LES AMUSEMENS *MATHÉMATIQUES*

PRECEDÉS

Des Elémens d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie néceſſaires pour l'intelligence des Problêmes.

Sapientem decet interdum Remittere aciem rebus agendis intentam. Aug. de Muſ.

A LILLE,

Chez ANDRÉ-JOSEPH PANCKOUCKE,

ET SE VEND A PARIS,

Chez TILLIARD, Libraire, Quai des Auguſtins, près le Pont Saint-Michel, à S. Paul.

M. DCC. XLIX.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

PRÉFACE.

IL ſemble qu'il faudroit remonter à l'origine de l'homme, pour détermi-ner l'époque de ſes amuſemens. De tout tems les hommes ont été ingénieux à ſe former des délaſſemens propres à diſſiper les ennuis de l'eſprit & à ranimer leurs forces. Expoſés à une infinité de fatigues qui les épuiſent, qui abattent * leur courage, qui énervent leur ſubſtance; la joie, le repos, les alimens

* Sanguis fervore ſolutus
Fervet enim motu nimio; ſubducitur, atque
Deficit exhalans paulatim, non aliter quàm
Ægrorum extenuant quum pallida corpora febres.
Paling. Libra.

ſont les remédes que la nature a préparés pour les rétablir dans une aſſiéte nouvelle.

En effet, chaque jour préſente dans un même individu un être nouveau, bien ou mal aſſorti ſelon que les impreſſions du repos, & celles des alimens variés à l'infini, l'état heureux ou malheureux de ſes affaires rétabliſſent ou détruiſent l'économie de ſa ſubſtance.

L'ame eſt trop intimement unie au corps pour n'avoir point auſſi ſes dégoûts, ſes chagrins, ſes triſteſſes, qui ſont autant de maladies & de laſſitudes; le repos du corps ne lui ſuffit pas, le changement d'objets, la converſation amuſante, d'heureuſes nouvelles, mille choſes enfin réveillent ſon feu, aiguillonnent les nerfs & y rappellent les eſprits.

Perſonne n'ignore qu'une trop grande application aux objets triſtes ou graves ralentit ſa vivacité ; pour y remédier, on lui en ſubſtitue d'autres qui l'amuſent ; la moindre bagatelle, un colifichet lui donne des impreſſions douces & agréables ; & pendant ce repos & cette paix, il ſe forme de nouveaux eſprits qui métamorphoſent tout ſon être ; & cette eſpéce de renouvellement peut s'appeller *une nouvelle création de forces & d'eſprits.*

La promenade, la chaſſe, la danſe, la muſique tiennent lieu aux hommes de délaſſemens ; mais ils ne ſont pas les ſeuls que l'ennui a fait imaginer. On a remarqué que la plûpart des jeux ont pris naiſſance dans des tems de calamité & de miſère.

Le jeu des Echecs doit ſon origine au ſiége de Troye ; Palaméde l'inventa pour délaſſer les Grecs rebutés des longueurs de ce ſiége ; ce qu'un de nos anciens Poëtes exprime ainſi :

Ce Héros le premier inventa dans un jeu,

L'art de passer le tems sagement & de
rire ;
L'usage ingénieux des Dez & des Echecs,
Fut l'utile secret qu'il sçut apprendre
aux Grecs,
Campés au bord fleuris d'une onde qui
murmure.
Mais si ce jeu des siens modéra les desirs,
Il est encor chez nous depuis cette
avanture,
Le reméde innocent aux ennuyeux loisirs.

Les Cartes, la Paume ont pris naissance chez les Lydiens, peuples de l'Asie mineure, d'où les Etymologistes prétendent que tous les jeux tirent leur origine, *Ludi à Lydiis*. On ajoûte qu'ils furent inventés sous le malheureux regne d'Atys fils de Manès, d'où ils se répandirent dans tout l'Empire Romain : les Lydiens d'ailleurs passent pour un peuple voluptueux ; on disoit en commun proverbe *Lydio more*, pour exprimer une action négligée & faite nonchalamment.

Les jeux sont donc des remédes inventés pour rétablir l'épuisement de l'esprit; l'homme sage doit en user * sobrement, & les regarder comme un sel qui doit assaisonner ses exercices, mais non pas y dominer.

Cicéron dit à son fils qu'il doit user des jeux comme on use du sommeil dont l'excès est pernicieux, & engourdit les esprits plutôt qu'il ne les recrée. De Off. l. 1.

Cassien rapporte à ce sujet un mot digne de remarque de l'Apôtre S. Jean; ce Disciple bien

* Vivès, dans son *Traité de l'Education*, donne cet avis important:

Cùm tempus exercere corpus non sinet, magno oblectamento erunt Fabellæ, historiolæ, aut istius modi narrationes jucundæ, lepidæ, argutæ, facetæ.

Maffée ne conseille point du tout le jeu des Echecs; il en donne une excellente raison: *Ce jeu demande une trop grande application, qui est nuisible aux personnes déja fatiguées du travail de l'étude.*

Montagne avoit dit longtems avant lui: *Je le hais, parce qu'il n'est pas assez jeu .... J'ai honte d'y donner l'attention qui suffiroit à quelque bonne chose.*

aimé careſſoit une perdrix, un Chaſſeur l'apperçut, & s'étonnant que ce grand homme s'amusât de ſi peu de choſe; *mon ami*, dit l'Apôtre, *que tenez-vous dans votre main? Un arc*, dit le Chaſſeur, *d'où vient donc qu'il n'eſt pas bandé? S'il étoit toujours tendu*, répondit le Chaſſeur, *il perdroit ſa force : ne ſoyez donc pas ſurpris*, répliqua l'Apôtre, *ſi notre eſprit ſe relâche auſſi quelquefois.*

Sidronius Hoſchius, l'Ovide Flamand, a rendu cette penſée avec beaucoup d'élégance.

Deficiet ſenſim qui ſemper tenditur arcus,
Ferre negat ſegetes irrequietus ager.

De Tranq. animi.

Sénéque a fait uſage de la ſeconde comparaiſon; il regarde l'eſprit de l'homme comme les terres les plus fortes & les plus graſſes, dont la fécondité dépend de certains repos accordés dans les tems convenables. Ce

Philosophe a remarqué qu'un travail trop long & trop assidu épuise l'esprit & le jette dans une espèce de langueur, *nascitur ex assiduitate laborum animorum hebetudo quædam & languor*, qu'un peu de relâche rend les esprits plus gais & plus propres au travail, *meliores, acriores que requieti surgunt animi vires*; Valere Maxime est du même avis, *tempestiva laboris intermissione fiunt animi ad laborandum vegetiores*. Liv. 2. c. 18.

* On peut former différentes classes des espèces d'amusemens qui récréent les hommes.

1°. Les jeux de pur hazard, tels que certains jeux de cartes, & les dez : les Romains se servoient du mot *Alea* pour exprimer les choses abandonnées au hazard; chez les Latins *jacta est*

* Properce s'est servi d'une expression fort poëtique; il compare l'esprit à un vaisseau qu'on ne doit point surcharger.

Non est ingenii Cymba gravanda tui.

alea, signifie *le sort en est jetté.*

2°. Les jeux où le hazard & l'esprit dominent, tels sont le piquet, le quadrille & plusieurs autres jeux de cartes, le trictrac, &c.

3°. Les jeux que l'esprit seul dirige comme les dames, les échecs.

4°. Les jeux où le corps & l'adresse président tels que la paume, le mail, &c.

Nous ne parlons point ici de la danse, du manége, de l'art d'escrimer que l'on doit plutôt regarder comme des exercices utiles, que comme des jeux ou de simples amusemens.

Le Livre qu'on présente aujourd'hui au Public, ne contient que des jeux où l'esprit seul a part; en effet, qui dit *amusemens Mathématiques*, dit amusemens purement spirituels, qui ont été de tout tems du goût des gens qui se sont les plus distingués dans les Sciences.

Les questions délicates & fines ont fait les amusemens des Peuples les plus policés. Tout le monde connoît l'énigme de Samson; la haute réputation de Sagesse de Salomon, engagea la Reine de Saba à venir du fond de l'Ethiopie voir ce grand Prince, la merveille de son siécle; *elle vint*, dit l'Ecriture, *faire épreuve de sa Sagesse en lui proposant des énigmes*; Salomon l'instruisit sur tout, & n'ignora rien de ce qui lui fut proposé; cette Reine s'en retourna comblée de joie, & ne pouvant contenir les transports de son admiration sur la Sagesse & la magnificence de ce grand Roi.

Le fameux Esope ne devint le favori de Crésus que par ses ingénieuses Fables qui contenoient une morale fine, & des conseils d'autant plus délicats, qu'ils censuroient en ménageant l'amour propre si naturel à l'homme. La

Fable parut une férule douce, qui avec le sel délicat de la satyre, n'en avoit ni les amertumes, ni les emportemens ; le Prophête
L. 2. des R. c. 12. Nathan ne représenta à David l'énormité de l'injustice qu'il avoit commise à l'égard d'Urie, que sous le voile d'une fable ingénieuse, qui fit sur l'esprit de ce Monarque un effet plus prompt, que si le Prophête, armé des foudres de l'éloquence, lui avoit fait une peinture affreuse & une de son crime.

Salomon ne renvoie-t-il pas le paresseux & le mauvais économe à la fourmi, & ne semble-t-il pas que ce soit dans la pensée de ce grand Roi qu'Esope a puisé sa Fable de la *Cigale & de la Fourmi?* Ce grand Prince, faisant le portrait du vrai Sage, le dépeint
Prov. 1. v. 6. en disant : *il pénetrera les paraboles & leurs sens mistérieux, les paroles des Sages, & leurs énigmes.*

Les amuſemens de l'eſprit ſont donc de tous les âges & de tous les états, la joie qu'ils procurent eſt d'autant plus pure, qu'ils n'affectent que les parties les plus délicates de notre ame; l'intelligence, comme on ſçait, a ſes plaiſirs à part; tout ce qui augmente ſes connoiſſances lui plaît & l'éveille; on ſe ſçait toujours gré d'avoir compris une difficulté qui arrête les autres; on aime à dévoiler un miſtére caché pour les moins intelligens.

D'ailleurs ces ſortes d'amuſemens purement intellectuels ſe prennent à bien peu de frais, ils ne fatiguent point le corps ſur lequel ils n'ont aucune priſe, & c'eſt ce qui les caractériſe & les rend preférables aux plaiſirs ſenſuels dont la ſatieté enfante le dégoût, altére la ſanté, & la fortune, & dérange preſque toujours l'économie d'une vie paiſible & tranquille.

Chaque Science & chaque Art a ses jeux & ses finesses.

Les Grammairiens ont leurs recherches sur les (a) lettres, les

(a) On a observé que les versets 19, 20, 21 du chap. 14 de l'Exode, contiennent en Hébreu 72 lettres, par le mélange desquelles les Cabalistes forment les 72 noms de Dieu.

Toutes les 22 lettres Hébraïques sont contenues dans le verset 22 du chap. 5 du Prophête Isaïe.

Toutes les lettres Grecques sont renfermées dans les versets 19 & 20 du troisiéme chapitre de la premiere Epître de S. Pierre.

Toutes les lettres Latines sont dans ce vers :

Gaza frequens lybicos duxit Kartago triumphos.

Scaliger s'est donné la peine de renfermer ces mêmes lettres dans ce vers.

Vix Phlegeton Zephiri, quaeres modo flabra mycilla.

Et en François :

Qui flamboyant guida Zephyre sur ces eaux.

La lettre *a* est la plus facile à prononcer ; elle se prononce le gozier & la bouche ouverte sans employer la langue.

La lettre *p* se prononce par la seule explosion de l'air ; si on prononce *p* contre tons, les inflexions, sur les équivoques de la langue, son abondance, sa stérilité.

Les Chimistes ont inventé mille stratagêmes pour étonner le Public. La Pierre Philosophale a été la marote de gens très-sensés; & pour parer leurs chimeres, ils ont donné un ton (b) énigmati-

la flamme d'une chandelle allumée, l'explosion est si efficace qu'elle l'éteint.

Voyez Comiers, *Traité de la parole.*

' Un Desœuvré a remarqué qu'il y a un verset dans les sept Pseaumes où il n'y a point d'*a*; *Nolite fieri sicut equus & mulus quibus non est intellectus.*

On a trouvé dans le *Miserere* un vers Pentamètre fort mauvais.

Imponent super al - tare tuum vitulos.

'' Un Spéculatif a remarqué que le nom de *Jesus* a deux sillabes, qui signifient deux natures en J. C. trois voyelles qui signifient la Trinité; deux consonnes, qui dénotent les deux substances de J. C. le corps & l'ame. *Traité de la conformité de S. François avec J. C.* où est cité le Pape Innocent en ses Sermons.

(*b*) Les Chimistes ont donné à toutes leurs opérations un air mistérieux. Le vitriol, *vitriolum* a été regardé comme le que à leurs mistérieuses opérations.

Les plus fameux Astronomes jaloux de leurs découvertes, ont imaginé des (c) Griphes, sous le

principe essentiel de leurs importantes découvertes; ils en ont caché le mot dans les lettres initiales de cet avis aux Chimistes. V*isita* I*nteriora* T*erræ* R*eperies* I*ntus* O*ccultum* L*apidem*, V*eram* M*edecinam.*

Roger Bacon, dans son Livre des sept Chapitres, cacha le mot de *Jupiter* dans les initiales suivantes; I*n* V*erbis* P*ræsentibus* I*nvenies* T*erminum* E*xquisitæ* R ; & dans les dernieres lettres de 7 mots qui finissent les sept chapitres, il découvre le mot *Stannum*; *projectioni*S *debe*T *tot*A *tame*N *nnt*U *in æternu*M.

(c) Le célébre Galilée ayant observé en 1610. que la planette de Saturne paroissoit un composé de trois globes, écrivit à Prague qu'il avoit fait une nouvelle découverte au Ciel; & afin de s'en conserver l'honneur, il l'annonça au Public dans les lettres de ce Griphe:

Smaim rmilme Poëta leum idn nenugttaviras.

Kepler composa de ces lettres ce vers Barbare:

Salve umbistineum geminatum Martia proles.

Mais il convint que cela ne disoit mot.

voile deſquels ils faiſoient part au Public de leurs curieuſes obſervations dans les régions céleſtes.

(*d*) Les Poëtes ont enchéri ſur

Galilée déclara ſa découverte par ces termes:

Altiſſimum planetam tergeminum obſervavi.

Le ſçavant Huygens uſa du même artifice, quand il eut découvert que le corps de Saturne étoit au milieu d'un plan qu'il ne touche jamais. Il aſſura le Public que ſa découverte étoit renfermée dans ce Griphe de 63 lettres :

7	5	1	5	1	1	7	4	3	9
A	C	D	E	G	H	I	L	M	N
4	2	1	2	1	5	5			
O	P	Q	R	S	T	V.			

Page 47 de ſon Siſtême de Saturne, il expliqua ſon Griphe en formant avec ces 63 lettres les mots ſuivans :

Annulo cingitur tenui Plano nuſquàm cohærente ad eclipticam inclinato.

(*d*) La premiere piéce de Plaute porte le nom d'*Amphitrion*, dont le nom ſe trouve dans les premieres lettres des vers de l'argument ;

tous les autres ; tout eſt devenu du reſſort de la Poëſie, rondeaux,

Amore captus Alcumenæ Jupiter
Mutavit ſeſe in formam ejus conjugis
Pro patria Amphitruo dum cernit cum hoſtibus
Habitu Mercurius ei ſubſervit Soſiæ;
Is advenientes ſervum & dominum fruſtra habet
Turbas uxori ciet Amphitruo, atque invicem
Raptant pro mæchis. Blepharo captus arbiter
Uter ſit, non quit Amphitruo, decernere
Omnem rem noſcunt : geminos Alcmena enititur.

Il en eſt de même des autres piéces. Un Poëte s'eſt donné la peine de faire les vers ſuivans, qui étant lus à rebours forment un ſens tout différent.

Pauperibus dat ſua gratis, nec munera curat
Curia Papalis, quod modo perſpicimus.
Laus tua, non tua ſors, virtus, non copia, verum
Scandere te fecit culmen ad eximium
Conditio tua ſit ſtabilis, nec tempore parvo
Vivere te faciat hic Deus omnipotens.

Omnipotens Deus hic faciat te vivere parvo
Tempore, nec ſtabilis ſit tua conditio
Eximium ad culmen fecit te ſcandere, verum
copia, non virtus, ſors tua, non tua laus
Perſpicimus modò, quod Papalis Curia curat
Munera, nec gratis dat ſua pauperibus.

Ce jeu poëtique eſt plus curieux que beau, il ne ſçauroit y avoir beaucoup d'élégance où il y a tant de contrainte.

triolets, virelais, énigmes en vers, logogriphes, acrostiches,

Un Poëte prête à l'innocent Abel ce vers hexamétre :

Sacrum pingue dabo, nec macrum sacrificabo.

Le fratricide Caïn le répétant à rebours, en forme un vers pentamétre qui exprime ses dispositons.

Sacrificabo macrum, nec dabo pingue sacrum.

Voici encore un hexamétre pentamétrisé.

Un Catholique avoit dit :

Patrum dicta probo, nec sacris belligerabo.

Un Hérétique répondit :

Belligerabo sacris, nec probo dicta Patrum.

On a fait des piéces de vers entiéres dans ce gout là ; on peut en voir une dans la *Nouvelle Science de la nature & présages des Comètes*, Lyon 1665. pag. 413.

Je me contenterai de citer les 4 distiques suivans qui étoient écrits dans un grand rouleau qu'un Ange tenoit par un des angles supérieurs avec ces paroles qui sortoient de sa bouche : *Lis à l'endroit, sauvé seras.*

Delicias fuge, ne frangaris crimine, verum
Cœlica tu quæras, ne malè dispereas.

rebus & contes, épitaphes; souvent on s'est peu embarrassé d'un

Respicias tua, non cujusvis quærito gesta
Carpere, sed laudes, nec preme veridicos.
Judicio fore te præsentem conspice toto
Tempore: nec Christum, te rogo, despicias,
Salvificum pete, nec secteris dæmona, Christum
Dilige, nequaquam tu mala concupito

Le Démon tenoit l'angle opposé inférieur, & ces paroles sortoient de sa bouche: *Lis à l'envers damné seras.*

Concupito mala, tu nequaquam dilige Christum
Dæmona secteris, nec pete salvificum.

Et le reste, &c.

Un Berger fleuriste envoya un bouquet à une Nimphe & la pria de le regarder comme un *chiffre* qui lui apprendroit mot à mot ce qu'il pensoit pour elle.

Ce Bouquet étoit composé de trois rangs de fleurs, dont les lettres initiales formoient entr'elles ces mots: *je vous aime*; la Jonquille, la Violette & l'Anémone étoient les premieres fleurs des trois rangs.

Une déclaration si galante occasionna cet impromptu:

Qui l'auroit jamais cru? les fleurs sçavent parler;
Un bouquet me dit, je vous aime.
Ça ma reconnoissance, il faut se signaler,
Beau bouquet, je t'en dis de même.

travail régulier, pouvû qu'il fût ingénieux ; on s'est plû même à

Les vers *rapportés* ont été en vogue dans le quinziéme siécle ; on fit ceux-ci sur un Général retiré à la campagne, & cultivant son bien.

1 5 2 6
Pastor, arator, eques, pavi, colui, superavi
3 7 4 8
Capras, rus, hostes, fronde, ligone, manu.

On mit les suivans au bas d'un portrait de Jacob, pleurant la mort de Joseph.

Lumen, lingua, manus, fletu, clamoribus, hamo
Ora, locum, crines, abluit, implet, arat.

Les vers *Leonins* ont eu leur regne, les Epitaphe du 11 & 12 siécle ne contiennent que des vers rimés.

Hic situs est Nero, laïcis mors, vipera clero,
Devius à vero, cupa repleta mero.

On se contenta de couvrir les cendres de Bede de ce vers :

Continet hæc fossa Bedæ venerabilis ossa.

On lit dans un cimetiere d'Orleans ces vers du même goût :

Omnia transibunt, nos ibimus, ibitis, ibunt
Ignari, gnari, conditione pari.

former des préceptes difficiles, qu'à peine peut-on exécuter; & nous avons tel genre de piéce qui n'a point encore été couronné.

Ceux qui ont travaillé sur l'art d'écrire occultement ont donné dans toute sorte de sistêmes, dont quelques-uns sont fort ingénieux (*e*). L'Abbé Tritheme a ca-

Un Poëte à qui on proposa de former un vers hexamétre & pentamétre en quatre mots, résolut ce problême par ces vers:

Perturbabantur Constantinopolitani,
Innumerabilibus sollicitudinibus.

On a donné cet avis à un jeune homme qui vouloit se marier:

Quam sis ductūrus teneat P quinque, puella.
Sit pia, sit prudens, pulcbra, pudica, potens,

(*e*) *Hac nocte post XII. veniam ad te circa Januam quæ ducit ad bortum, ubi me expectabis, age ut omnia sint parata.*

Cet avis est donné dans l'exhortation suivante.

H*umanæ salutis* A*mator qui* C*reavit omnia* N*obis indixit* O*bedientiam mandato-*

ché les lettres du secret dans les premiéres lettres alternatives des

rum Qui omnes Tenemur obedire Et obsequi Præmium sanctæ Obedientiæ ; erit Sempiterna felicitas Timentibus deum , &c.

Dans l'exemple suivant, il faut lire alternativement les lignes.

Croyez-moi . . . . préparez-vous à
la mort, aussi-bien il vous sied mal de
vous défendre , qui veut vous perdre
est ami de l'Etat, on ne voit personne qui
est plus coupable que vous , mais ceux qui
par un véritable zéle pour le Roi
vous ont rendu si criminel , étoient
honnêtes gens, & incapables d'être
subornés , je prens trop d'intérêt
à tous les maux que vous avez fait
en votre vie pour vouloir vous taire ;
que l'Arrêt de votre mort, n'est plus
un si grand secret ; les scelerats
car c'est ainsi qu'on nomme ceux
qui ont osé vous accuser , méritoient
aussi justement récompense, que vous
la mort qu'on vous prépare ; votre seul
entêtement vous persuade que votre
mérite vous a fait des ennemis
& que ce ne sont pas vos crimes
qui causent votre disgrace , niez
avec votre effronterie accoutumée
toutes les criminelles pratiques
on peut vous en convaincre
à tout hazard recommandez-vous à Dieu ;

mots d'un difcours ; d'autres dans les lettres initiales d'une lettre férieufe, dans des notes de Mufique, en donnant aux tons convenus la valeur des lettres de l'Alphabeth, dans des lettres prifes à rebours, &c.

Les Phifíciens font les moins ftériles en fait d'amufemens : toute la Phifique ne confifte qu'en Problêmes curieux & recréatifs fur les méchaniques, l'optique, les effets furprenans de l'aiman ; & les fermentations chimiques.

La claffe des Mathématiciens, s'eft de tout tems arrogé le droit de

Un ami de l'Evêque Théogonius, n'ofant lui écrire ouvertement, de peur que fa lettre ne tombât en d'autres mains, pour le reprendre de fon injuftice, & des mœurs peu Epifcopales qu'il déguifoit fous le mafque de piété, lui écrivit une longue lettre qui faifoit fon panégyrique ; mais qui étant lue à rebours, rendoit un fens contraire, & plus convenable au Perfonnage à qui elle étoit adreffée. On peut la voir toute entiere dans *Comiers* pag. 265. *Traité de la Parole*, &c.

parler

parler des recréations. (*f*) Nous avons ſur cette matiére de vieux

(*f*) Les Arithméticiens & les Géométres ont auſſi leurs Problêmes enfantins qui roulent ſur des équivoques, ſur des petites fineſſes.

On trouve dans un livre d'Arithmétique ce nouveau calcul.

Quatre fois trois font quinze, il n'en faut rien rabattre ;
Neuf cinq & un font douze, & rien de ſurplus ;
Deux ſept & ſix font treize, & ſur ce je conclus
Par ce juſte calcul que tout ne fait que quatre,

Toute la fineſſe de ce calcul conſiſte à compter les lettres des mots.

J'ai vû propoſer de former un cercle parfait ſans compas, & je l'ai vû exécuter très-adroitement en tenant une plume appuyée légérement, & faiſant tourner le papier avec la main gauche autour de la plume immobile.

