20 toises de profondeur. On demande combien il sera dû au Masson quand les 20 toises de profondeur seront achevées.</i> | 60 |
| QUEST. II. <i>Un Voyageur a fait 100 lieues en huit jours; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait 2 lieues; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.</i> | 61 |
| QUEST. III. <i>Un Voyageur a fait 100 lieues en 8 jours, & il a fait chaque jour 3 lieues plus que le précédent; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.</i> | 62 |
| QUEST. IV. <i>Un Voleur en s'enfuyant fait 8 lieues par jour; il est poursuivi par un Archer qui n'a fait que 3 lieues le premier jour, 5 le second, 7 le troisième, & ainsi de suite en augmentant de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'Archer atteindra</i> | |

DES PROBLÈMES.

le Voleur, & combien de lieues chacun aura fait. 63

QUEST. V. On suppose que de Paris à Lyon il y a 100 lieues, que deux Couriers sont partis en même tems & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faisant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris en faisant 3 lieues chaque jour plus que le précédent: & que précisément au milieu du chemin ils se sont rencontrés, le premier au bout de 5 jours, & le second au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux Couriers ont fait chaque jour. 64

QUEST. VI. Il y a un panier & cent pommes rangées en ligne droite, & éloignées par tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes après les autres, & de les rapporter dans le panier, qui resteroit toujours dans la même place. 65

QUEST. VII. Un Marchand est convenu avec un de ses créanciers de lui donner de l'argent chaque semaine: la première semaine il lui a donné cent liv. la seconde quatre cens liv. il a augmenté chaque semaine son paiement de trois cens liv. On demande combien il a payé la vingt-huitième semaine. 66

QUEST. VIII. Un réservoir a douze canaux: par le second il s'écoule dans une heure 2 pintes d'eau plus que par le premier: par le troisième 2 pintes plus que par le second, & ainsi de suite. On sçait que tous ces canaux laissent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut sçavoir combien chacun de ces canaux laisse écouler d'eau pendant une heure. 67

QUEST. IX. Un pere de famille ordonne par son testament que l'aîné de ses enfans prendra sur tous ses biens 10000 liv. & le septième de ce qui restera; que le second prendra 20000 liv. & le septième de ce qui restera; que le troisième prendra 30000 liv. & le septième de ce qui restera, & ainsi de suite en augmen-

T A B L E

- tant toujours de 10000 liv. avec le septième du restant. Les enfans ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partages. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la somme que chacun a eu.* 67
- PROBL. XI. De la Progression Géométrique.** 68
- QUEST. I.** *Un grand Navire en poursuit un plus petit, dont il est éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus vite que le plus petit: ils sont sur le même Rumb. On demande le chemin que le grand Navire doit faire pour atteindre le petit.* 75
- QUEST. II.** *On suppose qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une Tortue, qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il est possible qu'Achille attrape cette Tortue, & à quelle distance il l'attrapera.* 76
- QUEST. III.** *Une pendule à deux aiguilles, l'une des heures, & l'autre des minutes. Supposons qu'elles partent toutes deux du point de midi, on demande en quel autre point elles doivent se rencontrer. ibid.*
- QUEST. IV.** *Un Maquignon vend un très-beau cheval; il se contente du prix du vingt-quatrième clou du cheval, pourvu qu'on veuille compter de manière que du premier clou on donnât 1 denier, du second 2 deniers, du troisième 4 deniers, & ainsi de suite, en doublant les deniers jusqu'au vingt-quatrième clou. On demande de quel prix seroit le cheval.* 77
- QUEST. V.** *Une vieille Dame possède trente-deux belles Terres; elle est fort avare, elle aime l'argent encore plus que ses Terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaisir de marcher sur l'or; mais pour ne point effrayer un de ses héritiers, qui est homme de cœur, elle ne propose d'abord que la moindre à vendre, sous prétexte que l'argent est rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ses coffres soient pleins. On offre de lui donner pour cette Terre*

DES PROBLEMES.

la somme qui conviendroit à la trente-deuxième de ses Terres, si on payoit 1 sol pour la première, 2 sols pour la seconde, 4 sols pour la troisième, & ainsi de suite en doublant les sols jusqu'à la trente-deuxième Terre. Cette Dame appréhende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de sa Terre. 78