On donne ſix jettons à une perſonne ; & on lui dit d'en former une croix de cette figure ; on lui fait remarquer qu'il y a 4 jettons dans la longueur, & trois dans la largeur. On lui dit de les arranger de façon qu'il y en ait quatre dans chaque bande ; ce propos paroît à la premiere vûe impoſſible ; il n'y a cependant qu'à doubler celui qui participe aux deux croiſures.

o
o o o
o
o

Livres ; & enfin M. Ozanam s'eſt chargé d'en former un Corps qui

On forme une croix avec 13 jettons en cette maniere.

```
        o
        o
o   o   o   o   o
        o
        o               o
        o           o   o   o
        o
        o               o
        o               o
                        o
                        o
                        o
                        o
                        o
```

On remarque qu'en commençant par bas, on trouve 9 de trois façons, tant dans la ligne perpendiculaire, que dans les deux croiſures ; on propoſe en retranchant deux jettons, de former une nouvelle croix qui ait les mêmes conditions que la précédente.

Il n'eſt queſtion, comme on voit, que de remonter d'un jetton les deux jettons de la croiſure.

Il faut dans ces ſortes de queſtions prendre garde à n'être point dupe. On propoſa un jour très-gravement à un jeune homme de former une croix avec trois jettons ; cette badinerie le fit beaucoup rêver ; il vint au bout de deux jours avouer ſon ignorance, on lui en montra la méthode en traçant une croix ſur table tenant les trois jettons entre les doigts.

a été encore augmenté depuis & qui forme 4 vol. *in*-8°.

Cette eſpéce de fraude a engagé le Pere Lami d'établir en conſéquence à la tête de ſes équations quelques régles pour procéder avec sûreté.

La premiere, eſt de concevoir très-diſtinctement l'état de la queſtion qu'on propoſe à réſoudre.

La ſeconde de retrancher le ſuperflu de toute queſtion, & de ſuppléer ce qui y manque.

Ce n'eſt point que toute queſtion, qui du premier coup d'œil paroît impoſſible, le ſoit. Rien ne paroît plus étonnant que d'entendre un homme vous dire qu'il vous apprendra ce *que vous ignorez, & ce qu'il ignore.* Cependant rien de ſi badin que la ſolution ; un homme vous demande votre mouchoir & le compare avec le ſien, ſoit pour la grandeur, ſoit pour la couleur, & vous dit gravement : *Votre mouchoir eſt plus grand que le mien ; votre mouchoir eſt rouge, & le mien eſt bleu.*

Toutes les queſtions que l'on peut faire ne ſont pas toujours réſolvables ; il y en a même qui ne ſont pas dignes d'attention, telles que ces petites queſtions qui ne roulent que ſur des jeux de mots ou des équivoques, par ex. on pourroit être fort embarraſſé de réſoudre cette badinerie, *s'ils viennent ils ne viendront pas : s'ils ne viennent pas, ils viendront ;* ſi l'on ne ſongeoit pas que c'eſt la réflexion d'un Païſan qui ſeme ſon

Celui qu'on présente aujourd'hui, après des préliminaires courts & succints sur l'Arithmé-

grain, & qui craint que les oiseaux ne le mangent; & la solution des questions de ce genre ne rend pas fort recommandables leurs Oedipes, l'on peut sans rougir avouer son ignorance; mais il est des questions qu'il faut résoudre ou démontrer l'impossibilité de leur solution; car s'il ne s'agissoit que de nier une proposition pour s'épargner la peine de la résoudre; & pour se donner un air de sçavant, tous les jours l'ignorant effronté iroit de pair avec le modeste sçavant; par exemple, si quelqu'un disoit que son âge est tel que multiplié par 4, & ce produit divisé par 5 forme 50 ans, & que cet âge est encore tel que sa moitié, plus 30 ans égale 40.

On peut bien soupçonner quelques contradictions dans ce Problême; mais l'art est de prouver cette contradiction, ce qu'on peut faire ainsi:

Soit x âge donné.

Donc $\frac{4x}{5} = 50$ ans. 1^{ere} condition.

$\frac{x}{2} + 30 = 40$. 2^{de} condition.

Donc $x + 60 = 80$.

Donc $x = 80 - 60$.

Donc $x = 20$.

ERRATA IMPORTANT.

PAge 160 *ligne* 15 ; $7 = 4 = 3$ *Lisez* $7 - 4 = 3$.

P. 173 *l.* 5 avant or ; *lis.* $\frac{x^2}{2} = \frac{6x^2}{12}$.

Page 167. Corrigez la formule comme s'ensuit :

$$p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{2} p^{m-3}q^3, \&c.$$

Le Problême 204 doit être à la suite du Problême 202. ligne derniere, *par le précédent*, c'est-à-dire 203.

Problême 224 *ligne* 10, *lisez* $103 \frac{1}{11}$.

Prob. 227. *ligne* 10, *lisez* $\frac{225}{32} = 7 \frac{1}{32}$.

LES

LES

AMUSEMENS

MATHEMATIQUES.

DE L'ARITHMETIQUE ET DE L'ALGEBRE.

L'ARITHMETIQUE est la Science des Nombres.

De la Numération.

2. La Numération est l'Art d'énoncer un nombre exprimé par plusieurs chiffres ou caracteres.

Pour y parvenir il faut, 1°. Partager les chiffres de trois en trois, commençant de gauche à droite, sans s'inquiéter du nombre de chiffres de la derniere tranche. 2°. Observer que le premier chiffre désigne des unités simples, le second des dixaines, le troisiéme des centaines. Le premier de la seconde tranche désigne des unités de mille, le second des dixaines de mille, le troisiéme des centaines de mille. Le premier chiffre de la troisiéme tranche désigne des unités de millions, le second des dixaines de millions, le troisiéme des centaines de millions ; ainsi chaque premier chiffre des tranches exprime unité, mille, million, billion, trillion, quatrillon, &c.

3. Cette échelle de numération est fondée sur la progression décuple dont sont convenus les premiers inventeurs de l'Arithmétique, afin d'éviter la multitude infinie de divers caracteres dont il auroit fallu se servir pour exprimer tous les nombres possibles sans cette ingénieuse invention.

Ainsi pour exprimer trois cens quarante-cinq millions, neuf cens quatre-vingt sept mille, cent vingt-six unités, servez-vous des caracteres dans l'ordre suivant.

345 $^{\text{mon}}$, 987 $^{\text{m}}$, 126 $^{\text{u}}$.

Régles fondamentales.

4. On ne doit compter en rigueur que deux Régles fondamentales, l'Addition & la Soustraction, parceque la *quantité* n'est susceptible que de *plus* ou de *moins*.

De l'Addition.

5. L'Addition est une régle qui enseigne à former de plusieurs sommes particulieres une seule, qu'on nomme *Total*.

6. Observez, 1°. Qu'on ne peut joindre ensemble que des quantités de même nature.

2°. Qu'il faut toujours commencer l'Addition par les dernieres sous-especes, & réduire leur somme en l'espéce qui précede.

Addition simple.

38798 liv.
9476
1569
7819
57662 liv. *Total.*

Addition composée.

3789 liv.	17 s.	7 d.
829	19	10
785	10	4
688	17	8
6094 liv.	5 s.	5 d.

De la Soustraction.

7. La Soustraction est une régle qui nous enseigne à déterminer la différence de deux quantités.

8. Il faut commencer la Soustraction par les dernieres sous-especes, & faire les emprunts nécessaires sur les especes précédentes.

Soustraction simple.

97854	dette.
52976	paye.
44878.	reste.

Soustraction composée.

102047 liv.	10 s.	8 d.	dette.
79979	17	10	paye.
22067 liv.	12 s.	10 d.	reste.

9. La preuve d'une régle se fait tou-

jours par son contraire ; ainsi l'Addition & la Soustraction se servent réciproquement de preuves.

Pour vérifier une Addition on soustrait, commençant par la premiere colomne de gauche à droite toutes les sommes particulieres de la quantité correspondante du total, & si le total s'éclipse, c'est une démonstration que ces sommes formoient ce total.

	3858
	4591
	3796
	12245
preuve	2210

Pour vérifier une Soustraction, on ajoute au plus petit nombre sa différence au plus grand, & de leur égalité, on conclud que la Soustraction a été bienfaite.

	3959
	1076
reste	2883
preuve	3959

REMARQUE.

10. Lorſque les ſommes à joindre ſont exactement les mêmes, au lieu de les écrire les unes ſous les autres, on peut n'en écrire qu'une & multiplier chacun de ces caracteres par le nombre de ces ſommes particulieres, ainſi la multiplication n'eſt autre choſe qu'une *Addition abrégée*.

De la Multiplication.

11. La multiplication eſt une régle qui nous enſeigne à répéter une quantité, autant de fois que l'autre a d'unités & de parties d'unités.

12. Toute la difficulté de cette opération conſiſte à ſçavoir par cœur le produit des nombres ſimples l'un par l'autre, ce qu'on appelle la *Table de Pythagore*.

Table Pythagorique, ou Livret dont l'importance est désignée par ces deux anciens vers.

Nul ne peut être bon chiffreur
S'il ne ſçait ſon Livret par cœur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	4	45
6	12	18	24	30	36	42	4	54
7	14	21	28	35	42	4	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

13. Après avoir écrit le multiplicateur ſous le nombre qu'on veut multiplier & avoir tiré une ligne ſous les deux nombres, on multiplie tous les chiffres du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, on ajoute tous ces produits, & leur ſomme eſt le *produit* cherché.

Multiplication simple.

	3858
par	75
	19290
	27006
	289350 produit.

Multiplication composée.

	785 aunes			
à	98 liv.	17 f.	6 d.	
	6480			
	7065			
	392	10		
	196	5		
	98	2	6	
	77808 liv.	17 f.	6 d.	

Des Puissances.

14. On appelle *puissance* le produit d'une quantité par elle-même.

Pour concevoir plus aisément ce que l'on va dire sur cet article, nous allons établir quelques signes qui abregent les expressions.

$+$ signifie, plus.

$-$ moins.

$=$ égal.

$\times$ multiplié par

$a + b$ représente la somme de a & de b.

$a - b$ représente la différence ou l'excès de a sur b.

$\frac{a}{b}$ signifie a divisé par b.

ab signifie le produit des deux quantités générales a & b, & équivaut à cette expression $a \times b$.

aa ou a^2 représente *le quarré* ou la seconde puissance de a.

aaa ou a^3 représente *le cube* ou la troisiéme puissance de a, & ainsi de suite à l'infini.

15. Dans l'expression $8a^3$ le chiffre 8 se nomme *coefficient*, & le chiffre 3, *exposant*. Le premier indique le nombre de fois que l'on prend la troisiéme puissance de a, & le deuxiéme désigne le degré de la puissance de a. Observez que $2a^3 \times 4b^3 = 8a^3b^3$.

$$2a^3 \times 4a^3 = 8a^6.$$

On voit dans ce dernier produit qu'on multiplie toujours les coefficiens, & que l'on additionne les exposans lorsque la quantité est la même, ainsi $2a^3 \times 4a^2 = 8a^{3+2} = 8a^5$.

Remarquez que

$$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5.$$

D'où l'on tire qu'une troisiéme puissance multipliée par une seconde fait une cinquiéme puissance, & conséquemment pour élever 4 à la cinquiéme puissance, il suffit d'élever 4 à la seconde, on aura 16, & d'élever 4 à la troisiéme, qui sera 64; puis multiplier 16 par 64 pour avoir 1024 cinquiéme puissance de 4; ou bien on multipliera 16 seconde puissance par 16, on aura 256 quatriéme puissance, qu'on multipliera par 4 racine qui donnera 1024.

REMARQUE.

16. Le produit des quantités affectées des signes + & — nous obligent d'observer que $+ \times + = +$.

$$\left.\begin{array}{l} + \times - \\ - \times + \end{array}\right\} = -$$

$$- \times - \quad = +$$

1° que $+ \times -$ ou $- \times + = -$:

On peut le démontrer ainsi, $a \times b - c = ab - ac$, car $a \times b = ab$; or je ne voulois pas multiplier a par toute la quantité b, mais seulement par ce qui reste de b lorsque j'en aurai soustrait c. Donc j'ai multiplié a par c de trop, donc il faut retrancher $a\,c$.

2°. Pour démontrer que $- \times - = +$. Soit $b - c$ à multiplier par $a - d$: $b - c \times a = ab - ac$ comme on vient de le voir ; or ce produit est trop grand, parceque je ne dois multiplier que par $a - d$, & non pas par a tout entier ; il faut donc retrancher de $a\,b - ac$ le produit de $b - c$ par d, qui est $b\,d - dc$: donc il faut écrire $a\,b - ac - bd + dc$ où l'on voit que $- dc$ s'est changée en $+ dc$; parceque retranchant $b\,d$, je retranche trop de toute la quantité $d\,c$, donc il faut la joindre.

Cela est encore très-évident en nombre.

$$5 - 3 \times 4 - 2$$
$$= 20 - 12 - 10 + 6$$
$$20 + 6 - 12 - 10$$
$$26 - 22 = 4$$

Comme ces réflexions seroient embarassantes dans l'usage, on se fait une mémoire locale de ces opérations qu'on exprime par ce canon algébrique.

Diversa signa dant minus,
Eadem signa dant plus.

Qu'on peut traduire ainsi :

Mèmes signes font moins,
Divers signes font plus.

De l'élévation des Puissances.

17. Pour élever une puissance quelconque a une puissance donnée. Par exemple, 23 a la cinquiéme puissance, il faut multiplier 23 par lui-même, ce qui donnera la seconde puissance de 23.

2°. Multiplier cette seconde puissance par 23 pour avoir la troisiéme.

3°. Multiplier cette troisiéme par la seconde pour avoir la cinquiéme, parce que regardant 23 comme, a la seconde sera a^2, la troisiéme a^3, & $a^3 \times a^2 = a^5$ comme on l'a remarqué.

18. Le quarré d'un *binome* numérique, c'est-à-dire d'un nombre composé de deux chiffres, contient.

1°. Le quarré des dixaines.

2°. Le double du produit des dixaines par les unités.

3°. Le quarré des unités, ce qui servira pour l'extraction de la racine quarrée.

$$\begin{array}{rl} 23 \times 23 = 529 = & 400^{q} \text{ de } 20 \\ + & 120 \\ + & \underline{9^{q} \text{ de } 3} \\ & 529 \end{array}$$

De même le quarré ou la deuxiéme puissance du binome $a + b = a^2 + 2ab + b^2$.

19. Le cube ou la troisiéme puissance de ce binome est,

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ce qui servira de formule pour extraire la racine cubique numérique.

Soit 23 à élever au cube

Observez que $a = 20$
& $b = 3$

On aura 1°.	8000	$= a^3$
2°.	3600	$= 3a^2b$
3°.	540	$= 3ab^2$
4°.	27	$= b^3$
	12167	

On a décomposé les deux chiffres de 23 pour servir de préparation à ce qu'on dira dans les extractions de racines cubiques.

De la Division.

20. Lorsqu'on cherche combien de fois une somme peut être soustraite d'une autre, cette opération s'appelle *Division*, qui n'est autre chose qu'une *Soustraction abrégée*.

Cette régle nous enseigne à déterminer combien une quantité contient ou est contenue dans une autre, & le nombre de fois se nomme *quotient* du mot latin *quoties*.

Il faut commencer la division par les caracteres de gauche à droite, & continuer successivement jusqu'à ce qu'il reste un nombre moindre que le diviseur.

Division simple.

37890 | 75
390 | 505 $\frac{15}{75}$
15

Division composée.

97604 liv. 18 4 | 45
76 | 2168 ″ 19 ″ 11 $\frac{25}{45}$
310
404
44
20

898 | 45
448
43
12

90
43

520 | 45
70
25

Preuve de la Multiplication & de la Division.

21\. La Preuve de la Multiplication se fait par la Division, & réciproquement la preuve de la Division se fait par la Multiplication.

Pour vérifier une Multiplication, on divise le produit par l'un des deux termes dont il est formé, le quotient est l'autre terme.

$$\begin{array}{r} 97 \\ 53 \\ \hline 291 \\ 485 \\ \hline 5141 \end{array}$$ produit.

preuve $\frac{5141}{53} = 97$

Pour vérifier une Division, on multiplie le quotient par le diviseur, le produit doit restituer le dividende.

$$\frac{3500}{25} = 140$$
$$140 \times 25 = 3500$$

REMARQUE.

On ne s'étend pas davantage sur ces quatre Régles ; elles sont connues des moindres Arithméticiens.

De l'extraction de la Racine quarrée & cubique.

22. On appelle *racine* d'une puissance une quantité qui, multipliée par elle-même, une ou plusieurs fois, rétablit

la puissance donnée, 7 est la racine seconde ou quarrée de 49.

Les racines prennent différens noms suivant les degrés d'élévation des puissances.

Soit 529 dont on cherche la racine deuziéme.

1°. Partagez en tranche de deux en deux en commençant de droite à gauche.

2°. Retranchez de la premiere tranche à gauche le plus grand quarré dont il faut mettre la racine au quotient.

3°. Doublez ce quotient, & divisez par ce double le reste du plus grand quarré & la premiere figure de la tranche suivante; écrivez-en le quotient à la droite du diviseur, & retranchez du reste de la puissance le produit de ce quotient par lui-même, & le diviseur; ainsi du reste jusqu'à ce que toutes les tranches soient anéanties.

Exemple.

	rac.	43
5|29 (23		3
1 29		
1 29		129
0'0'0		

```
9 |3 0|2 5 (305
9
• 3 0 2 5            605
  0 0 0 0              5
                    ----
                    3025

1'5 1'2 9 (12
0 5.1 2 9           22      243
   4 4               2        3
    7 2.9           --      ----
    0 0 0           44      729
```

23. Par l'opération ci-dessus on voit l'usage de la formule $a^2 + 2\,a\,b + b^2$.

On a retranché de 15129.

1°. $10000 = a^2$ dont la racine est $100 = a$, il est resté 5129.

2°. On a divisé ce nombre par $200 = 2\,a$ pour avoir $b = 20$.

3°. On a retranché de 5129; $400 + 40 = 2\,a\,b + b^2$ il reste 729.

4°. On a regardé 120 comme a dont le quarré est ôté de 15129; il ne reste que $2\,ab + b^2$, or pour avoir le second b, je double $120 = 240$ par lesquels divisant 729, je trouve $3 = b$; j'ôte le quarré de 3 pour b^2 & le produit de 240 pour $2\,a\,b = 729$, donc il ne reste rien.

REMARQUE.

24. Si on fait le quarré des 10 premiers nombres simples, on aura

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

où l'on peut observer que lorsque deux nombres ne différent entr'eux que de l'unité, leurs quarrés différent du double de la racine de l'un plus l'unité.

Soit 20 & 21 leurs quarrés sont

400 & 441

41 excès de l'un sur l'autre est égal à deux fois 20 = 40 + 1. Ce qui se prouve généralement par cette formule algébrique.

Le quarré de a est a^2.

Celui de $a + 1$, est $a^2 + 2a + 1$.

De l'extraction de la Racine cubique.

25. Pour l'extraction de la racine cubique, servez-vous de la formule

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Soit 12|167(23 — 4, 3, 12 — 9, 6, 54

8 — 3, 36

4167

$3a^2b = 3600$

$3ab^2 = 540$

$b^3 = 27$

4167

1°. Partagez-le en tranche de trois en trois, de droite à gauche, & ôtez le plus grand cube de la derniere tranche à gauche.

2°. Quarrez & triplez la racine pour avoir un diviseur qui vous donnera un quotient que vous écrirez à la racine.

3°. Pour s'assurer de la justesse de ce quotient, faites ces trois produits.

1°. Multipliez le diviseur par ce nouveau quotient.

2°. Multipliez le triple de la premiere racine par le quarré de ce quotient.

3°. Faites-en le cube.

4°. Ecrivez-les l'un sous l'autre; ensorte qu'ils excedent chacun d'une figure comme on le voit ci-après; faites-en une somme que vous retrancherez du reste de la puissance; s'il ne reste rien, la puissance est parfaite.

12|8 12|904(234

8

4 8 12

4 1 6 7

6 4 5 9 0 4

0 0 0 0 0 0

$8 = a^3$

$36 = 3\,a^2\,b$

$54 = 3\,a\,b^2$

$27 = b^3$

4167

$23 \times 23 = 529 \times 3 = 1587 = 3\,a^2$

$1587 \times 4 = 6348 = 3\,a^2\,b$

$1104 = 3\,a\,b^2$

$64 = b^3$

645904

S'il se trouve plus de deux tranches les deux figures de la racine représenteront *a* dont le cube vient d'être ôté, il ne s'agit plus que de tripler le quarré de ces deux figures pour avoir un diviseur que l'on multipliera par le quotient qu'il donnera ; on achevera le reste comme on vient de l'expliquer.

REMARQUE.

26. La différence des cubes de deux quantités qui ne different que de l'unité, se trouve par cette formule.

a^3 cube de a.

$a^3 + 3\,a^2 + 3\,a + 1$ cube de $a + 1$.

Où l'on voit que le cube de $a + 1$ surpasse celui de a de trois fois le quarré de la racine, plus trois fois la racine, plus un.

10 cubé = 1000

11 cubé = 1331 :

Or l'un surpasse l'autre de 331

$$\text{or } 331 \left\{ \begin{array}{l} = 300 = 3a^2 \\ = \quad 30 = 3a \\ = \quad\ \ 1 = 1 \end{array} \right.$$

331

Des Rapports.

27. *Rapport*, est ce qui résulte de deux quantités comparées entr'elles, & comme deux quantités peuvent être comparées entr'elles de deux manieres, on distingue deux sortes de rapports, sçavoir l'Arithmétique, & le Géométrique.

28. Le rapport *Arithmétique* est l'excès ou la différence de deux quantités comparées entr'elles par soustraction.

29. Le rapport *Géométrique* est le quotient ou le résultat de deux quantités comparées entr'elles par division. Par conséquent le rapport Arithmétique de 12 à 4 est 8, & le rapport

Géométrique est 3, ces deux rapports sont extrêmement différens, & ne doivent jamais se confondre l'un avec l'autre.

30. *Proportion* est une égalité de rapport, par conséquent il faut au moins trois termes pour former une proportion; & comme il y a deux sortes de rapports, on doit compter de même deux sortes de proportions, la proportion Arithmétique & la Géométrique.

31. La *proportion Arithmétique* consiste dans une égalité d'excès, par exemple, 7, 5, 3 forment une proportion Arithmétique.

32. La *proportion Géométrique* consiste dans une égalité de quotient, 1, 2, 6, 3 forment une proportion Géométrique.

33. L'une & l'autre proportion est de deux especes, *discontinue* ou *continue*.

34. La proportion Arithmétique *discontinue*, est lorsque le second terme ne peut servir d'antécédent au troisiéme.

8, 6 : 5, 3

La *proportion Arithmétique continue*, est lorsque le second terme, ou le conséquent du premier terme, peut servir d'antécédent au troisiéme.

÷ 7, 5, 3

où l'on voit que 7 est à 5 comme 5 est à 3.

35. Lorsqu'il y a plus de trois termes, la proportion Arithmétique s'appelle *progression*. Ainsi 7, 5, 3, 1 forme une progression, parce qu'on peut dire 7 est à 5 comme 5 est à 3 comme 3 est à 1.

36. La *proportion Géométrique discontinue*, est lorsque le second terme ne peut servir d'antécédent au troisiéme.

12, 3 :: 4, 1

La proportion Géométrique *continue*, est lorsque le second terme ou le conséquent du premier peut servir d'antécédent au troisiéme; 12, 6, 6, 3 où l'on voit que 12 est à 6 ce que 6 est à 3.

37. Lorsqu'il y a plus de trois termes, on l'appelle *progression*, parce qu'il s'y trouve au moins trois rapports égaux.

Propriétés des Proportions & Progressions.

THEOREME Ier.

38. *Quatre termes en proportion Arithmétique donnent la somme des extrêmes égale à celle des moyens.*

$$a\ ,\ a + d : b\ ,\ b + d$$

Donc $a + b + d = a + d + b$ ce qu'il falloit démontrer.

$$3 \quad 5 \quad : \quad 9 \quad 11$$

Donc $3 + 11 = 5 + 9$

Corollaire.

Il s'ensuit de là que connoissant trois termes d'une progression Arithmétique, il sera facile de déterminer le quatriéme.

Soient $a\ ,\ b : c\ ,\ x$

Donc $b + c = a + x$

Donc $x = b + c - a$

$$5 \quad 7 \quad : \quad 15 \quad x$$

Donc $7 + 15 = 5 + x$

Donc $x = 7 + 15 - 5 = 17$

THEOREME II.

39. *En toute progression Arithmétique, la somme des extrêmes est egale à celle des moyens équidistans.*

a^{1}

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},$$
$$\overset{5}{a+4d},\ \overset{6}{a+5d},\ \overset{7}{a+6d}.$$

Donc $a + a + 6d = a + d + a + 5d$

$$2a + 6d = 2a + 6d.$$

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15$$
$$3 + 15 = 5 + 13 = 18 = 7 + 11 = 9 + 9$$

Corollaires,

Il ſuit de-là, 1°. Qu'il eſt facile de trouver tel terme qu'on voudra d'une progreſſion Arithmétique, dont le premier terme, la différence & le nombre des termes, eſt donnée. Par exemple :

Soit 5 premier terme.
3 différence.
121 nombre des termes.

$121 - 1 = 120$ nom. des t. $- 1$

$120 \times \underset{\text{dif.}}{3} = 360$

$360 + \underset{\text{1er terme.}}{5} = 365$; 121eme terme.

2°. Puiſque la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des termes équidiſtans la ſomme des termes d'une progression Arithmétique est égale au produit de la somme des extrêmes par la $\frac{1}{2}$ du nombre des termes.

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15.$$

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 63 = 3 + 15 \times 3\tfrac{1}{2} = 63.$$

THEOREME III.

40. *En toute progression Arithmétique, le dernier terme est égal au premier, plus autant de fois la différence qu'il y a de termes moins un.*

$$\overset{1}{a},\ a + \overset{2}{}d,\ a + \overset{3}{}2d,\ a + \overset{4}{}3d,$$
$$a + \overset{5}{}4d,\ a + \overset{6}{}5d,\ a + \overset{7}{}6d.$$

On voit évidemment que le septieme terme contient le premier terme, plus six fois la différence.

THEOREME IV.

41. *Quatre termes en proportion Géométrique, donnent le produit des extrêmes égal à celui des moyens.*

$$a,\ ar :: b,\ br$$

Donc $abr = arb$

$$3,\ 6 :: 4,\ 8$$

Donc $3 \times 8 = 6 \times 4 = 24.$

Corollaires.

1°. On trouve facilement le quatriéme terme d'une proportion Géométrique.

$$a,\ b :: c,\ x\ ;$$

Donc $\quad bc = ax$

Donc $\quad x = \frac{bc}{a}$

$$3,\ 6 :: 12\ x$$

Donc $\quad \frac{6 \times 12}{3} = 24 = x.$

2°. Deux termes étant donnés, on trouvera facilement le troisiéme continuellement proportionnel.

$$a,\ b :: b,\ x\ ;$$

Donc $\quad \frac{b^2}{a} = x$

$$3,\ 6 :: 6,\ x$$

$$\frac{36}{3} = 12 = x$$

3°. Quatre termes proportionnels

$$a,\ ar :: b,\ br$$

Peuvent souffrir divers changemens & constituer toujours une proportion Géométrique.

$a \quad ar :: b \quad br$

Donc $a, b :: ar, br$ *alternando.*

Donc $ar \; a :: br \; b$ *invertendo.*

D. $a + ar, ar :: b + br, br$, *componendo.*

D. $a - ar, ar :: b - br, br$, *dividendo.*

THEOREME V.

42. *Le dernier terme d'une progression Géométrique est égale au produit du premier terme, par le rapport élevé a une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un.*

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{ar^1},\ \overset{3}{ar^2},\ \overset{4}{ar^3},\ \overset{5}{ar^4},\ \overset{6}{ar^5},\ \overset{7}{ar^6}$$

Corollaire.

Pour trouver le septiéme terme d'une progression dont le premier terme est 5, le rapport ou la raison est 3; multipliez 5 par la sixiéme puissance de 3 c'est-à-dire, 5 par 729, vous aurez

$$\begin{array}{r} 729 \\ 5 \\ \hline 3645 \end{array}$$ 7 eme terme.

THEOREME VI.

43. *En toute progression Géométrique*

la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

Soit cette progression a, ar, ar^2, ar^3

Or $a, ar :: ar, ar^2 :: ar^2, ar^3$

Donc $a + ar + ar^2, ar + ar^2 + ar^3 :: a, ar$

Car $a + ar + ar^2 \times ar = ar + ar^2 + ar^3 \times a = a^2 r + a^2 r^2 + a^2 r^3$.

THEOREME VII.

44. *En toute progression Géométrique la somme des antécédens, moins la somme des conséquens, est à la somme des conséquens comme un antécédent moins son conséquent est à son conséquent.*

$a + ar + ar^2 - ar - ar^2 - ar^3, ar + ar^2 + ar^3 :: a - ar, ar.$

Donc en simplifiant

$a - ar^3, ar + ar^2 + ar^3 :: a - ar, ar.$

Car $a - ar^3 \times ar = ar + ar^2 + ar^3 \times a - ar = a^2 r - a^2 r^4$.

THEOREME VIII.

45. *En toute progression Géométrique*

le premier terme moins le second est au second, comme le premier terme moins le dernier, est à la somme de tous les termes qui suivent le premier.

On vient de voir que $a - ar^3$ est à $ar + ar^2 + ar^3$ comme $a - ar$ est à ar.

Donc *transponendo* $a - ar$, $ar :: a - ar^3$, $ar + ar^2 + ar^3$.

Or $ar + ar^2 + ar^3$ est égale à la somme des termes qui suivent le premier.

Des Fractions.

46. *Fraction* est l'expression d'une ou de plusieurs parties de l'unité, par exemple $\frac{1}{3}$ suppose un entier divisé en 3 parties, dont on n'en prend qu'une. $\frac{3}{5}$ représente un entier divisé en cinq parties dont on n'en prend que trois.

Le nombre qui exprime la quantité de parties dans lesquels on a divisé l'entier s'appelle *dénominateur*, l'autre nombre s'appelle *numérateur*, ainsi dans $\frac{3}{5}$ 5 est le dénominateur; 3 le numérateur.

OPERATION FONDAMENTALE.

De la réduction en même dénomination.

47. Soit $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$ à réduire au même dénominateur.

1°. Si je multiplie 3 & 4 chacun par un même nombre 5. j'aurai 15 & 20 qui seront toujours en même rapport selon cet axiome, *deux quantités multipliées par une même, conservent le même rapport.*

2°. Si je multiplie 2 & 5 par 4; j'aurai 8 & 20 qui seront encore en même rapport que 2 & 5; par conséquent $\frac{15}{20}$ sont égaux à $\frac{3}{4}$ & $\frac{8}{20}$ sont égaux a $\frac{2}{5}$. Donc je pourrai me servir de $\frac{15}{20}$ & de $\frac{8}{20}$ au lieu des deux fractions précédentes.

$\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$ ne peuvent s'additionner ensemble, ni se soustraire l'un de l'autre, ni se diviser l'un par l'autre sans cette préparation. $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$ sont des quantités hétérogenes, eu égard à l'entier dont elles sont les parties; or la réduction en même dénomination les rend homogenes, puisqu'elles sont chacune des vingtiémes du tout, on peut dont faire sur ces fractions les opérations suivantes.

De l'Addition.

48. $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$ joints enſemble ſont $\frac{15}{20}$ & $\frac{8}{20}$, c'eſt-à-dire $\frac{23}{20}$, qui donnent un entier & $\frac{3}{20}$ ce qui eſt naturel, puiſque $\frac{20}{20}$ égale 1.

Lorſqu'on a plus de deux fractions à joindre enſemble, il faut faire le produit des dénominateurs, & prendre des numérateurs proportionnels. Ces trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ſe réduiſent,

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{2} & \text{de } 24 & 12 \\ \frac{2}{3} & \text{de } 24 & 16 \\ \frac{3}{4} & \text{de } 24 & 18 \end{array}\right\} \frac{46}{24}$$

$\frac{46}{24}$ qui ſont un entier & $\frac{22}{24}$.

De même que les deux termes d'une fraction, multipliés par une même quantité, ne changent point de rapport; de même auſſi chacun des deux termes diviſé par une même quantité conſerve conſtamment leur raiſon; ainſi la ſomme des trois fractions nous a donné 1 $\frac{22}{24}$ qui ſe réduiſent à 1 $\frac{11}{12}$. C'eſt ce qu'on nomme *réduction à la plus petite expreſſion*, ou *à moindre terme*.

Lorſqu'il ſe trouve des entiers, il faut faire l'addition des entiers à l'ordinaire, & y joindre les entiers que l'addition des fractions aura donné

$$\left.\begin{array}{ll} 3\,\frac{2}{3} & 48 \\ 5\,\frac{3}{4} & 54 \\ 7\,\frac{5}{6}. & 60 \end{array}\right\} \frac{162}{72} = 2 \text{ ent } \frac{18}{72} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{array}{ll} \overline{15} & \overline{72} \\ 2\,\frac{1}{4} & \\ \hline 17\,\frac{1}{4}. & \end{array}$$

Soustraction.

49. De $\frac{3}{4}$ soustraire $\frac{2}{3}$.

Il faut 1°. réduire en même dénomination, en faisant le produit des deux dénominateurs, & chercher des numérateurs proportionnels à ce commun dénominateur.

2°. Soustraire l'un de l'autre ainsi:

$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12}$ reste $\frac{1}{12}$.

Quand il se trouve des entiers, par exemple de 7 $\frac{3}{4}$ ôter 5 $\frac{7}{8}$.

1°. Réduisez $\frac{3}{4}$ & $\frac{7}{8}$ en même dénomination, $\frac{24 \quad 28}{32}$.

2°. De $\frac{24}{32}$ on ne peut ôter $\frac{28}{32}$ empruntez un entier qui vaut $\frac{32}{32}$ dont il faut ôter $\frac{4}{32}$ reste $\frac{28}{32}$ ou $\frac{7}{8}$; puis de 6 entiers ôtant 5 reste 1. Donc de $\frac{3}{4}$ ôtant 5 $\frac{7}{8}$ reste 1 $\frac{7}{8}$.

De la réduction en moindre Terme.

50. Il faut chercher si l'un & l'autre terme de la fraction ne pourroit pas se diviser par ces quatre nombres, 2, 3, 5, 7. Lorsque cela ne se peut, renversez la fraction, & divisez en négligeant le quotient, il viendra une fraction qu'il faut de même renverser, & toujours ainsi jusqu'à ce qu'on ait trouvé un diviseur exact, par lequel divisant l'un & l'autre terme de la fraction donnée; elle sera réduite à la plus petite expression.

Soit $\frac{209}{323}$ à réduire à la plus petite expression.

Par les tentatives aucun de ces nombres n'est divisible exactement par les 4 simples 2, 3, 5, 7. donc il faut la renverser ainsi.

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|}
323 & \underline{209} & \underline{114} & \underline{95} & \underline{19} \\
141 & \frac{1}{95} & \frac{1}{19} & \frac{1}{00} & 5
\end{array}$$

On voit par cette opération que 19 est le seul diviseur exact, par lequel divisant la fraction.

$$\frac{209}{323}\Big\}\,19 = \frac{11}{17}$$

On aura $\frac{11}{17}$ qui eſt la plus petite expreſſion de cette fraction.

De la Multiplication.

51. Il faut multiplier les deux numérateurs l'un par l'autre, & les deux dénominateurs, ſans les réduire à même dénominateur. Par exemple.

$\frac{3}{4}$ à multiplier par $\frac{2}{3}$ donne $\frac{6}{12}$, ce qui eſt naturel ſi l'on fait réflexion que $\frac{3}{4}$ multiplié par 2, donne $\frac{6}{4}$: mais comme on a trop multiplié, puiſqu'on ne vouloit multiplier que par $\frac{2}{3}$; il faut donc prendre le $\frac{1}{3}$ de $\frac{6}{4}$; ce qui ſe fait en multipliant 4 par 3, ce qui donne $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Lorſqu'il ſe trouve des entiers & fractions, il faut multiplier, 1°. Les entiers l'un par l'autre, 2°. Les entiers du bas par le numérateur de la fraction du haut, & prendre les entiers qui pourront en réſulter, 3°. Prendre les entiers du haut par le numérateur de la fraction du bas, & prendre de même les entiers réſultans. 4°. Multiplier les deux fractions & joindre les fractions réſultantes.

Soit $3\frac{2}{3}$ à multiplier par

$$\begin{array}{l} 2\frac{1}{4} \\ \hline 6 \\ 1\frac{1}{3} \\ 2\frac{1}{4} \\ \frac{6}{12} \\ \hline 10\frac{1}{12} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \\ \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \\ \phantom{\frac{1}{4} = }\frac{6}{12} \end{array} \left\{ \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} \right.$$

De la Division.

52. Il faut, comme à l'addition & à la fouftraction, réduire les fractions propofées à même dénominateur, & divifer le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre. Par exemple. Soit $\frac{2}{3}$ à divifer par $\frac{3}{4}$.

1°. Réduifez ces fractions en même dénomination. $\frac{8 \quad 9}{12}$

2°. Divifez 8 par 9, vous aurez $\frac{8}{9}$. On néglige, comme on voit, le commun dénominateur; parce que fuivant l'axiome général déja énoncé,

$$\frac{8}{12}, \frac{9}{12} :: 8, 9.$$

Lorfqu'il fe trouve des entiers, il faut réduire à l'ordinaire les fractions en même terme, & réduire les entiers du dividende, & les entiers du divifeur en deux fractions, dont le commun dénominateur soit celui qu'on vient de trouver.

Soit $4\frac{2}{3}$ à diviser par $5\frac{7}{8}$.

1°. $\frac{16 \quad 21}{24}$

2°. $\frac{96+16}{24}$ à diviser par $\frac{120+21}{24}$,

c'est-à-dire 112 par $141 = \frac{112}{141}$.

Des Fractions de Fractions.

53. Soit $\frac{3}{4}$ d'un entier dont on demande les $\frac{2}{3}$.

Il est facile de voir que ce n'est autre chose que de multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$ qui donneront $\frac{6}{12}$.

En effet le $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{4}$; donc les $\frac{2}{3}$ sont $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

On demande les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ d'un entier quelconque.

Faites le produit des numérateurs & des dénominateurs, on aura $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

En effet les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ par l'article précédent sont $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$: or les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{10}$ sont $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Des Fractions décimales.

54. Les fractions décimales ne sont autre chose que des fractions de fractions. La premiere qu'on nomme

prime, eſt un dixiéme d'un entier quelconque ; la ſeconde eſt un centiéme, c'eſt-à-dire un dixiéme de la prime ; la troiſiéme eſt un milliéme, c'eſt-à-dire un dixiéme de la ſeconde, ainſi de ſuite.

$\frac{1}{10}$ prime $\frac{1}{100}$ ſeconde $\frac{1}{1000}$ tierce $\frac{1}{10000}$ quarte.

Qu'on exprime ainſi :

$$1^{\mathrm{I}} \times 1^{\mathrm{II}} \times 1^{\mathrm{III}} \quad 1^{\mathrm{IV}}.$$

Par le moyen de ces fractions décimales, on opere avec beaucoup de facilité ſur les fractions, comme les exemples ſuivans le démontrent.

Addition.

55. Soit 32634^{III} à joindre avec 8543^{III}

41177^{III}

Souſtraction.

56. Soit 8678^{IV} dont il faut ſouſtraire 5234^{IV}

reſte 3444^{IV}

Multiplication.

Soit 32343^{iii} à multiplier par 243^{ii}

$$\begin{array}{r} 97029 \\ 129372 \\ 64686 \\ \hline 7859349^{\text{v}} \end{array}$$

On a multiplié les chiffres à l'ordinaire, & l'on a joint les exposans du multiplicateur & du multiplicande.

Division.

58. Pour diviser 7859349^{v} par 32343^{iii} on opere à l'ordinaire, & l'on donne au quotient pour exposant l'excès de l'exposant du dividende sur le diviseur ce qui est bien évident, parce que ce sont des cent milliémes divisés par des milliémes dont le quotient ne peut être que des centiémes.

$$\begin{array}{r|l} 7859349^{\text{v}} & 32343^{\text{iii}} \\ \cline{2-2} 139074 & 243^{\text{ii}} \\ 97029 & \\ 00000 & \end{array}$$

Le calcul par les décimales est beaucoup plus expéditif que par les fractions ordinaires. Soit, par exemple, $9^{\text{toises}}\ 3^{\text{pieds}}$ à multiplier par $5^{\text{t.}}\ 4^{\text{pds.}}\ 6^{\text{pouces}}$, il faut en opérant à l'ordinaire multiplier 9 par 5, on aura 45^{t} quarrées, puis il faut agir pour trois pieds, lesquels étant la demi de la toise donneront $2^{\text{t}}\ 5^{\text{pd.}}\ 3^{\text{p}}$; enfin il faut agir pour les 4^{pds} d'en-bas, c'est-à-dire, pour 2^{pds} & pour 2^{pds} qui donneront 3^{t} & 3^{t}; puis il faut prendre le quart de ce que 2^{pds} auront donné, ce sera pour les 6^{p}, & l'on aura $4^{\text{pds}}\ 6^{\text{p}}$ pour le produit de $9^{\text{t}}\ 3^{\text{pds}}$ par $5^{\text{t}}\ 4^{\text{pds}}\ 6^{\text{p}}$, le tout joint ensemble donnera $54^{\text{t}}\ 3^{\text{pds}}\ 6^{\text{p}}$.

9^{t}	3^{pds}	
5	4	6
45		
2	5	3
3		
3		
0	4	6
54^{t}	3^{pds}	$9^{\text{pouces.}}$

Le Calcul par les Décimales.

Mais par les fractions décimales il faut s'y prendre ainsi. Regardez $9^{\text{t}}\ 3^{\text{pds}}$ comme 9^{t} 5 dixiémes & $3^{\text{t}}\ 4^{\text{pds.}}\ 6^{\text{p}}$ comme 5^{t} 75 centiémes.

Or $9^t \frac{5}{10} = 95^I$ ou primes.

$5^t\ 4^{pds}\ 6^p = 5.\ 75^{II}$ secondes ; parce que $4^{pds}\ 6^p$ sont les trois quarts de la toise, & les $\frac{3}{4}$ de cent sont 75.

On doit remarquer que l'on suppose toujours l'entier divisé en 10, 100, 1000, parties égales, au lieu de le supposer divisé en ses parties ordinaires, telles que 6^{pds} pour la toise, 12^p pour le pied : ceci supposé, on a donc

$\left.\begin{array}{l} 9\ \ 5^{I} \dots \text{primes.} \\ 5\ \ 75^{II} \dots \text{secondes.} \end{array}\right\}$ à multiplier l'un par l'autre.

On aura $95^I \times 575^{II} = 54625^{III} = \frac{54625}{1000} = 54^t\ \frac{625}{1000} = \frac{5}{8} = 3^p\ 9^p$.

De l'extraction des Racines fractionnaires.

59. Il faut extraire par les régles ci-dessus la racine du numérateur & du dénominateur de la fraction.

$$\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \qquad \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$$

60. Lorsque les puissances numériques sont imparfaites, il faut en retrancher la plus grande puissance parfaite que l'on peut, & former du reste le numérateur d'une fraction dont le

dénominateur soit la différence de cette puissance à la puissance immédiatement supérieure.

Soit $\sqrt{32} = 5 + \frac{7}{11}$ $\sqrt{35} = 5\frac{10}{11}$.
Reste 7. 10

25 est le plus grand quarré contenu en 32 dont le reste est 7.

Le quarré supérieur à 25 est 36, dont la différence à 25 est 11, dénominateur de la fraction, dont le reste 7 est le numérateur.

Cette méthode est une approximation dont on peut se servir au défaut des décimales.

61. Pour exprimer la fraction dans la racine cubique; on pose pour numérateur le reste, & le dénominateur est triple du quarré de la racine trouvée, plus trois fois la racine, plus un.

$$\sqrt[3]{63} = 3\frac{36}{37} \qquad \begin{array}{r} 27 \\ 9 \\ 1 \\ \hline 37 \end{array}$$
36

De l'extraction par les Décimales.

62. Soit $\sqrt{35}$, joignez-y autant qu'il vous plaira de zéros, puis extrayez à l'ordinaire, & négligez la fraction.

109
9
981

35|00|00|00 (5916'''.
25
100.0
981

1900
1181

71900
70956

944

5|916|1000
1000

59
59
1181
1
1181

591
591
11826
6
70956

Vous trouverez 5916, à cause des 1000000 par lesquels on a multiplié 35.

Pour les racines cubiques décimales, joignez-y 9 zéros, vous aurez des milliémes ; comme on peut le voir en prenant la racine de $\sqrt[3]{35}$.

De l'Equation.

63. L'analyse est l'application des Régles, tant numériques qu'algébriques, à la solution des diverses questions que l'on peut faire sur la quantité.

La premiere & la plus difficile régle de l'analyse, est de former une équation par le moyen des conditions du problême, dont il faut sçavoir profiter avec dextérité.

L'équation est composée de deux membres séparés par ce signe $=$, chaque membre peut être composé de plusieurs termes : Par exemple.

$$7 + 8 = 20 - 5$$

Tout l'Art consiste à ne jamais troubler une équation malgré les differentes opérations que l'on peut faire sur les termes de l'un & l'autre membres.

REGLES GENERALES.

Premiere Régle.

64. On ne peut faire passer un terme d'un membre d'équation dans l'autre, sans changer le signe dont

il est affecté en son contraire. Par exemple.

$$3 + 4 = 12 - 5$$

Donc $3 + 4 + 5 = 12$

Donc $4 + 5 = 12 - 3$

On voit que par ce moyen, on ne trouble point l'équation.

Cette régle sert à dégager l'inconnu dont on cherche la valeur. Par ex. Pierre dit que son âge, augmenté de 10 ans, seroit égal à celui de Jean diminué de 3 ans, & l'on sçait que l'âge de Jean, plus 5 ans seroit 36; comment déterminer les deux ages?

Soit x âge de Pierre.

y âge de Jean.

Donc $x + 10 = y - 3$

Donc $y + 5 = 36$

Donc $y = 31$

Donc $x + 10 = 31 - 3 = 28$

Donc $x = 18$

Seconde Régle.

65. Lorsque l'inconnu se trouve multiplié ou divisé par quelque quantité connue, il faut le dégager & le laisser seul dans un membre de l'é-

quation, dont l'autre ne doit contenir que des quantités connues.

Soit cette expression.

$$\frac{5x}{9} = 37$$

Donc $\frac{5x}{9} = \frac{333}{9}$

Donc $5x = 333$

Donc $x = \frac{333}{5} = 66\,\frac{3}{5}$

Lorsque l'inconnu non-seulement est affecté comme ci-dessus, mais même qu'il est élevé à quelque degré, il faut le réduire à sa plus simple expression par le moyen des extractions de racine.

Soit $\frac{3x^2}{4} = 12$

Donc $3x^2 = 48$

Donc $x^2 = 16$

Donc $x = \sqrt{16} = 4$

66. Pour completter une équation du deuxiéme degré, afin de pouvoir extraire la racine, il faut prendre la $\frac{1}{2}$ du coefficient qui affecte l'inconnu élevé au moindre degré; quarrer cette demie, & la joindre de part &

d'autre dans l'équation ; alors il ſera facile d'extraire la racine du membre de l'équation, où ſe trouvera l'inconnu ; mais ſouvent on ne le pourra point extraire numériquement de l'autre membre, mais la choſe ſera toujours poſſible par le ſecours de la Géométrie, comme on le verra dans les problêmes.

EXEMPLE.

Soit $x^2 + 6x = 91$

Donc $x^2 + 6x + 3 \times 3 = 91$
$+ 3 \times 3 = 100$

Donc $x^2 + 6x + 9 = 100$

Donc $x + 3 = 10$.

C'eſt-à-dire que la racine de $x^2 + 6x + 9$, eſt toujours la racine de $x^2 + \frac{1}{2}$ du coefficient de x ; ce qu'il eſt aiſé de voir en quarrant $x + 3$

Donc $x = 7$.

PREUVE.

$$x^2 = 49$$
$$6x = 42$$

$$x^2 + 6x = 91$$

La racine d'une équation du ſecond degré complette, est toujours égale à la racine du quarré de $x^2 + \frac{1}{2}$ du coefficient de x.