QUEST. VI. On suppose qu'un grain de bled produise 50 autres grains dans la première année; qu'on sème ces 50 grains, & qu'ils produisent chacun 50 grains la deuxième année, & ainsi de suite. On demande quel sera le nombre des grains de bled qui seront produits pendant douze ans. 79

QUEST. VII. 80

PROBL. XII. Des Quarrez Magiques. 82

Des Quarrez Magiques impairs, formez par des termes en progression Arithmétique. 83

QUEST. Disposer en trois rangs les neuf premières cartes, depuis l'as jusqu'au neuf, de sorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, fassent ensemble une même somme. 93

Des Quarrez Magiques pairs formez par des termes en progression Arithmétique. 94

Des Quarrez Magiques pairs formez par des termes en progression Géométrique. 98

Des Quarrez Magiques impairs, dont les termes sont en progression Géométrique. 100

Des Quarrez Magiques en proportion Harmonique. 101

PROBL. XIII. Du Triangle Arithmétique. 103

Des Combinaisons. ibid.

QUEST. I. 112

QUEST. II. 113

Des Permutations. ibid.

TABLE

| | |
|---|-------|
| QUEST. I. | 118 |
| QUEST. II. | ibid. |
| QUEST. III. | 119 |
| QUEST. IV. | ibid. |
| QUEST. V. | 120 |
| QUEST. VI. | 121 |
| QUEST. VII. | 122 |
| <i>Des Partis du Jeu.</i> | 123 |
| <i>Du Jeu des Dez.</i> | 131 |
| PROBL. XIV. <i>Plusieurs Dez étant jettez, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.</i> | 135 |
| PROBL. XV. <i>Deux Dez étant jettez, trouver les points de dessus de chaque Dé, sans les voir.</i> | 138 |
| PROBL. XVI. <i>Trois Dez étant jettez, trouver les points de dessus de chaque Dé, sans les voir.</i> | 140 |
| PROBL. XVII. <i>Deviner le nombre que quelqu'un a pensé.</i> | 143 |
| PROBL. XVIII. <i>Trouver le nombre qui reste à quelqu'un après quelques opérations, sans lui rien demander.</i> | 151 |
| PROBL. XIX. <i>Trouver le nombre que quelqu'un aura pensé, sans lui rien demander.</i> | 154 |
| PROBL. XX. <i>Deviner deux nombres que quelqu'un aura pensé.</i> | 156 |
| PROBL. XXI. <i>Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensé.</i> | 160 |
| PROBL. XXII. <i>Une personne tenant dans une main un certain nombre pair de pistoles, & un nombre impair en l'autre main, deviner en quelle main est le nombre pair.</i> | 164 |
| QUESTION. <i>Une personne tenant une pièce d'or dans une main, & une pièce d'argent en l'autre, trouver en quelle main est la pièce d'or, & en quelle main est la pièce d'argent.</i> | 166 |

DES PROBLEMES.

- PROBL. XXIII.** Trouver deux nombres, dont on connoît la raison & la différence. 167
- QUESTION.** Quelqu'un ayant dans une main autant de pièces de monnoye que dans l'autre, deviner combien il y en a en chaque main. 168
- PROBL. XXIV.** 169
- QUEST. I.** Une personne ayant pris autant de jettons, ou pièces de monnoye dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout. 169
- QUEST. II.** Une personne charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres, &c. 175
- QUEST. III.** De l'Asne & du Mulet. 176
- QUEST. IV.** Les Graces portant des couronnes de fleurs, &c. 178
- QUEST. V.** Trois personnes veulent acheter une maison 26000 livres; mais ils sont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troisieme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun. 179
- QUEST. VI.** Un pere en mourant laisse sa femme enceinte, &c. *ibid.*
- QUEST. VII.** On dit d'une personne qu'elle a passé le quart de sa vie en enfance, la cinquieme partie en la jeunesse, le tiers en l'âge viril, & qu'il y a 13 ans qu'elle a commencé à entrer dans la vieillesse. On demande l'âge de cette personne. *ibid.*
- QUEST. VIII.** Quarante-une personnes se sont trouvées à un repas: il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépense a été de 40 sols; les hommes ont payé 4 sols par tête, les femmes 3 sols chacune, & les enfans 4 deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans. 180
- QUEST. IX.** Du Lion de bronze, &c. *ibid.*