Autre Exemple.

Soit $\frac{4x^2}{3} + 8x = 52$

Donc $4x^2 + 24x = 156$

Donc $x^2 + 6x = 39$

D. $x^2 + 6x + 9 = 39 + 9 = 48$

Donc $x + 3 = \sqrt{48}$ qu'on ne peut exprimer que géométriquement.

On ne s'étend pas plus loin, parce qu'on ne prétend donner que des récréations dont la facilité doit être le caractere.

Propriétés

Propriétés de certains Nombres.

Le nombre 37 eſt tel, que multiplié par quelqu'un des termes de cette progreſſion Arithmétique.

3, 6, 9, 12, 15, &c. Tous les produits ſeront compoſés de chiffres ſemblables.

37	37	37
3	6	9
111	222	333

Remarquez que le produit 111 eſt compoſé, de 37 multiplié par 3 qui eſt égal à 7 multiplié par 3 qui donneront 21, & à 30 multiplié par 3 qui donneront 90; c'eſt-à-dire en tout 1 & 11 dixaines qui ne peuvent s'exprimer que par 3 unités par la loi des nombres.

Il ſuit de-là qu'il n'eſt pas étonnant que 37 multiplié par 6 donne le double de ces trois unités, & ainſi de ſuite.

Le nombre 5, a cela de particulier que multiplié par un impair, le produit ſe termine par 5, & que multiplié par un nombre pair, il ſe termine par zéro.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ \hline 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

Le nombre 9 a cela de particulier, que tout nombre dont il ſera un ſous-multiple, formera par la ſomme de ces figures un multiple de 9.

Soit $17 \times 9 = 153$ multiple de 9; or la ſomme des figures de 153 eſt $1 + 5 + 3 = 9$.

De même $753 \times 9 = 6777$, la ſomme des figures eſt $6 + 7 + 7 + 7 = 27$ multiple de 9.

Ce qui ne doit point ſurprendre ſi l'on fait attention que le nombre qui excede 9 s'exprime par un & zéro, que conſéquemment deux 9 feront $10 + 8$. Trois 9 feront $20 + 7$, &c. où l'on voit que les dixaines & les unités ſont réciproquement complemens de 9.

Si l'on prend deux nombres quelconques différens l'un de l'autre, l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence, est divisible par 3.
Soit 16 & 17, leur somme 33 est divisible par 3.
Soit 19 & 13, leur différence 6 est divisible par 3.

Tout nombre quarré ne peut finir que par deux zéros, ou par 1, 4, 5, 6, 9, ce qui sert à déterminer d'un coup d'œil si une quantité numérique est un quarré.

Le nombre 2 est le seul des nombres entiers dont la somme & le produit soient égaux, $2+2=4$, & $2\times 2=4$.

Mais on peut trouver en nombre fractionnaires deux quantités telles, que leur somme & leurs produits fassent la même expression numérique.

Prenez deux nombres dont la somme divisée, par chacun des susdits nombres, donnera les nombres requis.

EXEMPLE.

Soient 5 & 7, leur somme est 12. $\frac{12}{5}$ & $\frac{12}{7}$ sont tels que $\frac{12}{5} + \frac{12}{7} = \frac{12}{5} \times \frac{12}{7}$.

$$\frac{12}{5} + \frac{12}{7} = \frac{84 \quad 60}{35} = \frac{144}{35}.$$

$$\frac{12}{5} \times \frac{12}{7} = \frac{144}{35}.$$

PROBLÈMES.

1°. *Exprimer un nombre pair par 3 impairs.*

SOLUTION.

Prenez tel nombre pair qu'il vous plaira, diminuez-le de l'unité, & changez cette unité en une fraction dont le numérateur & le dénominateur soient ce même nombre.

EXEMPLE.

Soit 8 $\quad 7\frac{7}{7} = 8$

Soit 22 $\quad 21\frac{21}{21} = 22$

2°. *Exprimer un nombre pair par 4 impairs.*

Prenez tel nombre pair que ce ſoit de deux figures dont le caractere des dixaines ſoit un chiffre impair, & que celui des unités ait un de plus, & opérez comme ci-devant.

Soit 34 Soit 56
$33\frac{3}{3}$ $55\frac{5}{5}$.

Obſervez que le nombre 100 peut s'exprimer ainſi, $99\frac{9}{9}$. quoiqu'il n'ait pas les conditions requiſes.

3°. *Exprimer un nombre pair par tant d'impairs qu'on voudra.*

Prenez un nombre ayant les dernieres conditions, tel que $78 = 77 + \frac{77}{77}$ &c.

4°. *Exprimer un nombre impair par pluſieurs nombres pairs, dont les caracteres ſoient les mêmes.*

SOLUTION.

Prenez tel nombre qu'il vous plaira dont toutes les figures ſoient des nombre pairs & de même caractere; excepté la derniere qui doit avoir une unité de plus. Exemple..

Soient $2223 = 2222 + \frac{2222}{2222}$.

5°. *Exprimer 12 en deux manieres différentes, dont chacune contienne des figures semblables.*

$12 = 3 + 3 + 3 + 3 = 11 \frac{1}{1}$.

6°. *Déterminer tous les diviseurs d'une quantité numérique, par exemple de 360.*

Il faut diviser le nombre donné par 2 autant qu'il le peut, & le restant par 3 &c. enfin prendre tous les diviseurs simples; c'est-à-dire, d'une seule figure, jusqu'à ce que le dividende soit réduit à l'unité.

360	Diviseurs simples.		
180	2		
90	2	4 Diviseurs composés.	
45	2	8	
15	3	6. 12. 24	
5	3	9 18. 36	72
1	5.	10. 20. 40	15. 30. 60 120
			(45, 90, 180, 360.

On a donc 6 diviſeurs ſimples par le moyen deſquels on va trouver les compoſés en cette maniere.

2 fois 2 ſont 4

2 fois 4 ſont 8

3 fois 2 ſont 6 ; 3 fois 4 ſont 12 ; 3 fois 8 ſont 24

3 fois 3 ſont 9 ; 3 fois 6 ſont 18 ; 3 fois 12 ſont 36 ; 3 fois 24 ſont 72

5 fois 2 ſont 10 ; 5 fois 5 ſont 25 ; 5 fois 8 ſont 40

5 fois 3 ſont 15 ; 5 fois 6 ſont 30 ; 5 fois 12 ſont 60 ; 5 fois 24 ſont 120

5 fois 9 ſont 45 ; 5 fois 18 ſont 90 ; 5 fois 36 ſont 180 ; 5 fois 72 ſont 360.

GEOMETRIE.

67. La Géométrie est la Science de l'Etendue.

Définitions.

L'Etendue en longueur se nomme *Ligne.*

L'Etendue en longueur & largeur se nomme *Surface.*

L'Etendue en longueur, largeur & profondeur, se nomme *Corps* ou *Solide.*

Fig. 1. 68. La Ligne *droite* est le plus court chemin d'un point à un autre.

Fig. 2. 69. La Ligne *courbe* est toute ligne qui n'est pas la plus courte d'un point à un autre.

Fig. 3. 70. La Ligne *perpendiculaire* est celle qui tombe sur une autre, sans pancher plus d'un côté que d'autre.

La Ligne perpendiculaire est la plus courte de toutes celles qu'on puisse mener d'un point à une ligne.

On ne peut faire tomber sur une ligne qu'une seule perpendiculaire.

71. La Ligne *oblique* est celle qui rencontrant une autre ligne, panche & incline plus d'un côté que de l'autre. Fig. 3

72. Les Lignes *paralleles* sont celles qui sont équi-distantes l'une de l'autre. Fig. 4

Les Perpendiculaires entre deux paralleles mesurent la distance d'une parallele à l'autre, & par conséquent sont égales. Fig. 4

73. Un angle est l'ouverture de deux lignes qui se rencontrent en un point qu'on appelle le *Sommet* de l'angle.

74. Les angles sont, eu égard aux lignes qui les composent, *Rectiligne*, dont les deux lignes sont droites; *Curviligne*, fait de deux lignes courbes, & *Mixtiligne*, composé d'une ligne droite & d'une courbe. Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7

75. Un *Cercle* est une figure plane, terminée par le contour d'une seule ligne courbe, qu'on appelle *Circonference*, dont tous les points sont éga- Fig. 8

lement éloignés d'un point qu'on nomme *Centre*.

Arc de cercle est une partie de la circonférence d'un cercle.

Diametre d'un cercle est une ligne droite qui passe par le centre, & dont les deux extrêmités sont terminées par la circonférence.

Toute ligne bornée par la circonférence sans passer par le centre, est appellée *Corde*.

Une ligne tirée du centre à la circonférence, se nomme *Rayon*; tout diametre comprend deux rayons.

76. Les Géometres ont divisé le cercle en 360 parties, qu'on nomme *Degrés*. Chaque degré se divise en 60 parties, qu'on appelle *Minutes*. Chaque minute en 60 parties qu'on appelle *Secondes*. Les Gens de mer le divisent en 32 parties qu'ils appellent *Rhumbs*.

Peut-être les Astronomes sont-ils les auteurs de la division du cercle en 360 parties, ayant d'abord divisé l'année en 12 mois de 30 jours, partageant ainsi le cours annuel du Soleil en 360 parties.

La division du jour & de la nuit en 24 heures, confirma ce choix, en concevant que le Soleil parcouroit 15 degrés de son cercle par heure ; 15 fois 24 font 360.

D'ailleurs cette division est très-commode dans la pratique, ayant 24 diviseurs exacts.

77. La mesure d'un angle rectiligne est l'arc de cercle décrit du sommet de l'angle, & terminé par les deux côtés de l'angle. Fig. 1

Une ligne perpendiculaire sur une autre, fait deux angles droits qui ont chacun 90 degrés. Fig. 3

Celui qui est plus petit qu'un angle droit, s'appelle *Aigu*; celui qui est plus grand s'appelle *Obtus*.

On appelle *Angle au centre* celui qui se fait par deux rayons au centre du cercle. Fig. 3

On appelle *Angle à la circonférence*, celui qui a son sommet appuyé sur la circonférence d'un cercle, & les deux côtés posés sur deux points de la circonférence. Fig. 9

78. *Segment* de cercle, est une portion de cercle comprise entre une corde & un arc. On appelle *Flêche de l'Arc* le plus grand intervalle de l'arc à la corde. Fig. 9

79. *Secteur de Cercle*, est la portion Fig. 9

de cercle comprise entre deux rayons.

Fig. 10. 80. *Sinus de l'Arc*, ou d'un *angle*, est la perpendiculaire tirée de l'extrêmité d'un rayon sur le diametre ; le sinus peut toujours augmenter jusqu'à ce qu'il soit égal au rayon : alors il est *Sinus total.*

81. Les lignes qui rencontrent la circonférence d'un cercle sans la couper, sont dites *Tangentes du Cercle.*

82. Les lignes qui coupent le cercle, & se terminent à sa circonférence intérieure sont dites *Sécantes.*

PROBLÈMES

Sur les Lignes perpendiculaires, & paralleles.

Fig. 11. 83. Pour élever d'un point D pris sur une ligne droite, une perpendiculaire.

Du point D, comme centre, & d'un intervalle pris à volonté, décrivez une demie circonférence qui coupera la ligne donnée en deux points; de ces points comme centre, & d'un même intervalle pris à discrétion, décrivez deux arcs qui se coupent par ce point & le point D ; tirez une droite, elle sera perpendiculaire sur la ligne donnée.

84. Pour abbaisser d'un point D, pris hors d'une ligne, une perpendiculaire.

Du point D, comme centre & d'un intervalle pris à discrétion, décrivez un arc qui coupe la ligne donnée en deux points, desquels comme centre, & d'un intervalle pris à volonté, décrivez deux arcs qui s'entrecoupent en K; par ce point, & le point D, tirez la ligne, elle sera perpendiculaire sur la ligne donnée. F. 11

Le trait d'Equerre, le trait à Plomb; le trait Quarré des Ouvriers, sont la même chose que la perpendiculaire.

85. Pour couper une ligne droite en deux parties égales. F. 12

Des extrêmités de la ligne donnée comme centre, & d'un même intervalle, décrivez deux arcs qui s'entrecoupent en dessus & en dessous; par ces points tirez une ligne, elle coupera la ligne donnée en deux également.

Lorsque la ligne à diviser est sur un terrein spacieux, on se sert de chaîne ou corde, & on opére de même.

86. Pour trouver sur une ligne un point également éloigné de deux points donnés hors de cette ligne.

Fig. 14 Soient les points donnés D K, tirez une ligne de l'un à l'autre; au milieu de cette ligne, faites-y la perpendiculaire qui donnera un point M sur la ligne, également éloigné des points donnés.

87. Pour mener d'un point donné une parallele à une ligne donnée P O.

Fig. 15 Du Point donné D, & d'un autre point quelconque O, menez deux perpendiculaires, prenez M O égale à D P, menez D M, elle sera la parallele cherchée, par la propriété des paralleles.

Des Angles & de leur valeur.

Fig. 16 88. *La somme des angles formés d'un même côté, sur une ligne droite vaut* 180.[d]

Tous les angles qui peuvent se former autour d'un point sur un plan sont toujours égaux, pris ensemble à 360.[d] Donc il faut 1°. 4 quarrés. 2°. Six triangles équilatéraux. 3° Trois exagones. Voilà pourquoi le pentagone ne peut pas carreler une chambre ; car trois angles du pentagone valent 324 & 4 valent 432.

89. *Deux lignes qui se coupent font des angles opposés au sommet égaux.* Fig. 17

90. *Une ligne oblique qui coupe 2 paralleles fait avec elle 8 angles, dont 4 sont aigus & 4 obtus. Les 4 aigus de même que les obtus, sont égaux chacun à chacun.* Fig. 18

91. *L'angle qui a son sommet à la circonférence d'un cercle a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye.* Fig. 19

Soit l'angle au sommet A B E dont la mesure doit être la $\frac{1}{2}$ de l'arc A F valeur de l'angle du centre A C E, ce dont on peut s'assurer très-simplement, en décrivant du sommet B, ouverture de compas C E, l'arc F G, il sera moitié de l'arc A E. D'où l'on voit que l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence.

92. *L'angle formé par une Tangente & une corde, a pour mesure la moitié de son arc.* Fig. 20

Menez la ligne D P parallele à AB, les angles X X comme alternes sont égaux ; or l'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc D X par la précédente. Donc, &c.

94. *L'angle entre le centre & la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye, plus la moitié de l'arc renfermé entre le prolongement de ses côtes.*

Fig. 21 Les deux angles X & Z sont égaux ; or l'angle Z a pour mesure la moitié de l'arc M, plus la moitié de l'arc N ; or l'arc N est égal à l'arc P : Donc l'angle X a pour mesure la moitié de l'arc P, &c.

95. *L'angle hors de la circonférence a pour mesure la $\frac{1}{2}$ de la différence des deux arcs interceptés.*

Fig. 22 Les deux angles X & Z sont égaux ; or l'angle Z a pour mesure la moitié de l'arc G M ; donc l'angle X a pour mesure la moitié du même arc : or G M est la différence de A M & de A G : or A M est égal a N P ; donc G M est la différence de N P & de A G. Donc, &c.

PROBLÊMES

Sur les Angles.

96. Pour faire un angle égal à un angle donné quelconque.

Des points C & A, & même rayon, décrivez l'arc indéfini N X, prenez N égale à M, tirez AD: l'angle B A D est égal à l'angle C. Fig. 23.

Si on proposoit de faire un angle d'un nombre de degrés quelconques, il faudroit se servir de l'instrument appellé *Rapporteur*, qui n'est autre chose qu'un demi-cercle de cuivre ou de corne divisé en degrés & demi degrés.

On pose son diametre sur une ligne, ensorte que son centre soit sur le point où l'on veut que soit le sommet de l'angle; on compte sur sa circonférence le nombre des degrés demandés, on marque un point à l'endroit qui répond à l'extrêmité de ces degrés; & en menant une ligne par ce point, & celui sur lequel on a posé le diametre du rapporteur, on aura l'angle de la quantité de degrés qu'on voudra.

On trouve de la même maniere, avec le rapporteur, la valeur des degrés d'un angle proposé.

97. Pour couper un angle en deux parties égales.

Fig. 24 Du sommet de l'angle pris pour centre, décrivez un arc entre ces côtés ; coupez ensuite cet arc en deux parties égales.

On n'a pû trouver jusqu'à présent la méthode Géométrique de diviser un angle rectiligne en deux parties égales, c'est ce qu'on appelle, la *Trisection de l'angle*.

Quand l'angle est droit, voici la pratique & la façon dont les Horlogers divisent le cercle de la Montre en douze parties.

Ils font le quart de cercle A M P ; ils prennent la distance du rayon M A, Fig. 25 & la portent de M en O sur ce quart de cercle ; ils portent la même distance de P en N, & l'angle droit A M P est divisé en trois ; l'arc P N est de *60* degrés, par propriété du rayon, Donc l'arc M N est de 30 degrés.

98. Pour mener d'un point donné une Tangente à un Cercle.

Du centre A, menez par le point

B la ligne A B, à son point de contingence, tirez la perpendiculaire D B, elle sera la Tangente demandée, puisqu'elle est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon. Fig. 26

Si on fixoit le point d'où doit partir la Tangente, menez une ligne du centre au point donné, décrivez sur cette ligne un demi-cercle, menez du point donné à l'interjection des deux cercles une ligne, elle sera la Tangente demandée; l'angle A B est droit, puisqu'il s'appuye sur un demi-cercle. Fig. 27

DES FIGURES PLANES,

Considérées suivant leurs côtés & leurs angles.

DEFINTIONS.

99. Les Géometres entendent par *figure*, un espace terminé de tous côtés, le Triangle est la plus simple de toutes les figures rectilignes: c'est une surface bornée par trois côtés qui forment trois angles.

Le Triangle *équilatéral* a ses trois côtés égaux.

Le Triangle rectangle a un angle droit, le côté opposé à l'angle droit, s'appelle *hypothenuse*, le triangle *obtusangle* a un angle obtus, l'*acutangle* a ses trois angles aigus.

Les Triangles *équiangles* sont ceux dont les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.

100. Les figures de quatre côtés sont dites *Quadrilateres*; le *Quarré* a quatre côtés égaux & ses angles droits; le *Rectangle* a quatre angles droits, & seulement ses côtés opposés paralleles & égaux: les Ouvriers l'appellent *Quarré long*. Le *Rhombe* ou *Losange*, n'a aucun angle droit, il a ses côtés & ses angles opposés égaux; le *Rhomboïde* a ses côtés opposés paralleles sans angle droit.

Ces quatre figures sont dites *Parallelogrammes*.

Une ligne tirée de l'angle d'un quadrilatere à l'angle opposé, est dite *Diagonale*.

Le *Trapeze* est un quadrilatere dont les quatre côtés sont inégaux, mais dont deux sont paralleles.

Le Trapezoïde n'a ni côtés paralleles, ni égaux.

101. Toute figure de plus de qua-

tre côtés, se nomme généralement *Polygone*; & prend un nom particulier du nombre de ses côtés.

Un Polygone de cinq côtés se nomme - - - - *Pentagone*.
De 6 côtés - - - *Exagone*.
De 7 - - - - - *Eptagone*.
De 8 - - - - *Octogone*.
De 9 - - - - - - *Enneagone*.
De 10 - - - - *Decagone*.
De 11 - - - - *Endecagone*.
De 12 - - - - - *Dodécagone*.

Tous ces Polygones sont *réguliers* quand ils ont tous leurs côtés égaux, & *irréguliers* quand ils n'ont pas leurs côtés égaux.

Le *Perimetre* d'un Polygone est une ligne égale à tous les côtés, qui font le contour du Polygone, soit régulier, soit irrégulier,

102. Les figures *Isoperimetres* sont celles qui ont un égal contour, elles n'ont pas toujours pour cela une égale surface.

Apotheme est la perpendiculaire abbaissée du centre du Polygone sur un de ses côtés; dans un Polygone d'une infinité de côtés, l'Apotheme devient rayon, Une figure eſt *inſcrite* dans un cercle, lorſque tous ſes angles touchent la circonférence de ce cercle, & elle eſt *circonſcrite* lorſque ſes côtés touchent la circonférence au-dehors.

103. *Les trois angles d'un triangle ſont égaux à deux droits.*

Fig. 28 Si on inſcrit un triangle dans un cercle, chaque angle aura pour meſure la moitié de ſon arc oppoſé, mais les trois moitiés ſont égales à la demi-circonférence; donc les trois angles du triangle ont pour meſure cette demi-circonférence, donc ils ſont égaux à deux droits.

Les trois angles d'un triangle équilatéral ſont égaux.

Fig. 29 Faites paſſer une circonférence de cercle par le ſommet des angles, les trois lignes du triangle ſont égales; donc les arcs qui les ſoutiennent ſont égaux: or ces arcs meſurent les angles, donc &c.

Chaque angle d'un triangle équilateral eſt de 60^{d}.

Les deux aigus d'un triangle rectangle valent 90^{d}.

Lorſqu'on connoît la valeur de deux angles, on connoît le troiſiéme qui en eſt le ſupplément.

Si l'on a l'angle du ſommet d'un triangle iſocelle, on connoît ceux de la baſe.

Si on connoiſſoit un des angles de la baſe, le double de ſa valeur retranché de 180^{d} donneroit l'angle du ſommet.

104. *Les angles de la baſe d'un triangle iſocelle ſont égaux.*

Faites paſſer une circonférence par le ſommet des angles, les lignes ſur la baſe deviendront cordes égales, d'arcs égaux; donc &c. Fig. 30

105. *Les trois angles d'un triangle ſcalene ſont inégaux.*

Faites paſſer une circonférence par les angles, les côtés ſont inégaux; donc les arcs, &c. Fig. 31

106. *L'angle extérieur d'un triangle eſt égal aux deux intérieurs oppoſés.*

Quand on prolonge la baſe d'un

triangle, il est bien évident qu'il se forme un angle, qui avec l'angle intérieur fait une demi-circonférence ; mais cet angle avec les deux intérieurs vaut aussi une demi-circonférence ; donc l'angle exterieur vaut les deux intérieurs opposés.

Fig. 32

107. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on mene à son hypothenuse une perpendiculaire, ce triangle sera divisé en deux triangles semblables au triangle total, & conséquemment semblables entr'eux.*

Fig. 33

La perpendiculaire tirée de l'angle droit sur la base y forme deux angles droits ; voilà déja trois triangles qui ont chacun un angle droit. Si ensuite on compare les angles de la base, & qu'on les considere comme appartenans au premier triangle rectangle, & aux nouveaux formés par la perpendiculaire, on verra qu'ils sont communs à l'un & à l'autre ; donc ces triangles pris deux à deux auront chacun deux angles égaux ; donc le troisiéme l'est aussi ; dont ils sont semblables au triangle total, & conséquemment entr'eux.

108.

108. *Deux triangles ſont égaux en tout, ſi les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre, chacun à chacun.*

109. *Deux triangles ſont égaux, s'ils ont deux côtés, & les angles compris par ces deux côtés égaux entr'eux.*

110. *Deux triangles ſont égaux qui ont baſes égales & les angles adjacens égaux, chacun à chacun.* Ces trois propoſitions ſont importantes, & peuvent ſe prouver par la ſuperpoſition.

111. *Deux lignes qui ſe coupent entre deux paralleles, forment deux triangles ſemblables.*

Les angles *de la baſe comme alternes* ſon égaux, les deux oppoſés au ſommet le ſont auſſi ; donc. Fig. 34

112. *Les quatre angles d'un Quadrilatere quelconque ſont égaux à quatre angles droits.*

On peut le diviſer en deux triangles, chaque triangle vaut deux droits ; donc. Fig. 35

113. *Tout Quadrilatere inſcrit dans un cercle, a la ſomme de ſes angles oppoſés, égaux à deux angles droits.*

Fig. 36 36. Ces angles ont leurs ſommets à la circonférence, donc ils ont pour meſure la moitié des arcs ſur leſquels ils s'appuyent, mais ces arcs comprennent toute la circonférence; donc.

114. *Les complemens d'un parallelogramme quelconque ſont égaux.*

Fig. 37 La diagonale partage le parallelogramme en deux triangles égaux, chacun de ſes triangles en renferme deux autres égaux, chacun à chacun; ſi on les ôte de part & d'autre, les reſtes qui ſont les deux complemens, ſeront égaux.