T A B L E

- QUEST. X.** *Trois Imprimeurs veulent entreprendre l'impression d'un livre , &c.* 181
- PROBL. XXV.** *Deux personnes étant convenu de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre proposé, en continuant alternativement jusqu'à ce que tous leurs nombres fassent ensemble un nombre déterminé plus grand que le proposé, faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.* 182
- PROBL. XXVI.** *Diviser un nombre donné en deux parties, dont la raison soit égale à celle de deux nombres donnez.* 184
- QUEST. I.** *Faire la monnoye d'un écu blanc en deux espèces différentes, en sorte qu'il y ait autant d'une espèce que de l'autre.* 185
- QUEST. II.** *Un Marchand de vin n'a que deux sortes de vins, l'un à 10 sols, & l'autre à 5 sols la bouteille. On lui demande 30 bouteilles de vin à 8 sols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de sorte que la bouteille revienne à 8 sols?* 187
- PROBL. XXVII.** *Trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par des nombres donnez, il reste par tout 1, & étant divisé par un autre nombre donné, il ne reste rien.* 188
- QUESTION.** *Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourse, qu'une personne dit avoir perdue, & qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en restoit toujours un, & qu'en les comptant sept à sept, il n'en restoit point.* 192
- PROBL. XXVIII.** *Diviser plusieurs nombres donnez chacun en deux parties, & trouver deux nombres, en sorte que multipliant la première partie de chacun des nombres donnez par le premier nombre trouvé, & la seconde par le second, la som-*

DES PROBLEMES.

- me des deux produits soit par tout la même. 199*
- QUEST. I.** *Une femme a vendu 10 pommes au marché à un certain prix ; une autre femme en a vendu 25 au même prix , & une troisième femme en a vendu 30 aussi au même prix , & chacune a rapporté une même somme d'argent. On demande comment cela se peut faire. 201*
- QUEST. II.** *Du Chef de cuisine , &c. 211*
- QUEST. III.** *Une femme de la campagne a porté au marché des œufs , des fromages , &c. 212*
- PROBL. XXIX.** *Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle 1 , 2 , 3 , 4 , &c. étant disposés en rond ; deviner celui que quelqu'un aura pensé. ibid.*
- PROBL. XXX.** *Ayant fait prendre à trois personnes un nombre de jettons ou de cartes à certaines conditions , deviner combien chacun en aura pris. 214*
- PROBL. XXXI.** *De trois cartes inconnues , deviner celle que chacune des trois personnes aura prise. 215*
- PROBL. XXXII.** *Trois cartes ayant été présentées à trois personnes , deviner celle que chacun aura prise. 217*
- PROBL. XXXIII.** *Deviner entre plusieurs cartes celle que quelqu'un aura pensée. 218*
- PROBL. XXXIV.** *Plusieurs cartes différentes étant proposées successivement à autant de personnes , pour en retenir une dans sa mémoire , deviner celle que chacun aura pensé. 219*
- PROBL. XXXV.** *Plusieurs cartes étant disposées également en trois rangs , deviner celle que quelqu'un aura pensé. 220*
- PROBL. XXXVI.** *Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tirée d'un jeu de cartes. 221*
- PROBL. XXXVII.** *Deviner le nombre de tous les points qui sont en deux cartes qu'on aura tirées*

T A B L E

- d'un jeu de cartes entier.* 222
- PROBL. XXXVIII.** *Deviner le nombre de tous les points qui sont en trois cartes, qu'on aura tirées à volonté d'un jeu de cartes.* 224
- PROBL. XXXIX.** *De 16 jettons, deviner celui que quelqu'un aura pensé.* 231
- PROBL. XL.** *Du Jeu de l'Anneau.* 233
- PROBL. XLI.** *Plusieurs cartes étant disposées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.* 236
- PROBL. XLII.** *Ayant un vase rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre justement la moitié dans un autre vase de cinq pintes, par le moyen d'un troisième vase contenant trois pintes.* 238
- PROBL. XLIII.** *Une personne a une bouteille de douze pintes pleine de vin: il en veut donner six pintes au Frere Questeur; il n'a pour les mesurer que deux autres bouteilles, l'une de sept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les six pintes dans la bouteille de sept pintes?* 240
- PROBL. XLIV.** *Partager à trois personnes vingt-un tonneaux, dont il y en a sept vuides, sept pleins, & sept demi pleins; de telle maniere que ces trois personnes ayent autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.* 242
- PROBL. XLV.** *Quinze Chrétiens & quinze Turcs se trouvant, &c.* 246
- PROBL. XLVI.** *Trois choses ayant été distribuées secretement à trois personnes, deviner celle que chacun aura pris.* 250
- PROBL. XLVII.** *Trois personnes ont un certain nombre d'écus: la première personne donne des siens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune; ensuite la seconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune; enfin la troisième en*

DES PROBLEMES:

donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette distribution étant faite, il se trouve que chaque personne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune. 253

PROBL. XLVIII. Il se trouve trois personnes dans une compagnie, la seconde est plus âgée que la première de douze ans, la troisième est plus âgée que la seconde de treize ans: leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel est l'âge de chaque personne. 254

PROBL. XLIX. Découvrir si un ouvrage que l'Ouvrier a sûre être de pur or, est mêlé d'argent, sans l'endommager. ibid.

PROBL. L. Un Boucher donne commission d'acheter pour cent écus cent bêtes, sçavoir, des bœufs, des veaux, &c. 255

PROBL. LI. QUEST. I. Un particulier a fait marché avec un Ouvrier pour creuser un puits, &c. 256

QUEST. II. Un Tailleur a pris six aulnes de draps, qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet: on veut sçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demie aulne de large. 257

PROBL. LII. Faire parcourir au Cavalier du Jeu des Echets toutes les cases du Damier, l'une après l'autre, sans entrer deux fois dans la même case. 260

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

PROBLEME I. Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ses extrémités. 270

PROBL. II. Mener par un point donné une ligne parallèle à une ligne donnée. 271

PROBL. III. Diviser d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra. 272

T A B L E

- PROBL. IV.** Faire un angle qui soit la moitié, ou le double d'un angle donné. 273
- PROBL. V.** Faire un angle qui soit le tiers, ou le triple d'un angle donné. 274
- PROBL. VI.** Trouver à deux lignes données une troisième, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra. *ibid.*
- PROBL. VII.** Décrire sur une ligne donnée autant de Triangles différens qu'on voudra, dont les aires soient égales. 275
- PROBL. VIII.** Décrire sur une ligne donnée autant de Triangles différens qu'on voudra, dont les contours soient égaux. 276
- PROBL. IX.** Décrire deux Triangles isoscèles différens, de même aire, & de même contour. 277
- PROBL. X.** Décrire trois différens Triangles rectangles, dont les aires soient égales. 280
- PROBL. XI.** Décrire trois Triangles égaux, dont le premier soit rectangle, le second soit acutangle, & le troisième soit obtusangle. 282
- PROBL. XII.** Trouver une ligne droite égale à un arc de cercle donné. 284
- PROBL. XIII.** Trouver entre deux lignes données une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles. 286
- PROBL. XIV.** Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi la circonférence du cercle donné. 288
- PROBL. XV.** Décrire dans un demi-cercle donné trois cercles, qui touchent la circonférence & le diamètre de ce demi-cercle donné, & dont celui du milieu, qui est le plus grand, touche les deux autres, qui sont égaux. 289
- PROBL. XVI.** Décrire quatre cercles proportionnels, en sorte que leur somme soit égale à un cercle donné.

DES PROBLEMES.

donné, & que la somme de leurs rayons soit égale à une ligne donnée, 290

PROBL. XVII. Déterminer sur la circonférence d'un cercle donné un arc, dont le sinus soit égal à la corde d'un complément de cet arc. 291

PROBL. XVIII. Décrire un Triangle rectangle, dont les trois côtés soient en proportion Géométrique. 292

PROBL. XIX. Décrire quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné. 294

PROBL. XX. Décrire un Triangle rectangle, dont les trois côtés soient en Proportion Arithmétique. 295

PROBL. XXI. Décrire autour d'un Triangle équilatéral donné six cercles égaux, qui se touchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du Triangle, & les trois autres sont portés par ses sommets. 296