115. *Tout Polygone rectiligne ſe peut partager en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux.*

Fig. 38 Soit l'Exagone *x*; menez des lignes d'angles en angles, vous trouverez quatre triangles; donc les angles d'un Polygone ſont égaux à deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés moins quatre ; donc tous les angles de l'Exagone valent huit angles droits.

PROBLÉMES.

116. Pour conſtruire un Polygone d'un nombre déterminé de côtés, décrivez une circonférence de cercle, & partagez-la en autant de parties égales qu'on voudra donner de côtés au Polygone.

Pour former un Exagone, ouvrez le compas d'un intervalle égal au rayon.

L'Exagone donne les Polygones de 12, de 48, de 96, de 192 côtés.

117. Pour décrire un Octogone, tracez un quarré dans le cercle en menant deux diamétres qui ſe coupent à angles droits, décrivez des arcs qui coupent l'arc ou la corde en deux parties égales, vous aurez un Octogone ; ce Polygone donne ceux de 16, 32, 64, &c.

118. Pour décrire un Pentagone ; prenez le cinquiéme de 360 qui eſt 72, faites au centre du cercle un an-

gle de 72 avec le rapporteur, la corde de cet angle sera le côté du Pentagone.

On suivra la même méthode pour les Polygones impairs.

DES FIGURES
considérées suivant leurs surfaces.

119. Deux ou plusieurs figures sont *équiangles* lorsque les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.

120. Les figures *semblables* sont celles qui ont leurs angles égaux & leurs côtés proportionnels.

121. Les figures *réciproques* sont celles dont les côtés sont une proportion, & dont les moyens sont dans une figure & les extrêmes dans l'autre ; conséquemment les figures réciproques sont toujours égales en superficie.

Les côtés homologues ou correspondans dans les figures semblables, ce sont ceux qui sont opposés à des angles égaux.

122. *Les Parallelogrammes sont égaux lorsqu'ils ont même base, & qu'ils sont renfermés entre les mêmes paralleles.*

Deux figures sont égales lorsque les Elémens de l'une sont égaux à ceux de l'autre, & que le nombre de ces élémens est égal dans les deux figures ; donc, &c. Fig. 38

Autre Démonstration.

123. Les parallelogrammes ABCD, ABEF sont sur même base, & entre mêmes paralleles, les triangles AFD, BEC sont égaux ; si on ôte de part & d'autre le triangle commun GED, il restera deux Rhombes égaux ; si on ajoute à ces deux Rhombes le triangle commun AGB, on aura le parallelogramme ABCD, égal au parallelogramme ABEF. Fig. 39

Donc l'aire d'un parallelogramme est égale à sa hauteur multipliée par sa base.

Cette proposition est le fondement de l'arpentage.

124. *Les Triangles qui ont une même base, & sont entre les mêmes paralleles, sont égaux.*

Les Triangles sont moitié des Parallelogrammes.

Donc l'aire d'un triangle est égale à la moitié de sa base multipliée par la hauteur, ou la moitié de la hauteur multipliée par sa base.

125. *Un Trapeze est égal à un triangle de même hauteur que lui, & qui a pour base une ligne égale aux deux côtés paralleles pris ensemble.*

Fig. 40. Menez la diagonale EC & sa parallele AD, menez ED, l'on aura les triangles ECD, ECA égaux, étant sur même base & renfermés entre mêmes paralleles; ot ôtant le triangle commun EOC, reste le triangle EOA égal au triangle COD, & joignant de part & d'autre le Rhombe, on aura le triangle BED égal au Trapeze ACBE; donc pour avoir la surface d'un Trapeze, il faut prendre la somme des deux côtés paralleles, & la multiplier par la moitié de la hauteur.

Le Trapezoïde est une figure irréguliere, qui se toise en le réduisant en triangles.

126. *L'aire d'un cercle est égale au rectangle fait de la moitié de sa circonférence par le rayon.*

Le cercle est considéré comme un Polygone régulier d'un nombre de côtés infinis ; conséquemment on peut le regarder comme composé d'une infinité de triangles dont les sommets se réunissent au centre du cercle : or la surface d'un de ces triangles élémentaires est égale au produit du rayon par la moitié de sa base infiniment petite, donc la somme de tous ces triangles élémentaires est égale au produit de la moitié de la circonférence par le rayon.

Donc on le mesurera en multipliant la demi-circonférence par le demi-diamétre ou le rayon. Fig. 41

Archimede a établi qu'un cercle qui auroit 7 de diamétre auroit 22 de contour.

127. *La surface d'un cercle est au quarré de son diamétre, comme 11 est à 14.*

Soit un cercle dont 7 est diamétre, Fig. 42 la surface sera $11 \times 3\frac{1}{2} = 38\frac{1}{2}$. Le quarré du diamétre est 49, le rapport de $38\frac{1}{2}$ à 49 est comme celui de 11 à 14.

128. *Un Secteur de cercle est égal à un triangle qui auroit pour base cet arc, & pour hauteur son rayon.*

Fig. 43 Le cercle est égal à un triangle qui a pour base sa circonférence, & pour hauteur son rayon, de même une partie de cercle comprise par deux rayons, & un arc est égal à un triangle qui auroit pour base cet arc, & pour hauteur son rayon.

Donc on en trouvera l'aire en multipliant le rayon par la moitié de son arc.

PROBLÊMES.

Fig. 43 129. Pour trouver la surface d'un segment ABD, cherchez celle du secteur, & ôtant de cette superficie celle du triangle CAB, il est évident que le reste est la superficie du segment.

Fig. 44 130. Pour trouver la surface d'une couronne annullaire, prenez celle d'un trapeze, dont les deux côtés

Fig. 45 paralleles soient égaux aux circonférences de la couronne, & dont la hauteur soit la largeur de la couronne.

131. Si l'on proposoit de trouver la surface d'une *lunule portion de cercle terminée par deux arcs.* Fig. 46

Il faudroit de la surface du grand segment ôter celle du petit, resteroit la lunule.

132. L'Ellipse ou l'ovale du Jardinier doit être regardée comme un cercle dont les deux diamétres sont inégaux; or on a observé que le quarré du diamétre d'un cercle, c. a. d. le rectangle de deux diamétres, est à la surface du cercle comme 14 à 11; donc le rectangle des deux axes de l'ellipse est à sa surface comme 14 à 11.

Des lignes proportionnelles, & des figures comparées entr'elles.

133. Une ligne A B est divisée en G en moyenne & extrême raison, lorsque la ligne entiere AB est à la grande partie A G, comme cette grande à la petite G B; ansi le rectangle de la Toute par la petite est égal au quarré de la moyenne. Fig. 47

134. *Les surfaces des triangles de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.*

Fig. 48 La surface A D B = B P ; la surface D E B = C P , or B P est à C P comme B, C.

135. *Toute ligne menée parallelement à l'un des côtés d'un triangle, divise les deux autres en des segments ou parties proportionnelles.*

Fig. 49 S, surface de C D A, est à N comme A C est à C E.

S, surface de C D B, est à N comme B D est à D E; donc A C est à C E comme B D est à D E.

136. *Les triangles équiangles ou semblables, ont leurs côtés proportionnels.*

B A, C D :: B C, C O.

Que ces triangles se touchent en C, & soient sur une même ligne B O.

Prolongez B A & O D jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en F, les angles B C A, C O D sont égaux par hypothèse ; donc CA est parallele à OF.

Donc BA, AF, ou CD :: BC, CO. Fig. 50

137. *Le quarré de la tangente est égal au rectangle de la sécante par sa partie extérieure.*

Tirez BC & CD, les deux triangles ABC, ADC ont un angle commun A ; l'angle ACD a pour mesure la moitié de l'arc CD ; l'angle ABC lui est égal ayant pour mesure la moitié du même arc CD ; donc le troisiéme est égal au troisiéme, donc ces deux triangles sont semblables ; or les triangles semblables ont leurs côtés qui comprennent des angles égaux proportionnels, donc : Fig. 51

AB, AC :: AC, AD.

138. *Deux cordes qui se coupent dans un cercle ont leurs parties en proportion réciproque.*

Les angles D & C sont égaux s'appuyant sur un même arc BO, de même les angles B & O sont égaux par la même raison.

Donc AB, AD :: AO, AC. Fig. 52

139. *Deux sécantes qui partent d'un même point sont en raison réciproque avec leurs parties hors le cercle.*

Fig. 53 Tirez B O & D C, les triangles A C D, A O B seront semblables, car l'angle A est commun, les angles B & D sont égaux ; donc le troisiéme est égal au troisiéme.

Donc A O, A B :: A C, A D.

Donc le rectangle de A B par A C est égal au rectangle de A D par A O.

140. *En tout triangle, le plus grand côté est à la somme de deux autres, comme la différence de ces deux côtés est à la différence des segmens du plus grand fait par la perpendiculaire abbaissée du plus grand angle.*

Il faut prouver que le grand côté B C est à B E, somme des deux autres, comme B F, différence de ces côtés, est à B G, différence des segmens B D, D C. Fig. 54

Du point A & de l'intervalle du plus petit côté A C décrivez une circonférence.

Du même point A abbaissez la perpendiculaire, prolongez B A jusqu'en E.

Il est évident que B E est égal à la somme des côtés A B, A C, & que B F est leur différence.

Il est aussi évident que G C étant divisé en deux également au point D; B G est la différence qu'il y a entre B D & D C;

Or B C, B E :: B F, B G. Donc

141. *Le quarré de l'hypothenuse est égal aux quarrés des autres côtés pris ensemble.*

Du point X abbaissez sur D G la perpendiculaire X Y, le côté X C est moyenne proportionnelle entre C K & C M. Fig. 55.

Donc CK, ou CD, CX :: CX, CM.

Mais le rectangle compris sous les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes; donc le rectangle D M est égal au quarré de C X.

On démontrera de même que le rectangle G M est égal au quarré de K X, donc.

Démonstration de Pythagore, qui fut si satisfait de cette découverte, qu'il offrit aux Muses un sacrifice de cent Bœufs.

Fig. 56 Menez à CE la parallele AF, tirez AE, BD; les angles BCE, ACD étant droits sont égaux, donc si on ajoute à l'un & à l'autre l'angle commun ACB, on aura l'angle ACE égal à l'angle BCD; mais les côtés AC, CE sont égaux aux côtés CB, CD, chacun à chacun; donc les deux triangles ACE, BDC sont égaux, mais ils sont moitié, l'un ACE, du parallelogramme CF, & l'autre BDC du quarré CH; donc leurs doubles C. a. d. le parallelogramme CF, & le quarré CH, sont égaux.

On démontrera de même que le parallelogramme BE est égal au quarré BI, Donc.

142. *La diagonale d'un quarré est incommensurable avec le côté.*

Fig. 57 Si on conçoit sur un côté comme MN une partie infiniment petite comme M P, & que sur cette partie on imagine un quarré MPRS: MR sera la diagonale d'un quarré infiniment petit, & par conséquent sera plus longue que MP.

Soit le quarré ABCD, dont le côté AB est de 6 toises, sa surface est de 36, le quarré fait sur la diagonale est 72 double de 36, conséquemment le rapport est 2, qui n'est pas un nombre quarré. Fig. 58

Jamais on ne pourra trouver l'exacte valeur de AC en toises, pieds, pouces, lignes, &c. mais on peut en approcher à l'infini : elle seroit à peu près de $8 \frac{8}{17}$.

Il en est de même des parallelogrammes rectangles, lorsque la somme des quarrés de leurs dimensions ne forme pas un quarré parfait.

Soit un parallelogramme rectangle dont les côtés soient 5 & 7, la somme des quarrés de ces nombres est 74, qui n'est pas un nombre quarré, mais si leurs dimensions étoient 6 & 8, la somme de leurs quarrés est 100, dont la racine est 10; pour lors cette diagonale est commensurable.

Des Solides.

143. Le solide ou corps a trois dimensions, la surface qui le porte s'appelle *Base* du solide.

Cette base est un plan qui par son mouvement sert à décrire ce solide.

Lorsque ce plan est un parallelogramme, le solide est un *Prisme* dit *Parallelipipede.*

Fig. 59 Ce corps est terminé par six surfaces parallelogrammes, dont les opposées sont toujours semblables & égales. Lorsque ces surfaces sont des quarrés, il se nomme *Cube.*

Si le plan est un triangle, le solide est un *Prisme triangulaire*; si c'est un pentagone, c'est un *Prisme pentagonal*, &c. Si le plan est un cercle, c'est un *Prisme cilindrique*, ou simplement un *cilindre.*

La hauteur d'un prisme est la perpendiculaire tirée d'un point du plan supérieur sur la base, ou sur une base prolongée si le plan est oblique.

La *Pyramide* est un solide formé
Fig. 60 par le mouvement d'un plan qui s'éléve parellelement, & diminue jusqu'à ce qu'il se termine & se réduise

en un seul point qu'on appelle *Sommet*; on l'appelle *triangulaire*, *quarrée*, *pentagonale*, du nom de sa base.

Le *Cône* est un solide formé par le Fig. 61
mouvement d'un cercle qui se meut & qui diminue à proportion qu'il s'éléve.

Une *Sphere* ou *Globe*, est un solide terminé par une seule surface courbe, formé par le mouvement d'un demi-
cercle autour de son diamétre, dit Fig. 62
axe de la Sphere, dont les points opposés sont les *pôles* de l'*axe*.

Zone, est une portion ou ceinture de la surface de la sphere comprise entre deux cercles paralleles.

144 Il y a cinq corps qu'on nomme *Réguliers*, parce qu'ils sont terminés par des faces semblables.

Le *Thétraedre*, pyramide environnée de quatre triangles égaux & équilatéraux.

L'*Exaedre* ou *Cube*, compris sous Fig. 63
six quarrés parfaits.

L'*Octaedre* qui a pour surface 8 triangles égaux & équilatéraux.

Le *Dodécaedre* compris sous 6 pentagones égaux.

L'*Icosaedre* compris sous 20 triangles égaux & équilatéraux.

Les solides *semblables* sont terminés par un égal nombre de plans semblables, & ont toujours leurs dimensions proportionnelles.

145. *La surface d'un Prisme droit, sans y comprendre ses bases, est égale à celle d'un parallelogramme de même hauteur que ce prisme, & dont la base est égale au circuit de la base de ce prisme.*

Fig. 59 La surface d'un prisme droit est composée de plusieurs parallelogrammes, qui sont de même hauteur, & dont les bases forment le circuit de ce prisme; donc ils sont égaux à un parallelogramme de même hauteur que celle du prisme, & dont base est égale à son circuit.

146. *La superficie convexe du cilindre, est égale à un rectangle de même hauteur, & dont la base est égale à la circonférence du cercle qui sert de base au cilindre.*

Fig. 64 Un cilindre droit peut être regardé comme un prisme d'une infinité de faces; attendu que ces bases sont des cercles que l'on considere comme des polygones d'une infinité de côtés ; or ce prisme a toute sa superficie composée de rectangles qui auront tous la même hauteur de ce cilindre, & dont la base composera un seul rectangle, qui aura pour sa base la circonférence de la base du cilindre, & pour hauteur celle de ce même cilindre.

147. *La surface d'une pyramide droite, sans y comprendre sa base, est égale à un triangle qui auroit pour hauteur la perpendiculaire tirée du sommet de la pyramide sur un des côtés de sa base, & pour base une ligne égale au circuit du polygone qui sert de base à la pyramide.* Fig. 60

Toutes les faces des pyramides sont des triangles, mais ces pyramides étant droites, ces triangles sont de même hauteur ; donc ils sont égaux à un triangle de même hauteur qu'eux, & dont la base est égale à toutes leurs bases prises ensemble.

148. *La superficie du cône droit est égale à celle d'un triangle qui auroit pour hauteur le côté du cône, & pour base sa circonférence.* Fig. 61

Le cône droit étant considéré comme une pyramide d'une infinité de côtés, doit avoir sa surface convexe composée d'un nombre infini de petits triangles isocelles qui auront la hauteur du côté de ce cône; & comme ils auront tous ensemble pour base la circonférence du cône, leur somme sera égale à un seul triangle de même hauteur, lequel aura pour base la circonférence de celle du cône.

Cela devient encore plus évident si on fait attention que le développement d'un cône est un secteur de cercle, & nous avons vû que la surface d'un secteur, est égale au produit de l'arc de ce secteur par la moitié du rayon.

Fig. 65 *La surface d'un cône tronqué, est égale à un trapeze qui a pour hauteur la perpendiculaire du cône tronqué, & dont les bases paralleles sont égales aux circonférences des bases supérieures & inférieures du cône.*

Par conséquent pour déterminer cette surface il faut multiplier le côté du cône tronqué par la moitié de la somme des deux circonférences opposées.

149. *La surface de la sphere est égale au produit de son diamétre par la circonférence de son grand cercle.*

Le triangle A H B est semblable au triangle D E M.

Donc A H, D E :: A B, M D.

Or A H est à A B comme la circonférence de A H à la circonférence de A B; donc la circonférence de A H est à D E, comme la circonférence de A B est à M D; donc la circonférence de A H multipliée par M D est égale à la circonférence de A B multipliée par D E; or la circonférence de A H multipliée par M D est égale à la surface du cône tronqué M D K N; donc le produit de la circonférence d'un grand cercle de la sphere par l'épaisseur d'une zone, est égal à la surface de cette zone, donc la surface de toutes les zones est égale au produit d'un grand cercle de la sphere par l'axe. Fig. 66

Corollaire.

La surface d'une sphere est égale à la superficie convexe du cilindre circonscrit.

L'axe N P est égal à la hauteur Q I
Fig. 67 du cilindre, aussi-bien que la circonférence MNOP, à la circonférence QRST; donc le rectangle de l'axe par le grand cercle de la sphere est égal au rectangle fait de la hauteur du cilindre, & de son contour; mais le premier est égal à la surface de la sphere, & le second à celle du cilindre. Donc.

Fig. 68 La surface d'une calotte sphérique est égale à celle d'un cilindre dont la hauteur est égale à la flêche de la calotte, & dont la base a pour diamétre celui de la sphere dont la calotte fait portion.

Des Corps considérés suivant leurs Solidités.

150. Les *prismes* & les *pyramides* de même base & de même hauteur sont égaux.

151. *Toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur.*

Fig. 69 Qu'on tire trois diagonales, on aura trois pyramides, dont deux seront égales ayant pour base des triangles égaux, & pour hauteur celle de la pyramide ; la troisiéme est plus irréguliere, mais elle a pour base le triangle ADC, égal au triangle CDE, base de la seconde, elles ont même hauteur. Donc.

Donc le cône est le tiers d'un cilindre de même base & de même hauteur.

152. *Une sphere est égale à un cône qui a pour hauteur le rayon, & une base égale a la surface de la sphere.* Fig. 70

La sphere peut être conçûe comme formée d'une infinité de cônes, qui ont pour hauteur le rayon de la sphere & dont tous les sommets sont au centre & toutes les bases à la surface. Or la solidité d'un de ces petits cônes est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur ; donc la solidité entiere de la sphere est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon.

Des mesures solides.

153. Les mesures des corps sont des toises *cubes*, pieds & pouces *cubes*.

Les prismes & les cilindres droits

& obliques sont égaux aux produits de leurs bases par leur hauteur.

Les pyramides & les cônes sont égaux au produit de leur base par le tiers de leur hauteur.

La sphere est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon.

Tous les autres peuvent être réduits en pyramides, comme les figures planes peuvent être réduites en triangles.

Du rapport des Solides.

154. Les prismes sont en raison composée de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

Deux solides sont en raison composée des trois dimensions de l'un aux trois dimensions de l'autre.

Corollaires.

Les solides semblables sont en raison triplée des racines ; ainsi les spheres sont en raison triplée de leurs diamétres ou comme les cubes des diamétres.

Si une sphere a un diamétre double, triple, quadruple d'une autre, sa surface sera 4, 9, 16 fois plus grande, & sa solidité 8, 27, 64 fois plus grande.

DE

DE LA TRIGONOMETRIE RECTILIGNE.

155. LA Trigonométrie eſt l'art de meſurer les triangles. C'eſt une connoiſſance abſolument néceſſaire pour paſſer de la ſpéculation à la pratique de la Géométrie.

Il n'y a point de figure rectiligne qui ne ſe puiſſe réduire en triangle ; par conſéquent, lorſqu'on ſçait calculer le triangle, on calcule aiſément toutes les autres figures.

156. Tout triangle eſt compoſé de ſix parties eſſentielles ; ſçavoir, trois angles & trois côtés.

L'objet de la Trigonométrie eſt de réſoudre ce problême général : *étant donné trois des parties d'un triangle, trouver les trois autres parties.*

Obſervez que les trois angles étant

donnés, on ne peut trouver que le rapport des trois côtés, & non pas leur valeur réelle.

DEFINITIONS.

Fig. 71 157. 1°. Soit un angle ACB au centre d'un cercle. Si on éléve du point C une perpendiculaire CH, l'angle HCB s'appelle le complément de l'angle ACB, & l'arc BH sera aussi le complément de l'arc AB. Ainsi le complément d'un angle ou d'un arc est toujours égal à sa différence à l'angle droit.

D'où il suit que dans un triangle rectangle, un des angles aigus est le complément de l'autre.

2°. Si on prolonge le côté AC jusqu'en F, l'angle obtus BCF ou l'arc BHF, sera nommé le supplément de l'angle ACB ou de l'arc AB, & réciproquement l'angle ACB ou l'arc AB, sont le supplément de l'angle BCF ou de l'arc BHF.

Par conséquent un angle étant donné de $55^{d}\ 43^{m}$, son complément sera de $34^{d}\ 17^{m}$, & son supplément sera $124^{d}\ 17^{m}$.

3°. Une perpendiculaire menée du point B de la circonférence du cercle sur le côté ou rayon CA s'appelle le sinus droit, ou simplement le sinus de l'angle ACB ou de l'arc AB.

Si on prolonge BD en G, la droite BG sera la corde de l'arc BAG; cette corde & cet arc sont coupés en deux également au point D A. D'où il est évident que *le sinus d'un angle ou d'un arc est la moitié de la corde du double de cet arc.*

4°. Si sur l'extrêmité A du rayon CA on éléve une perpendiculaire AE, elle s'appellera la tangente de l'angle ACB ou de l'arc AB, & la droite CE s'appellera *la Sécante* du même angle & du même arc.

5°. Si par le point B on abbaisse sur CH la perpendiculaire BI, elle sera appellée *le sinus* du complément de l'angle ACB ou de l'arc AB, & si par le point H on éléve la perpendiculaire HK, on l'appellera la *Tangente* du complément de l'angle ACB ou de l'arc AB dont CK sera la sécante.

Pour abréger, on nomme le sinus, la tangente, la sécante du complément; co-ſinus, co-tangente, co-ſécante.

6°. Le ſinus, la tangente, la ſécante d'un angle obtus BCF, ſont les mêmes que ceux de ſon ſupplément; & le co-ſinus, la co-tangente, & co-ſécante ſont auſſi les mêmes que ceux de ſon complément. Ainſi le ſinus de BCF eſt BD. Son co-ſinus BI, ſa tangente AE, ſa co-tangente HK, ſa ſécante CE, & ſa co-ſécante eſt GK.

7°. La partie du rayon compriſe entre la circonférence & le ſinus, ſe nomme *Sinus-verſe* de ce ſinus.

Ainſi DA eſt le ſinus-verſe de l'angle ACB ou de l'arc AB, HI eſt le ſinus-verſe de ſon complément, & DF eſt le ſinus-verſe de ſon ſupplément.

Il ſuit de ces définitions, 1°. Que le ſinus d'un angle droit eſt le rayon même, & qu'il eſt en même-tems le plus grand de ces ſinus, ce qui l'a fait nommer, *Sinus-total*.

2°. Que le ſinus-verſe DA d'un arc, eſt égal à la différence du rayon CA & du ſinus de complément BI ou CD.

3°. Que le co-ſinus-verſe HI eſt

égal à la différence entre le rayon & le sinus droit BD.

4°. Que le sinus-verse du supplément FD, est égal à la somme du rayon & du co-sinus. Ainsi connoissant les sinus droits, il est aisé d'en déduire les sinus-verses.

5°. Qu'il n'est nécessaire de connoître les sinus, tangentes & sécantes, que de 90 degrés.

C'est par le moyen des sinus, tangentes & sécantes, que l'on parvient à trouver la valeur des angles ou côtés inconnus.