PROBL. XXII. Plusieurs demi-cercles qui se touchent au sommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres sur l'une de ces deux lignes étant données; déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites tirées de ces points à un point donné sur l'autre ligne perpendiculaire. 297

PROBL. XXIII. Décrire un Triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombre, soit égale au contour. 298

PROBL. XXIV. Décrire au dedans d'un Triangle équilatéral, trois cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les trois côtés de ce Triangle. 299

PROBL. XXV. Décrire un Triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombre, soit sesquialtere du

T A B L E

- contour aussi exprimé en nombres.* 301
- PROBL. XXVI.** *Décrire au dedans d'un quarré donné quatre cercles égaux, qui se couchent mutuellement, & qui touchent aussi les côtez de ce quarré.* 302
- PROBL. XXVII.** *Décrire un Parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres, soit égale au contour.* 303
- PROBL. XXVIII.** *Mesurer avec le chapeau une distance qui n'est accessible qu'en une de ses extrémités.* 305
- PROBL. XXIX.** *Mesurer une ligne horisontale, qui n'est accessible qu'en l'une de ses deux extrémités, par le moyen de deux bâtons inégaux.* 306
- PROBL. XXX.** *Mesurer une hauteur accessible par le moyen de son ombre.* 307
- PROBL. XXXI.** *Trouver à trois lignes données une quatrième proportionnelle.* *ibid.*
- PROBL. XXXII.** *Décrire sur une ligne donnée un Parallelogramme rectangle, dont l'aire soit double de celle d'un Triangle donné.* 308
- PROBL. XXXIII.** *Changer un Triangle donné en un autre Triangle, dont chaque côté soit plus grand que chaque côté du Triangle donné.* *ibid.*
- PROBL. XXXIV.** *Deux demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnez sur une même ligne droite. décrire un cercle qui touche la ligne droite, & les circonferences des deux demi-cercles donnez.* 309
- PROBL. XXXV.** *Trois demi-cercles qui se touchent en dedans, étant donnez sur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonferences des trois demi-cercles.* 311
- PROBL. XXXVI.** *Trois demi-cercles qui se touchent en dedans, étant donnez, &c.* 312
- PROBL. XXXVII.** *Décrire un Triangle, dont l'ai-*

DES PROBLÈMES,

- re & le contour soient un même nombre quarré. 314*
- PROBL. XXXVIII.** *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnez, sans en connoître le centre. 315*
- PROBL. XXXIX.** *Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrêmités, étant données, trouver sur cette ligne aussi donnée, un point également éloigné des deux autres extrêmités des deux lignes données. 316*
- PROBL. XL.** *Décrire deux Triangles rectangles, dont les lignes soient telles, &c. 317*
- PROBL. LXI.** *Diviser la circonférence d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux, en sorte que le demi-diamètre soit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs. 319*
- PROBL. LXII.** *Une Echelle d'une longueur connue, &c. 320*
- PROBL. LXIII.** *Mesurer une distance accessible sur la terre par le moyen de la lumière & du bruit d'un Canon. 321*
- PROBL. LXIV.** *Mesurer la surface d'un Parallélogramme. 323*
- PROBL. XLV.** *Mesurer la surface d'un Cercle. 325*
- QUEST. I.** *Une Cuisiniere étant allée au marché, &c. 327*
- QUEST. II.** *Une corde de 10 pieds de long entoure 200 piques; on veut sçavoir combien une corde de 8 pieds de long entourera de piques. 328*
- QUEST. III.** *Sempronius a emprunté de Caius un sac de blé, qui avoit 5 pieds de haut & 4 pieds de large: quand il falut rendre le blé, Sempronius prit quatre sacs hauts de 5 pieds, &c. ibid.*
- QUEST. IV. V. VI.** *ibid.*
- PROBL. XLVI.** *Tracer un ovale sur le terrain. 329*
- PROBL. XLVII.** *Mesurer la surface d'un ovale. 330*

T A B L E

PROBLEMES DE MUSIQUE.

- P**ROBLEME I. *Faire sur les accords les quatre opérations de l'Arithmétique.* 332
- P**ROBL. II. *Exprimer les accords par Logarithmes.* 334
- P**ROBL. III. *Partager l'intervalle de l'Octave en sept autres intervalles simples, qui sont les Tons & demi-Tons.* 335
- P**ROBL. IV. *Mesurer la durée des Tons.* 341
- P**ROBL. V. *Faire trembler sensiblement & à vûe d'œil la corde d'une Basse de Viole, ou de quelqu'autre Instrument, sans que personne y touche.* 342

PROBLEMES D'OPTIQUE.

- P**ROBL. I. *Faire qu'un objet étant vû de loin, ou de près, paroisse toujours de la même grandeur.* 346
- P**ROBL. II. *La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire sur AC à son extrêmité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC soit vûe la plus grande qu'elle puisse être vûe dans toute l'étendue de la ligne CZ.* 347
- P**ROBL. III. *L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui soit vûe de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.* 348
- P**ROBL. IV. *Trouver un point, duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroissent égales.* 349
- P**ROBL. V. *Un Anneau étant placé à une certaine distance, proposer de l'enfiler avec une Baguette recourbée par l'une de ses extrêmités.* 350
- P**ROBL. VI. *Représenter en Perspective tel objet que l'on voudra, sans se servir de point de vûe.* 351

DES PROBLEMES.

- PROBL. VII.** Représenter en perspective un Polyèdre équilatéral, terminé par six quarréz égaux, & par huit exagones réguliers & égaux entr'eux. 352
- PROBL. VIII.** Représenter en perspective un Polyèdre équilatéral, terminé par six Quarrez égaux, & par huit Triangles équilatéraux, & égaux entr'eux. 355
- PROBL. IX.** Représenter en perspective un Polyèdre équilatéral, terminé par six Quarrez égaux, & par douze Triangles isoscèles & égaux entr'eux, dont la hauteur est égale à la base. ibid.
- PROBL. X.** Représenter en perspective un Polyèdre équilatéral, terminé par douze Quarrez égaux, par huit exagones réguliers & égaux, & par six octogones réguliers & égaux. 357
- PROBL. XI.** Un point de quelque objet, & le lieu de l'œil, étant donnez, trouver le point de réflexion sur la surface d'un Miroir plat. 359
- PROBL. XII.** Tirer par derriere l'épaule un pistolet aussi justement que si on le couchoit en joue. 360
- PROBL. XIII.** Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface d'un Miroir plan, étant donnez, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet proposé. 361
- PROBL. XIV.** Se représenter dans un Miroir comme volant. 363
- PROBL. XV.** Disposer plusieurs Miroirs de maniere qu'on se voye dans chacun en même temps. ibid.
- PROBL. XVI.** Un mari jaloux étant dans une chambre, lui faire voir ce que fait sa femme, &c. 364
- PROBL. XVII.** Faire paroître dans un Miroir un autre objet que celui qui semble devoir y être représenté. 365
- PROBL. XVIII.** Faire une boete où l'on voye des objets, &c. 367

T A B L E.

- PROBL. XIX.** *Faire une machine d'Optique, où il paroîtra une galerie, &c.* 368
- PROBL. XX.** *Mesurer une hauteur par reflexion.* 372
- Des Miroirs cylindriques & spheriques.* 373
- PROBL. XXI.** *Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de reflexion sur la surface convexe d'un Miroir spherique, étant donnez, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.* ibid.
- PROBL. XXII.** *Déterminer le lieu de quelque objet, vu par reflexion sur la surface d'un Miroir cylindrique.* 376
- PROBL. XXIII.** *Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de reflexion sur la surface concave d'un Miroir spherique, étant donnez, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.* 377
- PROBL. XXIV.** *Des Miroirs ardans.* 379
- PROBL. XXV.** *Construire une chambre optique, où l'on voye les objets plus grands que la boete.* 390
- PROBL. XXVI.** *Faire le moule d'un Miroir concave spherique.* ibid.
- PROBL. XXVII.** *Faire la composition que l'on employe aux Miroirs de métal.* 392
- PROBL. XXVIII.** *Polir les Miroirs de métal.* 393
- Du Sable ou Grez.* ibid.
- Du Tripoli.* 394
- De la Potée d'Etain.* 395
- Des Spheres de verre, propres à produire du feu aux rayons du soleil.* 396
- PROBL. XXIX.** *Trouver le foyer d'une Sphere ou boule de verre.* ibid.
- Des Lentilles de verre, propres à produire du feu aux rayons du soleil.* 403
- PROBL. XXX.** *Trouver le foyer des Lentilles de ver-*

DES PROBLEMES.