Les Mathématiciens ont formé des tables où le rayon étant supposé 1, on trouve les fractions décimales qui conviennent au sinus, à la tangente & à la sécante de chaque minute du quart de cercle; c'est ainsi qu'on a trouvé que le sinus de 51^d est 0.7771460, sa tangente 1.2348972, & sa sécante est, 1.5890157, son co-sinus est 0.6293204, sa co-tangente 0.8097840, & sa co-sécante est, 1.2867596.

Ces tables sont reconnues sous le nom de *Tables de Sinus*.

Il faut remarquer que, quoique tous les nombres soient des décimales, on n'a pas continué de mettre zéro avant les nombres, parce qu'on ſuppoſe qu'il n'y a que ſept décimales; c'eſt-à-dire, que le dénominateur eſt toujours 1.0000000

La conſtruction de ces tables dépend des propriétés de certaines cordes, telles que celles d'un arc de 60^{d} dont la valeur eſt égale au rayon, c'eſt-à-dire, à 100000.00. la moitié de ce rayon, c'eſt-à-dire, 50000.00 eſt le ſinus de 30^{d}. On en peut voir le détail dans les tables des ſinus.

La ſolution des problêmes de Trigonométrie ſe fait par des régles de proportion appellées, *Analogie*, dans leſquelles trois termes étant donnés, on trouve facilement le quatriéme dont il eſt queſtion.

Solution des Triangles rectangles.

158. Dans tout triangle rectangle BCD on a toujours cette proportion.

Le rayon eſt à l'hypotenuſe comme le ſinus d'un des angles aigus eſt à ſon côté oppoſé.

Fig. 71 En effet la droite BC, regardée comme rayon d'un cercle de 20000000 de diamétre, est à la même ligne regardée comme hip. d'un triangle rectangle BCD, comme la droite BD, connue en partie de BC, est à la même droite BD, côté du triangle rectangle BCD.

Par conséquent si l'on suppose la valeur de l'hypothenuse de 180^t & l'angle BCD de 58^d en prenant dans les tables la valeur du rayon & celle du sinus de 58^d on formera cette analogie.

1. 180 :: 0. 8480481. est à BD = 152. 64580.

Comme si l'on disoit.

Le sinus-total 10000000 est à 180 toises hypothenuse CB, comme le sinus de l'angle BCD = 8480481 est au côté cherché BD que l'on trouvera de 152 toises. On néglige la fraction.

2°. On peut déduire encore cette autre proportion.

Le rayon est à un côté comme la tangente de l'angle opposé à l'autre côté est à ce côté.

Fig. 71 Car dans le triangle CAE, CA rayon est à CA côté, comme AE tangente de l'angle ACE est à la même ligne AE, côté opposé à cet angle.

Soit CA = CB = 180t.

CA = 10000000

AE = 18870799

AE = x = 339t.

Calcul des Triangles obliangles.

3°. En tout triangle on a cette proportion.

Le sinus d'un angle est à son côté opposé (toises ou pieds) *comme le sinus d'un autre angle est aux toises ou pieds de son triangle opposé.*

Ce qui est bien sensible par les triangles semblables.

4°. *En tout triangle, le plus grand côté est à la somme des deux autres comme leur différence est à la différence des segmens de la base, faits par la perpendiculaire abbaissée sur le plus grand côté.*

Voyez le N°. 140. pour la démonstration.

Soit le triangle ACB dans lequel on donne

AC = 70 parties.
AB = 55 parties.
BC = 30

On demande la différence AD des segmens AE, CE.

Dites, AC. AG. AH ; x.
70 ; 85 :: 25 ; x.

On trouvera $x = 30 \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$.
Donc CE = $19 \frac{23}{28}$.

Donc par le calcul des triangles rectangles, il seroit facile de trouver dans le triangle BEC l'angle C.

De plus AE = $50 \frac{5}{28}$.

Donc on pourra connoître dans AEB l'angle A. Donc par le moyen des trois côtés on connoîtra les trois angles & la perpendiculaire.

5°. *Dans un triangle rectangle connoissant deux côtés & l'angle compris, connoître le troisiéme côté & les deux angles adjacens.*

Soit le triangle ABC dans lequel on connoît CB, AC & l'angle compris C. Fig. 72.

1°. Abbaissez du point A sur C B la perpendiculaire A D, vous aurez le triangle A C D dans lequel vous connoissez l'angle C, l'angle C A D & l'hypothenuse A C. Donc par le calcul des triangles rectangles il sera facile de connoître, C D & A D retranchez de C B, C D, restera D B.

2°. Dans le triangle rectangle DAB vous connoissez les deux côtés D B A D & l'angle droit D. Donc par le calcul des triangles rectangles on connoîtra AB & l'angle B, & par conséquent tout l'angle A.

Lorsque l'angle compris est obtus, abbaissez la perpendiculaire A D, qui naturellement sortira du triangle, vous aurez l'angle A C D de côté connu, supplément de A C B, & l'angle D A C aussi de connu, complément de l'angle ACD & de plus AC. Donc par les triangles rectangles on connoîtra A D, D C. Donc dans le triangle rectangle A D B on connoît A D & D B = D C + C B, & l'angle D droit. Donc par là on connoîtra A B, & par les triangles rectangles l'angle A B D, & conséquemment l'angle B A C.

On voit que deux côtés & l'angle compris étant donnés, on peut trouver les autres parties du triangle sans se servir d'un théorême qui a toujours eu quelque difficulté pour les Commençans.

DES LOGARITHMES.

159. LEs Logarithmes font une fuite de nombres en progreffion Arithmétique, qui correfpondent à d'autres nombres en progreffion Géométrique.

Par le moyen de ces deux progreffions, on change la multiplication en fimple addition, & la divifion en fouftraction.

Soient ces deux fuites.

0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. P A.

1,, 2,, 4,, 8,, 16,, 32,, 64,, 128,, 256. P G.

Si l'on ajoute enfemble deux termes quelconques de la progreffion Arithmétique, leurs fommes prifes dans cette progreffion, répondra à un terme de la progreffion Géométrique égale au produit des deux termes de la progreffion Géométrique qui répondoient aux deux termes dont on a fait la fomme. Exemple.

$6 + 10 = 16$ relatif à 256.

$256 = 8 \times 32$ termes relatifs à 6 & 10.

Il en eſt de même de la diviſion. Soit 16 — 6 = 10 qui répond à $32 = \frac{256}{8}$.

La facilité merveilleuſe que cette découverte apportoit aux calculs, a engagé pluſieurs Calculateurs à conſtruire des tables de Logarithmes, il leur étoit indifférent de prendre d'abord telle progreſſion arithmétique qu'ils euſſent voulu, mais pour abréger cet immenſe calcul, ils ont choiſi la progreſſion naturelle à laquelle ils ont fait répondre une ſuite de terme en progreſſion décuple.

0 - -	1
1 - -	10
2 - -	100
3 - -	1000
4 - -	10000
5 - -	100000
6 - -	1000000
7 - -	10000000
8 - -	100000000
9 - -	1000000000

Dans la progreſſion Arithmétique il manque les termes relatifs aux intermédiaires de 1 à 10 de la progreſsion Géométrique, qui sont 1, 2, 3, 4, &c. Pour déterminer le Logarithme relatif à 3. Par exemple, on joint aux termes 1 & 10 un nombre de zéros à volonté, tel que 7, on a

10000000 ⎫ & on fait le produit
100000000 ⎬ de ces deux nombres,
⎭ l'on trouve

1000000000000000, dont la racine est 31622777, moyen Géométrique qui répond à 0.5000000, moyen Arithmétique trouvé entre 0.0000000 & 1.0000000.

Ce moyen Arithmétique 0.5000000 est trop grand, puisque le chiffre de son moyen Géométrique devroit être 3 suivi de 7 zéros, il faut donc entre 31622777 & 10000000 trouver un moyen Géométrique, 17782794; & entre 0.5000000 & 10000000 trouver un moyen Arithmétique, 0.25000000; or le moyen Géométrique est trop petit, & de même le relatif Arithmétique, donc il faut chercher entre le plus grand & le plus petit terme Géométrique & Arithmétique deux nouveaux moyens, & l'on ne trouvera les véritables qu'après 19 multiplications & 19 extractions de Racines.

Le moyen Géométrique est, 3.0000000, son Arithmétique relatif est 0.4771213.

Ce qui suffit pour faire voir la difficulté & l'esprit de ce calcul, & combien l'on a d'obligation à ceux qui ont bien voulu se charger de ce pénible travail.

L'on doit l'invention des Logarithmes au célebre Neper, Baron de Merchiston en Ecosse.

Nous avons dit que le calcul par les Logarithmes change la multiplication en simple addition, & la division en simple soustraction ; il suit delà naturellement que les régles de proportion ne sont plus que des additions & des soustractions.

Exemple.

Si 225 toises coutent 132 liv. combien couteront 675.

Par les régles ordinaires, il faudroit multiplier 675 par 132, & diviser le produit par 225, mais par les Logarithmes.

Il faut joindre ensemble les Logarithmes de 675 & de 132, puis de cette somme soustraire le Logarithme de 225.

OPERATION.

675	Log.	2.8293038
132	Log.	2.1205739
		49498777
225	Log.	23521825
		25976952 Log. de 396.

Pour élever une quantité à une puissance quelconque, par exemple, 12 à la troisiéme puissance.

Il faut multiplier le Logarithme de la quantité par le degré de la puissance demandée.

OPERATION.

12	Log.	1.0791812
		3
		32375436 Log. de 1728

troisiéme puissance de 12.

Pour extraire une racine quelconque, il faut diviser le Log. de la puissance par les degrés de la racine, soit 1728 dont on cherche la racine troisiéme ou cubique.

OPERATION.

Prenez dans les tables des Logarithmes celui de 1728 que vous trouverez être 32375436

Prenez-en le tiers vous aurez 10791812

qui répondra dans les tables au nombre 12, racine troisiéme de 1728.

Solution des Triangles rectilignes par les Logarithmes.

160. Pour faciliter les calculs Trigonométriques, on a déterminé les Logarithmes des sinus & tangentes des angles rectilignes. Ces Logarithmes se trouvent dans les tables ordinaires dans la quatriéme & cinquiéme colomne; pour donc opérer par les Logarithmes, il suffira d'additionner deux Log. ensemble, & d'en soustraire un autre, le reste est le Logarithme du nombre ou du quatriéme terme que l'on cherche.

EXEMPLE.

Fig. 73 1°. Pour trouver le triangle rectangle ABC dont l'hypothenuse BB est donné de 14 parties, & l'angle C de 30 degrés, il s'agit de déterminer par les Logarithmes la valeur de chacun des côtés AB, AC.

OPERATION.

Log. de 90 d.	L. de 30 d.	L. 140 d.	L. de AB
1000000,	969897 : :	214612,	x

214612

1184509
1000000

reste 184509 L. de 70 = AB

2°. Pour trouver AC, faites cette analogie.

	Log. de 60 d.		L. AC
1000000,	993753 : :	214612,	z

214612

1208365
1000000

reste 208365 Log. 121 part. = AC.

161. Comme les Problêmes de toute espece, qui vont suivre, demandent une connoissance des poids & mesures les plus usitées, nous joignons ici une liste des noms & mesures les plus connues, sauf à ceux qui se trouvent en d'autres lieux de s'informer de ce qui y est en usage.

Les mesures & les poids en usage dans les Sciences & dans le Commerce, ne sont que des especes de divisions & de fractions.

L'Espece.

Les Livres de Compte se tiennent en livres, sols & deniers.

$$14^{l}\ 14^{f}\ 4^{d} = 14^{l} + \tfrac{14}{20} + \tfrac{4}{12}.$$

Il en est de même des divisions suivantes.

Le Tems.

Le Tems se divise en années, mois, jours, heures, &c. L'année est de 12 mois; le mois de 30, 31, 28 & 29 jours; le jour est de 24 heures; chaque heure est de 60 minutes, chaque minute de 60 secondes, &c.

Le Zodiaque.

Le Zodiaque se partage en douze signes ; chaque signe a 30 degrés ; chaque degré 60 minutes ; chaque minute 60 secondes ; chaque seconde 60 tierces, &c.

Les Poids.

Le millier vaut dix quintaux.
Le quintal - 100 livres.
La livre - - 16 onces on 2 marcs.
L'once - - 8 gros.
Le gros - - - 3 deniers.

Du Titre de l'Or & de l'Argent.

Le Titre de l'Or & de l'Argent est le degré de finesse & de bonté de ces métaux.

On divise par la pensée une masse d'Or en 24 parties qu'on appelle *Carats*, & ce carat se divise en $\frac{32}{32}$ eme.

L'Argent se conçoit de même divisé en douze parties qu'on nomme *Deniers*, & ce denier se divise en 24 grains, chacun de ces grains vaut $\frac{32}{32}$ eme.

Ainsi, lorsqu'on dit d'une masse d'Or, après l'affinage, *Voilà de l'Or au titre de 24 carats* ; c'est-à-dire, voilà de l'Or parfait poussé au fin, & à 24 carats de fin.

Quand on dit d'un marc d'Or qu'il est à 23 carats de fin ; c'est-à-dire, qu'il est à 7 onces 6 gros d'or fin.
& 2 gros de reméde.

De même quand on dit d'un lingot d'Argent qu'il est à 12 deniers de fin ; c'est l'annoncer sous le titre le plus pur.

Ainsi un marc d'Argent à 11 deniers, 12 grains.
pese - - 7 onces 5 gros 1 den. d'argent fin.
& 2 g 2 den. de reméde.

Les Souverains par une politique très-sage ont ordonné aux ouvriers, tant en Or qu'en Argent, de ne donner au Public que de l'Or à 24 carats, & de l'Argent au titre de 12 deniers ; & cela, pour empêcher les Orfévres & Metteurs en Oeuvres d'employer les monnoyes courantes à la fabrique des ouvrages de leur profession ; mais comme il est presque impossible aux ouvriers d'atteindre au point prescrit, on a des indulgences à cet égard, les Loix ont réglé jusqu'où cette tolerance seroit portée.

Un Batteur d'Or qui fournit de l'Argent à 11 den. 18 grains est en régle, quoiqu'il s'en faille 6 grains qu'il ne soit au titre de 12 deniers. C'est cette indulgence qu'on appelle *Reméde.*

Du Titre des Espéces courantes.

Le titre de l'Or des louis d'Or doit être à 22 carats de fin; on accorde $\frac{1}{4}$ de reméde sur le titre, ainsi ils sont 21 $\frac{3}{4}$ de fin.

Le titre des écus d'Or doit être à 11 deniers de fin, ils ne sont qu'à 10 deniers 22 grains, ce sont deux grains de reméde sur le titre.

Les Distances.

Les Distances se mesurent par toises courantes.

La Toise	à	6	pieds.
Le Pied	- -	12	pouces.
Le Pouce	-	12	lignes.

Les Surfaces.

Les Surfaces se mesurent par toises quarrées.

La Toise quarrée contient 36 pieds quarrés

Le Pied quarré	144	pouces q.
Le Pouce quarré	144	lignes q.

Les Solides.

Les Corps ou Solides ſe meſurent par la toiſe cubique.

La Toiſe cube contient	216	pouces c.
Le Pied cube - - -	1728	pouces c.
Le Pouce cube - - -	1728	lignes c.

Des Meſures Itinéraires.

Les anciens Grecs comptoient par ſtades, les Romains par mille.
La ſtade vaut 125 pas Géométriques.
Le pas Géométrique vaut 5 pieds.

le mille	Romain eſt de	1000 pas.
	d'Allemagne de	4000
	de Pologne de	3000
	d'Hongrie de	6000
	d'Italie de -	1000
	d'Angleterre de	1250
	d'Eſpagne de -	3428

La grande lieue de France eſt de 3000 pas Géométriques, la commune de 2400. La Werſte eſt la meſure de Moſcovie, & vaut 750 pas. 4 valent une grande lieue de France.

Le Vin.

Le muid de Vin contient	3	feuillettes.
La feuillette - - -	12 ½	ſeptiers
Le ſeptier - - -	4	quartes.

La quarte - - - - - 2 pintes
La pinte - - - - 2 chopines
La chopine - - - 2 $\frac{1}{2}$ ſeptiers
Le demi-ſeptier - 2 poiſſons.

Le Bled.

Le muid de Bled contient
12 ſeptiers
Le ſeptier - 2 mines
La mine - - 2 minots
Le minot - 3 boiſſeaux
Le boiſſeau - 4 quarts ou 16 litrons.

Le Sel.

Le muid de Sel contient
12 ſeptiers
Le ſeptier - 2 mines
La mine - - 2 minots
Le minot - - - 4 quarteaux.

Le Diamant.

Le Diamant tire ſon mérite de ſa dureté, de ſon poids & de ſon eau.

Le carat peze - 4 grains
Le $\frac{1}{2}$ carat - - - 2 grains, & ainſi de ſuite.

L'Aune.

L'Aune ſe diviſe en $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{12}$, &c,

PRO-

PROBLEME I.

UN Maître d'Arithmétique pour égayer ses Ecoliers leur fait voir une Addition, qu'il leur dit être le *total* de 6 rangées de 4 chiffres chacune, dont ils en poseront 3 à volonté.

OPERATION.

Il multiplie secrétement *9999* par 3, ce qui fait *29997* qu'il fait voir à ses Disciples.

Les Disciples forment les 3 rangées suivantes de 4 chiffres chacune.

	7285	Rangées des Disciples
	5829	
	3456	
Le Maître ajoute les 3 autres rangées qui ne sont que des complémens de 9.	2714	Rangées du Maître.
	4170	
	6543	
	29997	*total.*

Si l'on vouloit qu'il y eut livres, sols & deniers, il faudroit poser pour les deniers leurs complémens à 12, & aux sols leurs complémens à 20.

L'on auroit dans l'exemple précédent 3 f. pour les deniers & 3 liv. pour les sols, qui joint au nombre précédent feroient 30000 l. 3 f. o d.

PROBLEME 2.

Le même Maître après leur avoir enseigné la Soustraction ordinaire, en fait faire une beaucoup plus commode à ses Disciples en cette maniere.

Soit -	397005	dette
	298578	paye
	98427	reste.

8 de 15 reste 7 & retiens 1, que je joins au 7 de la paye pour dire, 8 de 10 reste 2; & joignant le 1 d'emprunt à 5, je dis 6 de 10 reste 4; enfin 9 de 17 reste 8, 10 de 19 reste 9, 3 de 3 quitte.

Cette Soustraction est précisément ce qu'on fait dans la division, où l'on augmente les produits du diviseur de ce dont on devroit diminuer les figures du dividende.

PROBLEME 3.

Souſtraction Chronologique.

On demande combien il s'eſt paſſé de tems depuis la bataille de Marignan, où François I. fit des prodiges de valeur, le 3 Septembre 1515, juſqu'à la célebre victoire de Fontenoy, remportée le 11 Mai 1745. par Sa Majeſté en perſonne accompagné de Monſeigneur le Dauphin.

SOLUTION.

1°. Poſez	1744 ans	4 mois	11 jours	Qui eſt la même choſe que le 11 Mai 1745.
2°. Poſez en-deſſous	1514	8	3	
différence	229 ans	8 mois	8 jours	
Preuve	1744 ans	4 mois	11 jours.	

Cette queſtion eſt utile pour les intérêts & rachats des rentes, pour ſçavoir l'âge en lequel on eſt, pour connoître combien il y a d'une date à une autre, ſoit pour une tranſaction, donation, mariage, teſtament, & généralement pour toutes ſortes de contrats.

On pourroit pouſſer la queſtion plus loin en voulant ſçavoir combien il y a d'heures & de minutes de différence d'une date à une autre.

PROBLEME 4.

Une Demoiselle prend en une main un nombre pair de jettons, & dans l'autre un nombre impair; découvrir où est le nombre pair & impair.

Faites multiplier le nombre de la main droite par un nombre impair, & celui de la gauche par un nombre pair, demandez si la somme des deux produits est pair ou impair.

S'il est pair, le nombre pair est dans la droite, s'il est impair le nombre impair est dans la droite.

Exemple.

droite	gauche.	droite	gauche.
4	3	3	4
5	2	5	2
20	6	15	8
26		23	

On peut observer, 1°. Que tout nombre pair, multiplié par un nombre pair ou impair donne toujours un nombre pair.

2°. Qu'un nombre impair multiplié par un nombre pair donne un produit pair; mais multiplié par un impair il donnera toujours un impair.

PROBLEME 5.

On fait prendre à une personne un nombre égal de jettons en chaque main, on lui dit que l'on devinera ce qui lui en restera dans une main, après quelques opérations.

1°. Dites-lui de mettre de la droite dans la gauche un certain nombre tel que 5.

2°. D'en ôter de la gauche autant qu'il en reste dans la droite.

Il lui restera dans la gauche le double de ce que vous avez fait ôter de la droite, c'est-à-dire 10.

EXEMPLE.

Droite	Gauche
9	9
4	14
8	10 double de 5.

DEMONSTRATION.

Soit n $\qquad n$

$n - 5 \qquad n + 5$

$n + 5 - n + 5 = 10.$

PROBLEME 6.

Un Joueur de gobelets fait poser à son insçu, sur une table, deux rangées inégales de jettons dont il demande la différence ; comment après quelques opérations parvient-il à déterner ce qui reste sur la table.

1°. Il fait ôter du plus grand un nombre supérieur à la différence.

2°. Il fait ôter du plus petit autant qu'il en reste dans le plus grand.

3°. Il fait ôter le restant du plus grand. Ce qui reste sur table est toujours l'égal à l'excès du premier nombre ôté sur la différence.

Exemple.

Soient $\left\{\begin{matrix}25\\18\end{matrix}\right.$ jettons différence donnée 7.

Faites ôter 12 d'en haut, reste 13.
Otant ces 13 de 18 reste 5.
Otant le nombre d'en haut 13 reste 5 sur table qui n'est autre que l'excès de 12 sur la différence donnée 7.

Demonstration.

$n+d$: premier tas
n : 2. tas
$n+d-d-c=n-c$
$n-n+c=c.$

PROBLEME 7.

On fait poser trois tas égaux de jettons, & on promet de deviner ce qui restera après quelques opérations.

1°. On fait ôter des tas extrêmes un nombre quelconque qu'il faut poser au tas du milieu.

2°. Il faut ôter du milieu autant qu'il en reste à l'un des tas extrêmes, & faire disparoître les deux extrêmes.

Ce qui reste est toujours le triple du nombre qu'on a fait ôter en premier. *Exemple.*

Soient les trois tas	27,	27,	27.
ôtant 9 des extrêmes & les joignant au terme du milieu, il sera de -	18.	45.	18.
ôtant 18 de 45 reste -	18.	27.	18.
& effaçant les deux extrêmes, reste - -	0.	27.	0.

triple de 9, nombre qu'on a fait ôter en premier.

DEMONSTRATION.

$$
\begin{array}{cccl}
a & a & a & \text{tas égaux.} \\
a - b, & a + 2b, & a - b & \\
 & -a + b & & \\
\hline
a - b, & 3b, & a - b & \\
0, & 3b, & 0 &
\end{array}
$$

PROBLEME 8.

Un Etranger arrivant à Paris se mit à l'Auberge pour 30 jours, à raison de 20 s. par jour, il n'avoit que 5 pieces valant ensemble 30 liv. avec lesquels il satisfit tous les jours son hôte, sans qu'il restât rien de dû de part ni d'autre.

On demande la valeur de chacune des 5 pieces.

SOLUTION.

Il est facile de voir que la moindre des pieces doit être de 20 s. ou 1 liv.
La deuxiéme doit être 2 l.
La troisiéme de - - - 4 l.
La quatriéme de - - 8 l.
La cinquiéme de - 15 l.

Payement

Le premier jour il donne la premiere piece 1 l.

Le deuxiéme jour il donne 2 l. & retire la premiere.

Le troisiéme, il donne 1 l.

Le quatriéme il donne 4 l. & retire 1 l. & 2 l., & ainsi de suite, comme on peut le vérifier.

PROBLEME 9.

Le Cadran ou la Montre.

On propose de deviner, à l'aspect d'une Montre, à quelle heure une personne a déterminé de se lever le lendemain. *Operation.*

1°. Faites toucher à la personne un nombre quelconque du Cadran, & joignez-y mentalement 12, qui donneront une somme.