- re convexes d'un côté & planes de l'autre, faites en forme de segment de Sphère.* ibid.
- PROBL. XXXI.** *Trouver le foyer des Lentilles de verre, convexes des deux côtés.* 406
- PROBL. XXXII.** *Trouver le foyer des Lentilles de verre, convexes d'un côté, & concaves de l'autre.* 407
- PROBL. XXXIII.** *Représenter dans une chambre fermée les objets, &c.* 411
- PROBL. XXXIV.** *Construire une chambre obscure, qu'on puisse transporter.* 415
- Usage de la Machine qu'on vient de décrire.* 420
- I.** *Représenter les objets dans leur situation naturelle.*
ibid.
- II.** *Représenter les objets, en faisant paroître à droite ce qui doit être à gauche.* 421
- III.** *Représenter tour à tour les objets qui sont aux environs d'une campagne ou d'un jardin, &c.* 423
- IV.** *Représenter des Tableaux ou des Tailles-douces.* ibid.
- PROBL. XXXV.** *Des Verres à facettes.* 426
- PROBL. XXXVI.** *Construire un Tableau Magique.* 428
- PROBL. XXXVII.** *De la Lanterne Magique.* 429
- PROBL. XXXVIII.** *Des Lunettes, d'approche ou Telescopes.* 430
- Des Microscopes.* 434
- PROBL. XXXIX.** *Faire une Lentille pour un Microscope simple.* 435
- PROBL. XL.** *Faire un Microscope avec la Lentille dont on vient de donner la construction.* 436
- Usage de ce Microscope.* ibid.
- PROBL. XLI.** *Faire un Microscope avec une goutte d'eau.* ibid.
- De la Perspective curieuse.* 439
- PROBL. XLII.** *Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un*

TABLE

- point déterminé. 439
- PROBL. XLIII.** Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse dans sa perfection, étant vüe par réflexion dans un Miroir plan. 440
- PROBL. XLIV.** Décrire sur un plan horizontal une figure difforme, qui paroisse au naturel sur un plan vertical transparent, posé entre l'œil & la figure difforme. 442
- PROBL. XLV.** Décrire sur la surface convexe d'une Sphere une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un point déterminé. 443
- PROBL. XLVI.** Décrire sur la surface convexe d'un cylindre une figure difforme, qui paroisse belle quand elle sera vüe d'un point déterminé. 445
- PROBL. XLVII.** Décrire sur la surface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroisse en son naturel, étant regardée d'un point déterminé. 446
- PROBL. XLVIII.** Décrire sur un plan horizontal une figure difforme, qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Miroir cylindrique droit, étant vüe par réflexion d'un point donné. 448
- PROBL. XLIX.** Décrire sur un plan horizontal une figure difforme qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Miroir conique élevé à angles droits sur ce plan, étant vüe par réflexion d'un point donné dans l'axe prolongé de ce cone. 451
- PROBL. L.** Décrire une Lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puisse lire la nuit de fort loin. 453
- PROBL. LI.** Par le moyen de deux Miroirs plans faire paroître un visage sous des formes différentes. 455
- PROBL. LII.** Faire voir un Jetton qui seroit caché à l'œil dans le fond d'un vase vuide. 456
- PROBL. LIII.** Représenter une Iris sur le plancher d'une chambre obscure. 457.

Fin de la Table du I. Tome.

TABLE DU TOME I.

DES RECREATIONS MATHÉMATIQUES,

Servant à trouver les pages où sont placées les Figures. Les petits chiffres qui sont dessus les chiffres des Figures, servent à trouver les pages où il en est fait mention.

| Pages | Planches. | Figures. | | | | | |
|-------|-----------|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 103 | I | pa. ¹¹⁴
103 | 213 | 270 | 271 | 272 | |
| | | fig. ¹
1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 113 | * | pa. ¹²¹
112 | 323 | 323 | 324 | 324 | 329 |
| | | fig. ¹
1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 275 | II | pa. ³⁷³
273 | 274 | 274 | 275 | 276 | 277 |
| | | fig. ⁶
6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 281 | III | pa. ²⁸⁰
280 | 282 | 284 | 286 | 287 | 288 |
| | | fig. ¹²
12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 290 | IV | pa. ²⁸⁹
289 | 290 | | | | |
| | | fig. ¹⁸
18 | 19 | | | | |
| 291 | V | pa. ²⁹¹
291 | 292 | 294 | | | |
| | | fig. ²⁰
20 | 21 | 22 | | | |
| 297 | VI | pa. ²⁹⁵
295 | 295 | 296 | 297 | | |
| | | fig. ²³
23 | 24 | 25 | 26 | | |
| 299 | VII | pa. ²⁹⁸
298 | 299 | 301 | 302 | 303 | |
| | | fig. ²⁷
27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |
| 307 | VIII | pa. ³⁰⁵
305 | 306 | 307 | 307 | 308 | 308 |
| | | fig. ³²
32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| | | pa. ³⁰⁹
309 | | | | | |
| | | fig. ³⁸
38 | | | | | |
| 311 | IX | pa. ³¹¹
311 | 312 | 314 | 314 | 315 | |
| | | fig. ³⁹
39 | 40 | 41 | 42 | 43 | |
| 317 | X | pa. ³¹⁶
316 | 317 | 319 | 346 | 340 | 349 |
| | | fig. ⁴⁴
44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| | | pa. ³⁶¹
347 | 359 | 360 | | | |
| | | fig. ⁵⁰
50 | 51 | 52 | | | |

Suite de la Table du Tome I.

| Pages | Planches. | Figures. | | | | |
|-------|-----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| 338 | 2 * | pa. 347 | 348 | | | |
| | | fig. 7 | 8 | | | |
| 351 | XI | pa. 360 | 372 | 351 | | |
| | | fig. 53 | 54 | 55 | | |
| 352 | XII | pa. 352 | 352 | | | |
| | | fig. 56 | 56 | | | |
| 353 | XIII | pa. 353 | 354 | | | |
| | | fig. 57 | 58 | | | |
| 355 | XIV | pa. 354 | 355 | | | |
| | | fig. 59 | 60 | | | |
| 356 | XV | pa. 351 | 352 | | | |
| | | fig. 61 | 62 | | | |
| 356 | XVI | pa. 356 | | | | |
| | | fig. 63 | | | | |
| 356 | XVII | pa. 356 | 356 | | | |
| | | fig. 64 | 65 | | | |
| 356 | XVIII | pa. 356 | 376 | | | |
| | | fig. 66 | 67 | | | |
| 357 | XIX | pa. 357 | 373 | | | |
| | | fig. 68 | 69 | | | |
| 359 | XX | pa. 358 | 377 | | | |
| | | fig. 70 | 71 | | | |
| 365 | 3 * | pa. 365 | 367 | 390 | 413 | 411 |
| | | fig. 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 381 | XXI | pa. 380 | 396 | 403 | 405 | 406 |
| | | fig. 72 | 73 | 74 | 75 | 76 |
| | | pa. 408 | 409 | | | |
| | | fig. 78 | 79 | | | |
| 416 | 4 * | pa. 423 | | | | |
| | | 420 | | | | |
| | | 416 | 417 | | | |
| | | fig. 14 | 15 | | | |

Suite de la Table du Tome I.

| <i>Pages</i> | <i>Planches.</i> | <i>Figures.</i> | | | |
|--------------|------------------|--------------------|-----------|-----------|----|
| 427 | 5 * | pa. 426
fig. 16 | 427
17 | 428
18 | |
| 430 | 6 * | pa. 429
fig. 19 | 456
20 | | |
| 440 | XXII | pa. 439
fig. 80 | 440
81 | 441
82 | |
| 442 | XXIII | pa. 442
fig. 83 | | | |
| 443 | XXIV | pa. 443
fig. 84 | 445
85 | | |
| 447 | XXV | pa. 446
fig. 86 | 448
87 | 448
88 | 88 |
| 452 | XXVI | pa. 451
fig. 89 | | | |

Bayerische
Staatsbibliothek
München