2°. Dites-lui de partir de ce point, & de compter du doigt en rétrogradant, & en commençant par l'heure pensée jusqu'à ce qu'elle nomme cette somme. *Exemple.*

Soit 8, heure pensée, & 3, nombre par lequel on veut commencer; dites de compter jusqu'à 15 en nommant secrétement sur 3 le nombre pensé, disant 8 sur 3, 9 sur 2, 10 sur 1, &c. on nommera 15 sur 8.

La personne sera surprise de tomber naturellement sur le nombre qu'elle s'étoit proposée.

Ce Problême est bien simple; car en commençant par 1 & voulant revenir sur ce nombre, on compteroit 13, sur 2 on compteroit 14, sur 3 on compteroit 15, &c. Or, obligeant la personne qui a pensé dans l'exemple précédent à huit heures à poser secrétement ce 8 sur le nombre 3, & d'aller jusqu'à 15, elle n'a que 8 chiffres à parcourir, & ce huitiéme est son nombre.

PROBLEME 10.

Le Piquet des Cavaliers.

Deux amis voyagent à cheval, l'un propose à l'autre un cent de Piquet sans carte.

Ils conviennent, 1°. Que celui qui arrivera le premier à 100 sera défrayé du soupé, 2°. qu'ils ne pourront prendre alternativement plus de 10 à la fois.

SOLUTION.

Le premier qui commencera à compter doit toujours se saisir de ces époques.

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, &c.

D'où l'on peut conclure que celui qui commenceroit par 1, & qui avec chaque mise de son compagnon formeroit toujours 11, arriveroit le premier à 89, & par conséquent son adversaire ne pouvant prendre tout au plus que 10 ne formeroit que 99, reste au premier à dire 100.

Il n'est pas nécessaire de s'assurer des époques, quand on a affaire à un homme qui ignore la finesse du jeu, il suffira de se saisir à propos des dernieres.

PROBLEME II.

Les rangs de Neuf.

Un Commiſſaire a reçu pour ſes étrennes, des Marchands de Vin de ſon quartier, 32 bouteilles de vin de liqueur qu'il a fait ranger dans ſa cave par ſon Clerc dans l'ordre ſuivant, lui faiſant remarquer qu'il y avoit 9 bouteilles de chaque côté.

1	7	1
7		7
1	7	1

Le Clerc en enleva 12; c'eſt-à-dire, 4 à chaque fois, & dans les différentes viſites que le Commiſſaire fit de ſon ſellier, le Clerc lui fit remarquer qu'il y en avoit toujours 9 de chaque côté. On demande la ſolution du Problême.

1er ordre pour 28 bouteilles.

2	5	2
5		5
2	5	2

Second ordre pour 24 bouteilles.

3	3	3
3		3
3	3	3

Troiſiéme or. pour 20 bouteilles.

4	1	4
1		1
4	1	4

PROBLEME 12.

Le Jeu de l'Anneau.

L'on propose dans une compagnie de deviner la personne qui aura pris une bague, & de déterminer la main, le doigt & la jointure où cette bague sera.

OPERATION.

1°. Dites à quelqu'un de la compagnie de doubler le rang de la personne qui a pris la bague, & de joindre 5 à ce nombre.

2°. De multiplier cette somme par 5 & d'y joindre 10.

3°. D'y joindre le nombre de la main (supposant 1 pour la droite, & 2 pour la gauche.)

4°. De multiplier le tout par 10.

5°. D'y joindre le nombre du doigt, prenant 1 pour le pouce de la droite ou de la gauche.

6°. De multiplier le tout par 10.

7°. D'y joindre le nombre de la jointure, & de plus 35.

Demandez cette derniere somme.

SOLUTION.

Soustraiez-en 3535, le reste sera composé de quatre chiffres dont le premier indiquera le rang de la personne ; le second, le rang de la main ; le troisiéme, le rang du doigt ; le quatriéme & dernier, le rang de la jointure.

EXEMPLE.

La 6^eme^ personne d'une compagnie a mis la bague à la 2^eme^ main (c'est-à-dire la gauche) au 5^eme^ doigt de la 3^eme^ jointure ou la derniere phalange.

Découvrir le requis.

Opération Numérique.

1° 6 personnes
2
12
5
17

2° 17
5
85
10

3° 95
2

4° 97
10
970
5

5° 975
10

6° 9750
3

7° 35
9788

ôtez 3535
p m d j
reste 6253

PROBLEME. 13

Les trois Bijoux.

Pierre, Claude & Martin, ſe ſaiſiſſent de trois bijoux ; on propoſe de déterminer celui que chacun d'eux a pris.

SOLUTION.

1°. Soient les 3 bijoux, une bague, un étui, un couteau, qu'il faut déſigner ſecrétement par *a*, *e*, *i*; de même que les trois perſonnes.

2°. Prenez 24 jettons, donnez-en 1 à la premiere perſonne *a* ; 2 à la ſeconde perſonne *e* ; 3 à la troiſiéme perſonne *i*, reſte 18 ſur la table.

3°. Dites, étant à l'écart, que celui qui a la bague prenne autant de jettons qu'il en a ; que celui qui a l'étui prenne le double de ce qu'il a de jettons, & que celui qui a le couteau prenne le quadruple.

4°. Revenez, & ſans qu'on le ſoupçonne remarquez le reſtant des jettons.

Il ne peut rester que 1, 2, 3, 5, 6 & 7.

Qu'il faut rapporter aux sillabes de ces vers François.

1 2 3 5 6
Par fer, César jadis devint si grand

7
Prince.

Et remarquer que s'il restoit 1, les deux sillabes *par fer*, représentent que la premiere personne à la chose désignée par la voyelle *a*, & la seconde, la chose désignée par la voyelle *e*, &c. De même s'il restoit 5, le mot *devint* indiqueroit que la premiere personne auroit la chose marquée par la voyelle *e*, & la seconde personne auroit la chose marquée par la voyelle *i*, &c.

PROBLEME 14.

Les Maris jaloux.

Trois Maris jaloux n'ayant pour paſſer une riviere qu'une nacelle pour deux perſonnes, veulent ſe rendre à l'autre bord ſans laiſſer leur femmes dans la compagnie des autres maris, à moins qu'ils ne ſoient préſens.

Comment réſoudre cette queſtion?

SOLUTION.

1°. Deux femmes paſſent, & l'une ramene le bateau pour reprendre la troiſiéme.

2°. Une femme revient, ſe met à terre, & paſſent les deux maris dont les femmes ſont à l'autre bord.

3°. Un des maris revient avec ſa femme, qui reprend l'autre femme & laiſſe ſon mari.

4°. Au retour le mari paſſe, va chercher les deux autres en deux voyages.

PROBLEME 15.

Les Tonneaux.

La veuve d'un Marchand de vin laisse à partager à ses trois filles 21 tonneaux, dont 7 pleins, 7 vuides, & 7 à demi pleins; comment faire le partage ensorte qu'elles ayent autant de vin & de tonneaux l'une que l'autre.

Premiere Solution.

3 pleins	1 à demi	3 vuides	1ere part.
3 p	1 à demi	3 vuides	2de part.
1 p	5 à demi	1 vuide	3eme part.

Seconde Solution.

2 pleins	3 à demi	2 vuides
2 p	3 à demi	2 vuides
3 p	1 à demi	3 vuides.

Si l'on proposoit de partager 33 muids, sous les mêmes conditions, à 3 personnes; en prenant le tiers de 33 qui est 11, on peut former différens quarrés à trois rangs de chaque côté, où il doit toujours se trouver 11 de quelque côté qu'on compte. Il suffit d'indiquer les suivans.

A	5 pl	5 v	1 d. pl	1 p	1 v	9 d. p.
B	4	4	3	5	5	1
C	2	2	7	5	5	1

PROBLEME 16.

Tiré de Joſephe l'Hiſtorien.

Arranger 30 coupables de telle maniere, qu'on en puiſſe ſauver 15 en les comptant de ſuite & rejettant toujours le neuviéme.

Arrangez les coupables ſuivant l'ordre des voyelles des dix mots qui compoſent les deux vers ſuivans.

4 5 2 1 3 1 1
Mort tu ne failliras pas
2 2 3 1 2 2 1
En me livrant le trépas.

On peut auſſi ſe ſervir de ce vers latin, où les voyelles ſont dans le même ordre.

4 5 2 1 3 1 1 2 2 3 1 2 2 1
Populeam Virgam Mater Regina ferebat.

Il faut commencer par arranger 4 de ceux qu'on veut ſauver, puis cinq de ceux qu'on veut punir; ainſi de ſuite alternativement, ſuivant les chiffres affectés à ces vers.

PROBLEME 17.

Partages égaux avec des Vases inégaux.

Un Grenadier demande 4 pintes de vin à un Aubergiste qui n'a pour mesure que 3 cruches; une de 3 pintes, une de 5 & la troisiéme de 8p.

Il faut, ayant rempli le pot de 8 pintes, le distribuer dans l'ordre suivant.

8 pintes	5	3
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3

Autre Solution.

8	5	3
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3

PROBLEME 18.

Les Poids.

Déterminer le plus petit nombre de poids avec lequel on puisse peser depuis 1 liv. jusqu'à 364.

SOLUTION.

Prenez des poids qui soient selon cette progression Géométrique.

1, 3, 9, 27, 81, 243.

En additionnant ces 6 nombres, on aura 364.

Si l'on augmentoit cette progression d'un terme qui seroit 729 on pourroit peser avec 7 poids depuis 1 jusqu'à 1093.

EXEMPLE.

Pour peser 34 liv. mettez dans un bras de la balance les poids 1, 9 & 27, & dans l'autre le poids de 3, remplissez ce dernier bassin de marchandises, jusqu'à ce qu'il y ait équilibre.

PROBLEME 19.

Quelques Arithméticiens proposent cette question comme fort difficile. Multiplier livres, sols & deniers, par livres, sols & deniers.

Il faut observer que ces sortes de Problêmes supposent toujours une régle de proportion, dont le premier terme n'est point exprimé. Par exemple, si on proposoit de multiplier $3^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$ par $3^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$, il faudroit supposer que quelque nombre de livres ayant gagné $3^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$, Combien $3^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$ doivent-elles gagner au *prorata*; par conséquent il ne s'agira plus que de réduire en deniers tous les termes de la proportion, puis achever à l'ordinaire; le quotient sera naturellement des deniers qu'on réduira en livres & sols suivant les régles.

Ainsi dans l'exemple ci-dessus on pourra dire, si $21^{tt}\ 15^{s}$ rapportent $3^{tt}\ 12^{s}\ 6$ combien rapporteront $3^{tt}\ 12^{s}\ 6$?

Donc $21^{tt}\ 15^{s}, 3^{tt}\ 12^{s}\ 6 :: 3^{tt}\ 12^{s}\ 6, x$.
Ou $5220^{d}, 870^{d} :: 870^{d}, x = \frac{756900}{5220}$;
C'est-à-dire, $145^{d} = 12^{s}\ 1^{den.}$

Pour la preuve du Problême précédent, il faut prendre l'inverse de la question & dire, $12^{s}\ 1^{d}$ donnent $3^{tt}\ 12^{s}\ 6$, combien $3^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$, donneront-ils ?

SOLUTION.

Dites $145^{d}, 870^{d} :: 870, x$

Donc $x = \frac{756900}{145} = 5220^{d} = 21^{tt}\ 15^{s}$.

On voit donc que ces sortes de Problêmes ont autant de solutions qu'on supposera de valeur différente au premier terme, qu'on doit toujours exprimer ; car le produit de livres, sols & deniers, par livres, sols & deniers, sans la premiere supposition est purement chimérique.

PROBLEME 20.

Deviner un Nombre pensé.

OPERATION.

1°. Faites tripler le nombre pensé.

2°. Faites-en prendre la $\frac{1}{2}$.

3°. Faites-la tripler, & demandez-en la neuviéme partie ; doublez-la ; ce sera le nombre pensé.

EXEMPLE.

Soit 5 nombre pensé.
15 triple.
$7\frac{1}{2}$ demi.
$22\frac{1}{2}$ triple.
$2\frac{1}{2}$ neuviéme dont le double donne 5 nombre pensé.

DEMONSTRATION.

x nombre pensé.

$3x$ triple.

$\frac{3x}{2}$ demi.

$\frac{9x}{2}$ triple.

$\frac{x}{2}$ neuviéme dont le double est x.

PROBLEME 21.

Deviner un nombre pensé.

OPERATION.

1°. Doublez le nombre pensé, & joignez-y 4.

2° Multipliez le tout par 5 & à ce produit joignez 12.

3°. multipliez le tout par 10.

4°. Otez-en 320 & effacez les deux derniers caracteres, le reste sera le nombre pensé.

EXEMPLE.

Soit 9 nombre pensé.
18 double.
22 4 de plus.
110 produit par 5.
122 12 de plus.
1220 produit par 10.
320 ôtez.

reste 9|00.

DEMONSTRATION.

x nombre pensé.

$$2x + 4$$
$$10x + 20$$
$$10x + 32$$
$$100x + 320 = 1220$$
$$100x = 900$$
$$x = 9.$$

PRO-

PROBLEME 22.

Deviner le nombre pensé.

1°. Faites quarrer le nombre pensé.

2°. Faites joindre à ce quarré le double du nombre pensé.

3°. Faites joindre l'unité, demandez la somme, dont la racine quarrée diminuée de l'unité sera le nombre pensé.

EXEMPLE.

Soit x nombre pensé.

$$x^2 + 2x + 1 = 36$$

Donc $x = 5$

Numériquement.

Soit $\frac{3}{4}$ nombre pensé.

$\frac{9}{16}$ quarré.

$\frac{6}{4}$ double du nomb. pensé $\frac{24}{16}$

$1 = \frac{16}{16}$.

Ces trois nombres font $\frac{49}{16}$ dont la racine est $\frac{7}{4}$, dont ôtant 1 ou $\frac{4}{4}$ reste $\frac{3}{4}$.

PROBLEME 23.

Deviner ce qui reste d'un nombre pensé après quelques opérations.

OPERATION.

1°. Faites doubler le nombre pensé.
2°. Faites-y joindre un nombre pair.
3°. Faites prendre la demi du total.
4°. Faites-en ôter le premier nombre pensé ; le reste sera toujours la demi du nombre qu'on a fait ajouter.

EXEMPLE.

7 nombre pensé.

14 double.
10 nombre à joindre.

24
12
7

5 moitié de 10 nombre pair ajouté ;

a nombre pensé.
$2a$ double.
$2a + 2b$ nombre pair ajouté.
$1a + 1b$
b moitié de $2b$.

PROBLEME 24.

On fait jetter 3 dez ſur une table ; on les fait ranger de ſuite, & l'on devinera les points de chaque dez.

OPERATION.

1°. Faites doubler le nombre du premier dez à gauche.

2°. Ajoutez 5, & multipliez le tout par 5

3°. Joignez-y le nombre du dez du milieu, & multipliez le tout par 10.

4°. Joignez-y le nombre du dernier dez & du total ſouſtraiez 250, les chiffres du reſtant repréſentent les points des dez dans le même ordre qu'ils ſont placés.

3, 5, 2 dez jettez

6

11

55

5

600

602

250

352

PROBLEME 25.

Deviner une ſuite impair de nombres que quelqu'un aura penſé.

Demandez la ſomme du premier & deuxiéme nombre, celle du deuxiéme & troiſiéme, celle du troiſiéme & quatriéme, du quatriéme & cinquiéme, & finalement celle du premier & cinquiéme; ce qui formera une ſuite de cinq ſommes.

Soient 8, 10, 17, 18, 13.

1°. Ajoutez enſemble les ſommes qui tiennent le rang impair.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 17 \\ 13 \\ \hline 38 \end{array}$$

2°. Otez-en celles qui tiennent le rang pair.

$$\begin{array}{r} 10 \\ 18 \\ \hline 28 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 38 \\ 28 \\ \hline \text{reſte } 10 \end{array}$$

Ce reſte eſt toujours double du 1^er^ nombre; Donc 5 eſt le premier.
Donc 3 eſt le ſecond.
Donc 7 eſt le troiſiéme.
Donc 10 quatriéme.
Donc 8 cinquiéme.

Soit t, v, x, y, z connus, pris deux à deux, on aura donc

$t + v.\ v + x.\ x + y.\ y + z.\ t + z.$

Or $\left.\begin{array}{l} 2t + v + x + y + z \\ \quad - v - x - y - z \end{array}\right\} = 2t.$

Lorsque la suite est paire, demandez, 1°. Leur somme prise deux à deux comme ci-devant. 2°. La somme du deuxiéme & dernier.

Soit 8, 12, 16, 20, 24, 18.

Ajoutez ensemble les sommes qui tiennent le rang pair.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 20 \\ 18 \\ \hline 50 \end{array}$$

Otez-en la somme de celles qui tiennent le rang impair, moins le premier terme, le reste est toujours double du second terme.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 24 \\ \hline 40 \end{array} \quad \text{reste} \quad \begin{array}{r} 50 \\ 40 \\ \hline 10 \end{array}$$

Donc le second est 5
3 le premier.
7 le troisiéme.
9 le quatriéme.
11 le cinquiéme.
13 le sixiéme.

Soit $s + t.\ t + v.\ v + x.\ x + y.\ y + z.\ t + z.$

$\left.\begin{array}{l} 2t + v + x + y + z \\ \quad - v - x - y - z \end{array}\right\} = 2t.$

PROBLEME 26.

Trois dez étant jettés, déterminer les points que chaque dez aura amené.

1°. Faites ranger à côté l'un de l'autre les dez jettés au hazard, & demandez la somme des points de dessous du premier & du deuxiéme. 2°. Celle du premier & troisiéme. 3°. Celle du deuxiéme & troisiéme.

Soient	x	y	z	les trois dez.
	3	5	1	points de dessus.
Donc	4	2	6	points de dessous.

$$\text{Par hyp.}\left\{\begin{array}{l} 1^{er}\ \&\ 2 = 6 = A \\ 1^{er}\ \&\ 3 = 10 = B \\ 2^{d}\ \&\ 3 = 8 = C \end{array}\right\}\text{sommes des points de dessous.}$$

$$x = 7 + \frac{c-a-b}{2} = 7 - 4 = 3$$

$$y = 7 + \frac{b-c-a}{2} = 7 - 2 = 5$$

$$z = 7 + \frac{a-b-c}{2} = 7 - 6 = 1.$$

PROBLEME 27.

Quel est le nombre dont les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ sont 1 ?

OPERATION.

Soit x nombre requis.

Donc les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3x}{4} = 1$

Or les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3x}{4} = \frac{6x}{12} = \frac{x}{2}$

Or $\frac{x}{2} = 1$ par hypot.

Donc $x = 2$

PREUVE.

Les $\frac{3}{4}$ de 2 sont $\frac{3}{2}$; or les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{2}$ sont $\frac{2}{2} = 1$. Donc.

PROBLEME 28.

Quel est le nombre dont les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ plus la $\frac{1}{2}$ des $\frac{5}{6}$ fassent 11 ?

OPERATION.

Les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ de x sont $\frac{x}{2}$

Or la $\frac{1}{2}$ des $\frac{5}{6}$ de x est $\frac{5x}{12}$

Or $\frac{x}{2} + \frac{5x}{12} = \frac{11x}{12} = 11$ par hypot.

Donc $11x = 11 \times 12$, donc $x = 12$

PREUVE.

Les $\frac{2}{3}$ de 12 sont 8 ; les $\frac{3}{4}$ de 8 sont 6 = les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ de 12.

Or les $\frac{5}{6}$ de 12 sont 10 ; la $\frac{1}{2}$ de 10 est 5 = la $\frac{1}{2}$ des $\frac{5}{6}$ de 12. Or $5 + 6 = 11$. Donc.

PROBLEME 29.

Quel est le nombre dont les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ — la $\frac{1}{2}$ des $\frac{3}{4}$ soit 19?

OPERATION.

La $\frac{1}{2}$ des $\frac{3}{4}$ de x est $\frac{3x}{8}$,
or les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ de x sont $\frac{8x}{15}$, or $\frac{8x}{15}$ — $\frac{3x}{8} = \frac{64x}{120} - \frac{45x}{120} = \frac{19x}{120}$.
Or $\frac{19x}{120} = 19$ par hypot. Donc
$19x = 19 \times 120$, donc $x = 120$.

PREUVE.

Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ de 120 sont 64, or la $\frac{1}{2}$ des $\frac{3}{4}$ de 120 est 45.
Or $64 - 45 = 19$. Donc, &c.

PROBLEME 30.

Quel est le nombre dont les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ multiplié par la $\frac{1}{2}$ de son sixiéme fassent 6?

OPERATION.

Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de x sont $\frac{x}{2}$, or la $\frac{1}{2}$ du $\frac{1}{6}$ de x est $\frac{x}{12}$; or $\frac{x}{2} \times \frac{x}{12} = \frac{x^2}{24}$. Or $\frac{x^2}{24} = 6$ par hyp. Donc $x^2 = 144$. Donc $x = 12$.

PREUVE.

Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de 12 sont 6, la $\frac{1}{2}$ du $\frac{1}{6}$ de 12 est 1, or $6 \times 1 = 6$. Donc, &c.

PROBLEME 31.

Quel est le nombre dont la $\frac{1}{2}$ + les $\frac{3}{4}$ valent 1 ?

SOLUTION.

Soit x nombre cherché.

Donc $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = 1$ hypot.

Donc $\frac{5x}{4} = 1$.

Donc $5x = 4$.

Donc $x = \frac{4}{5}$.

PREUVE.

$$\left.\begin{array}{l}\text{La } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \\ \text{Les } \frac{3}{4} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{3}{5}\end{array}\right\} = 1.$$

PROBLEME 32.

Quel eſt le nombre dont la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ ſoient 12?

Soit x nombre requis.

Donc $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 12$.

Or $x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{4} = 24$

Or $3x + 2x + \frac{6x}{4} = 72$

Or $12x + 8x + 6x = 288$.

Donc $26x = 288$

Donc $13x = 144$

Donc $x = \frac{144}{13} = 11\frac{1}{13}$.

PREUVE.

La $\frac{1}{2}$ de $11\frac{1}{13}$ eſt $5\frac{7}{13}$

Le $\frac{1}{3}$ de $11\frac{1}{13}$ eſt $3\frac{9}{13}$

Le $\frac{1}{4}$ de $11\frac{1}{13}$ eſt $2\frac{10}{13}$

12 0.

PROBLEME 33.

Le triple, la demi & le quart d'un nombre font 104, quel est le nombre inconnu?

Soit x nombre cherché.

$$3x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 104$$

Donc $6x + x + \frac{2x}{4} = 208.$

Donc $24x + 4x + 2x = 832.$

Donc $30x = 832$

Donc $15x = 416$

Donc $x = \frac{416}{15} = 27\frac{11}{15}.$

PREUVE.

$$27\tfrac{11}{15} \times 3 = 83\tfrac{3}{15}$$

La $\frac{1}{2}$ de $27\frac{11}{15} = 13\frac{13}{15}$

Le $\frac{1}{4}$ de $27\frac{11}{15} = 6\frac{14}{15}$

104

PROBLEME 34.

Les $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{6}$ d'un vaisseau plongent en mer, il reste quatre pieds de bord ; quelle est la profondeur du vaisseau ?

OPERATION.

Soit x profondeur du vaisseau.

Donc $\frac{3x}{4} + \frac{x}{6} + 4^{\text{pieds}} = x$

Donc $3x + \frac{4x}{6} + 16 = 4x$

Donc $18x + 4x + 96 = 24x$

Donc $22x + 96 = 24x$

Donc $96 = 2x$

Donc $x = 48$ pieds, hauteur du vaisseau.

PREUVE.

Les $\frac{3}{4}$ de $48 = 36$
Le $\frac{1}{6}$ de $48 = 8$

44
4 pieds de bords.

48

PROBLEME 35.

Donner une suite de formules pour extraire la racine 2^{e}, 3eme, 5^{e}, 7eme, &c. d'une quantité numérique ; soit le binome $a + b$ dont on demande la 7^{e} puissance pour servir de formule à l'extraction de la racine 7eme.

Nous avons vû, page 13 de l'Arithmétique, que le quarré d'un binome contient *le quarré de son premier terme, le double du premier multiplié par le second, le quarré du second.*

Que le cube d'un binome contient *le cube de son premier terme, le triple du quarré du premier terme multiplié par le second, le triple du premier terme multiplié par le quarré du second, & le cube du second.*

En continuant d'élever le binome à la puissance quatriéme, cinquiéme, sixiéme, septiéme, on trouvera ce qui arrivera à tous ses termes, & ce qui arriveroit à tous les autres multinomes à l'infini ; c'est en employant cette voye qu'on a calculé cette Table qui contient les 10 premieres puissances de $a + b$, où l'on peut voir dans le rang perpendiculaire de a^7 ce que contient la septiéme puissance de $a + b$.

TABLE DES PUISSANCES.

1										
a	b									
a^2	$2ab$	b^2								
a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3							
a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	b^4						
a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5					
a^6	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	b^6				
a^7	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	b^7			
a^8	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	b^8		
a^9	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$5ab^8$	b^9	
a^{10}	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	b^{10}

Mais on a abrégé la multiplication ſucceſſive du binome par la méthode qui ſuit.

1°. Elevez la premiere lettre du binome à la puiſſance demandée.

2°. Diminuez ſucceſſivement l'expoſant de *a* de l'unité juſqu'à ce qu'il ſoit réduit à l'unité.

$$a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a$$

3°. Joignez au ſecond terme la ſeconde lettre du binome élevé à la premiere puiſſance, & augmentez-la ſucceſſivement juſqu'à ce que ce terme ſoit ſeul élevé à la puiſſance demandée, vous aurez

$$a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7.$$

4°. Il n'eſt plus queſtion que de trouver les coefficiens. Pour cela donnez au ſecond terme l'expoſant du premier.

Pour avoir le troiſiéme multipliez ce coefficient 7 par l'expoſant 6, vous aurez 42 que vous diviſerez par 2 nombres des termes qui précédent le troiſiéme, vous aurez 21 coefficient du troiſiéme terme.

Pour avoir le quatriéme, le cinquiéme, le ſixiéme, le ſeptiéme, opérez de même, vous aurez

$$a^7,\ 7a^6b,\ 21a^5b^2,\ 35a^4b^3,\ 35a^3b^4,\ 21a^2b^5,\ 7ab^6,\ b^7.$$

septiéme puissance de $a+b$, dont on peut en conséquence déterminer le contenu.

Remarques sur la Table des Puissances.

1°. Le premier rang perpendiculaire à gauche n'a d'autre coefficient que l'unité.

2°. Le rang qui suit contient dans ses cellules des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. qui viennent de l'addition successive de l'unité.

3°. Le troisiéme rang contient les nombres 1, 3, 6, 10, 15, &c. qui viennent de l'addition successive des nombres naturels.

4°. Le quatriéme rang contient les nombres 1, 4, 10, 20, 35, &c. qui viennent de l'addition successive des précédens.

5°. Le cinquiéme rang contient les nombres 1, 5, 15, 35, qui viennent de l'addition successive des précédens, & ainsi de suite.

D'où il suit que le coefficient d'une cellule, par exemple, 35 coefficient de la quatriéme cellule du quatriéme rang eſt égale à la ſomme des coefficiens 1, 3, 16, 10, 15 = 35, qui ſe trouvent dans les cellules ſupérieures du rang précédent, ce qui donne une nouvelle méthode de trouver les coefficiens d'un binome.

TABLE DES PUISSANCES NUMERIQUES.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Pour extraire la racine ſeptiéme de
340 | 4825447
par la Table des puiſſances, 1°. Je

coupe ce nombre par tranche de 7 en 7, en commençant par la gauche, parce qu'il s'agit d'une septiéme puissance, & j'apperçois qu'il doit y avoir 2 caracteres à la racine, puisqu'il n'y a que deux tranches.

Je cherche dans la table quelle est la plus grande septiéme puissance contenue dans les trois premiers caracteres, & je trouve 128 dont la racine est 2. J'écris 2 à la racine, & je retranche 128 de 340 reste 212.

2°. J'abbaisse les caracteres suivans, & je mets un point après le 4 pour avoir un dividende, & je cherche dans la Table la sixiéme puissance du premier caractere, & après l'avoir multiplié par 7 j'en forme un diviseur, & je trouve que le second caractere est 3.

3°. Je multiplie le diviseur par 3 & je mets à part le produit.

4°. Je prens la cinquiéme puissance de 2, je la multiplie par 21 & par le quarré de 3 second caractere, & j'écris le produit sous le précédent en avançant d'un rang.

5°. Je prens la quatriéme puissance de 2 que je multiplie par 35 & par le cube de 3, & j'écris le produit de même.

6°. Je prens le cube de 2 que je multiplie par 35 & par 64, quatriéme puissance de 3, & j'écris le produit sous les autres.

7°. Je prens le quarré de 2 que je multiplie par 21 & par la cinquiéme puissance de 3, que j'écris à l'ordinaire.

8°. Je prens 2, & après l'avoir multiplié par 7, & par la sixiéme puissance de 3, j'écris le produit.

9°. J'écris la septiéme puissance du second caractere, après quoi je fais la somme, si elle est conforme à ce qui est resté, la racine est juste.

OPERATION.

340 | 4825447 (23
128
2124.825447

$1344 = 7a^6b$
$6048 = 21a^5b^2$
$15120 = 35a^4b^3$
$22680 = 35a^3b^4$
$20412 = 21a^2b^5$
$10206 = 7ab^6$
$2187 = b^7$

2124825447

C'eſt de ces réflexions que l'on a tiré la formule générale de la puiſſance M du binome P + Q qui ſert également pour la formation des puiſſances & pour l'extraction des racines ; car extraire une racine n'eſt autre choſe que d'élever la puiſſance donnée à une puiſſance fractionnaire dont le numérateur eſt l'unité, & le dénominateur eſt égal au nombre des degrés de la racine ; par exemple, extraire la racine deuxiéme de a^6, c'eſt élever a^6 à la puiſſance $\frac{1}{2}$ on aura

$$a^6 \times \frac{1}{2} = a\frac{6}{2} = a^3$$

La formule générale eſt done

$$a^m + ma^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} q^{m-2} q^2 + \&c.$$

PROBLEME 36.

On demande trois nombres quarrés dont la ſomme forme un nombre quarré.

OPERATION.

1°. Soit un nombre quarré impair quelconque tel que *9*, il ſera le premier nombre.

2°. Otez-en 1 reſte 8, dont la $\frac{1}{2}$, 4 étant quarrée *16* ſecond nombre.

3°. Joignez le premier *9* à *16*, vous aurez 25, dont ôtant 1, & quarrant ſa demie, on aura 144 pour le troiſiéme nombre quarré.

PREUVE.

1er nombre	- -	9
2e nombre	- -	16
3e nombre	- -	144
		169 nombre quarré.

PRO-

PROBLEME 37.

Trouver deux nombres dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre quarré.

Prenez deux nombres à volonté ; le double de leur produit & la ſomme de leurs quarrés donneront les deux nombres requis.

$2\,ab$ l'un des nombres
$a^2 + b^2$ l'autre.

PREUVE.

$a^2 + 2\,ab + b^2$ quarré de $a + b$
$a^2 - 2\,ab + b^2$ quarré de $a - b$.

Numériquement.

Le double de $5 \times 3 = 30$ l'un des nombres.

$25 + 9 = 34$ l'autre nombre
$34 + 30 = 64$ quarré de 8
$34 - 30 = 4$ quarré de 2.

On peut remarquer que la différence des quarrés de ces deux nom- eſt auſſi un nombre quarré.

$34 \times 34 = 1156$
$30 \times 30 = 900$

256 quarré de 16.

PROBLEME 38.

Trouver deux nombres dont les quarrés fassent ensemble un nombre quarré. SOLUTION.

Faites le produit de deux nombres quelconques, le double de ce produit sera l'un des nombres, la différence de leur quarré sera l'autre.

EXEMPLE.

Soient a & b nombres quelconques
$2\,ab$ double de leur produit.
$a^2 - b^2$ diff. de leurs quarrés.

Je dis que le quarré de $2\,ab$ & le quarré de $a^2 - b^2$ formeront un nombre quarré.

$$\overline{2\,ab}^2 = 4a^2b^2$$
$$\overline{a^2 - b^2}^2 = a^4 - 2\,a^2b^2 + b^4$$

Or $4\,a^2b^2 + a^4 - 2\,a^2b^2 + b^4$, somme des deux quarrés ci-dessus, se réduit à $a^4 + 2\,a^2b^2 + b^4$ quarré de $a^2 + b^2$.

Exemple Numérique.

$5 \times 3 = 15$ dont le double est 30; l'un des nombres.

$25 - 9 = 16$ l'autre nombre.

PREUVE.

$$\left.\begin{array}{l} 30 \times 30 = 900 \\ 16 \times 16 = 256 \end{array}\right\} 1156 \text{ dont la racine est } 34.$$

PROBLEME 39.

Quel eſt le nombre qui multiplié par 18 eſt le onziéme de ſon quarré.

OPERATION.

Soit x nombre inconnu.

Donc $18x = \frac{x^2}{11}$

Donc $198x = x^2$

Donc $198 = x$.

PREUVE.

$198 \times 18 = 3564$

$198 \times 198 = 39204$ dont $\frac{1}{11}$ eſt 3564

Cette queſtion très-difficile en Arithmétique, & pour la ſolution de laquelle elle n'a point d'autre méthode que le tatonnement eſt très-aiſé en Algebre, & fournit une régle générale pour tous les cas imaginables de la même eſpece.

PROBLEME 40.

On demande trois nombres dont le quarré des deux moindres fassent autant que le quarré du plus grand.

Ce Problême n'est autre chose que le 47eme de Pithagore, les 3 nombres 3, 4 & 5, satisfont au Problême, car

$$\left.\begin{array}{r} 3\times3 = 9 \\ 4\times4 = 16 \end{array}\right\} = 25$$

$$5\times5 = 25$$

Pour trouver une infinité de nombres de cette espece.

1°. Prenez deux nombres qui ne différent que de l'unité.

Doublez-en le produit vous aurez un des nombres.

2°. Prenez la somme des deux nombres, ce sera le second nombre.

3°. Extraiez la racine de la somme de leurs quarrés ; ce sera le troisiéme nombre.

EXEMPLE.

Soient 10 & 9 dont le double du produit est 180, 1er nombre, & dont la somme 19 est le second nombre, la racine de la somme de leurs quarrés est 181. Donc, &c.

PROBLEME 41.

Quel est le nombre dont les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de son quarré, divisé par la $\frac{1}{2}$ des $\frac{5}{6}$ de la racine soit 12 ?

OPERATION.

Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de x^2 sont $\frac{x^2}{2}$, la demi des $\frac{5}{6}$ de x est $\frac{5x}{12}$, or $\frac{6x^2}{12}$ divisé par $\frac{5x}{12}$ donne $\frac{6x^2}{5x} = \frac{6x}{5}$; or $\frac{6x}{5} = 12$ par hyp.
Donc $6x = 12 \times 5$.
Donc $x = 2 \times 5 = 10$.

PREUVE.

Les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ de 100 sont 50.
La $\frac{1}{2}$ des $\frac{5}{6}$ de 10 est $\frac{25}{6}$.
Or 50 divisé par $\frac{25}{6} = \frac{300}{6}$ divisé par $\frac{25}{6}$, c'est-à-dire, $\frac{300}{25} = 12$.

PROBLEME 42.

Une Place publique contient 588 $\frac{1}{16}$ de toises quarrées, on demande de combien de toises est son côté ?

OPERATION.

1°. Réduisez 588 $\frac{1}{16}$ de toises en $\frac{1}{16}$ vous aurez $\frac{9409}{16}$.

2°. Tirez la racine du numérateur 9409 qui est 97, & celle du dénominateur qui est 4, vous aurez $\frac{97}{4}$.

3°. Réduisez cette fraction en entiers, vous aurez 24 $\frac{1}{4}$ de toises pour le côté de cette Place publique.

PREUVE.

$$24\tfrac{1}{4} \times 24\tfrac{1}{4} = 588\tfrac{1}{16}.$$

PROBLEME 43.

Une Terrasse cubique contient 228 toises cubes & $\frac{163}{729}$: on demande de déterminer le dessus de la Terrasse.

OPERATION.

1°. Réduisez les 228 toises en fractions, vous aurez $\frac{166375}{729}$.

2°. Tirez la racine cubique de cette fraction, vous aurez $\frac{55}{9}$.

3°. Réduisez cette nouvelle fraction en entiers, vous aurez

$6\frac{1}{9}$ côté du cube.

PREUVE.

$6\frac{1}{9} \times 6\frac{1}{9} = 37\frac{28}{81} \times 6\frac{1}{9} = 228\frac{163}{729}$.

PROBLEME 44.

Un Maçon ayant entrepris la fouille d'un puits qui devoit avoir 10 toises de profondeur à raison de 300 ₶ pour tout l'ouvrage, mourut n'en ayant fait que 4 toises. Il s'agit de déterminer le payement de cette partie d'ouvrage à proportion du prix total, & de la peine qui devoit croître naturellement de plus en plus.

SOLUTION.

On peut supposer dans ces sortes d'ouvrages que la peine augmente à proportion que l'on descend, & cela suivant la progression naturelle des nombres, par conséquent prenant pour premier terme un pied, on aura cette progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. dont la somme est 55 pieds.

Prenez 1 ᵗ 2, 3, 4 pour les quatre toises dont la somme est 10 ᵗ : dites Si 55 donnent 300. combien 10, on aura 54 ₶ $\frac{6}{11}$.

PROBLEME 45.

Trouver la ſomme des cubes des termes de la progreſſion naturelle des nombres.

Soit, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.

Pour avoir la ſomme des cubes des quatre premiers termes 1, 2, 3, 4 faites le quarré de leur ſomme $10 = 100^q = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$, valeur des cubes des quatre termes.

PROBLEME 46.

Régle de Trois composée directe.

1350 Pionniers travaillant six heures par jour ont fait 1800 toises de tranchée, on demande combien 4050 Pionniers travaillant huit heures par jour feront d'ouvrage.

OPERATION.

$$\text{Si } \underbrace{1350^{H},\ 6^{heur}}\ 1800^{t} :: \underbrace{4050^{H},\ 8^{h}}\ x^{t}$$

$$\text{Si } 8100,\ 1800 :: 32400,\ x = 7200^{t}$$

PREUVE.

$$8100 \times 7200 = 1800 \times 32400 = 58320000$$

PROBLEME 47.

Régle de Trois composée indirecte.

1150 Hommes enfermés dans une Citadelle peuvent soutenir le siége 20 jours, à raison de 3 livres de pain par jour, la Garnison se renforce d'autant d'hommes, on demande en ne donnant plus que deux livres, combien de jours on pourra soutenir le siége.

OPERATION.

$$\text{Si } \underbrace{1150^{h},\ 3^{l}}\ \ 20^{j} :: \underbrace{2300,\ 2^{l}}\ x.$$

$$\text{Si } 3450,\ 20 :: 4600,\ x = 15^{j}$$

PREUVE.

$$3450 \times 20 = 4600 \times 15 = 69000.$$

PROBLEME 48.

Pierre & Jacques ont mis en Société, l'un 10 ₶ pour 4 mois, l'autre 20 ₶ pour 2 mois, le profit eſt 500 ₶ ; mais le premier entre dans le profit à raiſon de 4 pour cent, & le ſecond à raiſon de 3 pour cent : on demande la part de chacun.

OPERATION.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{P.} & 10\text{₶} & 4^{\text{mois}} & 5\ p^r\ \% \\ \text{J.} & 20 & 2 & 3\ p^r\ \% \end{array}\right\}\ 500\text{₶}$$

$$\begin{array}{ll} \text{P.} & 10 \times 4 \times 5 = 200 \\ \text{J.} & 20 \times 2 \times 3 = 120 \end{array}$$

Si 320 donnent 500 combien 200, $x = 312$ ₶ 10.

Si 320 donnent 500 combien 120, $x = 187$ ₶ 10 s.

Preuve. 500

PROBLEME 49.

Trois Libraires ont entrepris l'édition d'un livre qu'ils tirent à 1000 Exemplaires, & dont la dépense se monte à 11000 ₶

Le premier a mis		4895 ₶
Le deuxiéme	- -	3256
Le troisiéme	- -	2849
		11000

Déterminer le nombre des Exemplaires de chacun au *prorata* de leur mise.

OPERATION.

Faites cette analogie. La somme des mises est au nombre des Exemplaires, comme la mise particuliere de chacun est à sa cote-part.

11000, 1000 ::	{	4895,	445 Ex.
		3256,	296
		2849,	259
		Preuve	1000

PROBLEME 50.

Trois Marchands ont fait bourse commune, à condition qu'ils partageroient le gain au *prorata* de leur mise & du tems que leur mise auroit restée dans la Société.

Déterminer ce qu'il doit revenir à chacun.

Solution générale.

Il faut multiplier la mise de chacun par son tems, & regarder ces produits comme de nouvelles mises; le reste s'achevera comme au Problême précédent.

Hypothese.

$$\begin{array}{lrcr} & & & \text{mois} \\ A & 357 & & 15 \\ B & 1071 & \text{Pour} & 3 \\ C & 153 & & 9 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} 9631 \text{ ₶ gain total.}$$

Opération.

$$\begin{array}{lr} A & 5355 \\ B & 3213 \\ C & 1377 \\ \hline \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} 9631$$

$$9945,\ 9631 :: \left\{ \begin{array}{l} 5355, \\ 3213, \\ 1377, \end{array} \right. x$$

PROBLEME 51.

André, Bernard & Charles, ont gagné en Société 6710 ** on ne connoît leurs mises que deux à deux : déterminer le gain de chacun des Associez.

On apperçoit que la difficulté ne consiste qu'à déterminer les mises particulieres.

Hypothese.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 7320 \\ b + c = 9760 \\ c + a = 8040 \end{array}\right\} 6710 \text{ gain total.}$$

OPERATION.

$a + b = 7320$ donc $A = 7320 - B$

Or $b + c = 9760$

& $c + 7320 - B = 8040$

Or $b = 9760 - C$

Donc $C + 7320 - 9760 + c = 8040$

Donc $2c - 2440 = 8040$

Donc $2c = 10480$

Donc $C = 5240$

Donc $B = 4520$

Donc $A = 2800$

Le reste s'achevera comme aux Régles de Sociétés simples.

PROBLEME 52.

André, Jacques & Christophe, ont affermé un Etang pour 78 écus, en telle sorte qu'André payeroit la moitié du prix, Jacques le tiers, & Christophe le quart : on demande de déterminer ce que chacun d'eux doit payer.

OPERATION.

Il s'agit de déterminer un nombre dont la moitié, le tiers & le quart, soit 78.

Soit x nombre cherché.

Donc $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 78$

Donc $1\,x + \frac{2\,x}{3} + \frac{x}{2} = 156$

Donc $3\,x + 2\,x + \frac{3\,x}{2} = 468$

Donc $6\,x + 4\,x + 3\,x = 936$

Donc. $13\,x = 936$

Donc $x = \frac{936}{13} = 72$

Donc A = - - - 36
Donc J = - - - 24
Donc C = - - - 18

78 ₶.

PROBLEME 53.

Régle Teſtamentaire.

Un Procureur chargé d'un Teſtament y trouve ces conditions : » Dix de mes petits-Neveux auront portions égales de » mon bien, cinq de mes Couſins auront » chacun la moitié de ce que chacun de » mes petits-Neveux aura ; trois de mes » Domeſtiques auront chacun le tiers de la » part d'un de mes petits-Neveux, & ma » Garde aura le quart d'un de mes Neveux. La Succeſſion eſt de 483 Louis ; on demande la part de chacun.

OPERATION.

Soit x part d'un des 10 petits-neveux.

Donc $10x$ part des 10

Donc $\frac{5x}{2}$ part des 5 couſins

Donc x part des 3 domeſtiques

Donc $\frac{x}{4}$ part de la garde

Donc $\frac{55}{4}x = 483$

Donc $x = \frac{483 \times 4}{55} = 35^{\#} \frac{7}{55}$

$10x = 351 \frac{15}{55}$

$\frac{5x}{2} = 87 \frac{45}{55}$

$x = 35 \frac{7}{55}$

$\frac{x}{4} = 8 \frac{43}{55}$

$481 \frac{110}{55} = 483$ Louis.

PROBLEME 54.

Un Arithméticien mourant sans enfans, mais laissant sa femme enceinte dit, je légue les $\frac{2}{3}$ de mon bien à l'enfant qui naîtra si c'est un garçon; mais si c'est une fille elle n'aura que le tiers & la mere le reste : or la mere met au jour un fils & une fille; on demande la part d'un chacun

OPERATION.

Soit x part de la fille
Donc $2x$ part de la mere.
Donc $4x$ part du garçon
Donc $7x = 49000$ ₶ bien du Testateur.
Donc $x =$ 7000 part de la fille
14000 part de la mere
28000 part du garçon

49000

PROBLEME 55.

Un Pere fait ſon Teſtament, & veut que l'aîné de ſes fils reçoive 1000 ₶ & le $\frac{1}{7}$ du reſte.

Le ſecond 2000 ₶ & le $\frac{1}{7}$ du reſte.

Le troiſiéme 3000 ₶ & le $\frac{1}{7}$ du reſte; ainſi de ſuite.

On demande le nombre des enfans & le bien du pere, & la part d'un chacun.

Tout ce qu'on ſçait, c'eſt qu'ils recevront autant l'un que l'autre.

SOLUTION.

Soit x bien du pere

Hypothèſe 1000 ₶ $=$ 1. Donc

$1 + \frac{x-1}{7}$ part du premier fils $= \frac{6+x}{7}$

$\frac{7x}{7} - \frac{6-x}{7} = \frac{6x-6}{7}$ reſte du bien du pere, le premier fils partagé.

$2 + \frac{6x-20}{49}$ part du ſecond $= \frac{78+6x}{49}$.

Or $\frac{6+x}{7} = \frac{42+7x}{49}$.

Or $\frac{42+7x}{49} = \frac{78+6x}{49}$ hyp.

Donc $x = 36000$ ₶ bien du pere.

$x = 36000$ ₶

1000₶ + 5000 = 6000 part du 1[er];
or ils ont autant l'un que l'autre par hypothèse, donc $\frac{36000}{6000} = 6$ nombre des enfans.

PREUVE.

1000 + 5000 part du premier.
2000 + 4000 part du second.
3000 + 3000 part du troisiéme.
4000 + 2000 part du quatriéme.
5000 + 1000 part du cinquiéme.
6000 + 1000 part du dernier.

PROBLEME 56.

Une Beguine, par son Testament, veut qu'on partage 550 Ducats, de sorte que cinq de ses Niéces ayent portions égales, que trois autres aient à partager entr'elles la moitié de la portion des cinq premieres, & que deux autres aient aussi à partager entr'elles le tiers de la portion des premieres.

OPERATION.

Soit x part de chacune des 5 premieres.

Donc $5x$ seront la part totale des 5 premieres.

Or, 1°. Par la condition les trois autres doivent avoir entr'elles la $\frac{1}{2}$ de $5x$, c'est chacune $\frac{1}{6}$ de $5x$.

2°. Les deux autres doivent avoir le $\frac{1}{3}$ de $5x$, c'est chacune $\frac{1}{6}$ de $5x$.

Toutes ces parts jointes ensemble doivent égaler 550 Ducats.

$$5x + \frac{5x}{2} + \frac{5x}{3} = \frac{55x}{6} = 550^{D}$$

Donc $55x = 3300^{D}$

Donc $x = 60$.

C'est-à-dire que chacune des cinq

premieres aura 60 Ducats pour sa part.

Donc chacune des trois autres aura 50 Ducats.

Donc les deux dernieres auront chacune aussi 50 Ducats.

PREUVE.

$$5 \times 60 = 300$$
$$3 \times 50 = 150$$
$$2 \times 50 = 100$$

550

PROBLEME 57.

Réduction d'Aunage.

On demande combien 50 aunes de Paris font d'aunes d'Hollande.

PREPARATION.

Table du rapport des Aunages.

			Paris
100	Aunes de Paris font		
171 $\frac{1}{2}$	de Flandre,	ou	$7 = 12$
128 $\frac{4}{7}$	de Londres	ou	$7 = 9$
175	d'Hollande -	ou	$4 = 7$
480	Palmes de Genes	ou	$5 = 24$
200	Ras de Turin -	ou	$1 = 2$
130	Bares de Valence	ou	$1 = \frac{10}{13}$.
180	Pics de Constantinople ou - - -		$5 = 9$
60	Cannes de Montpellier ou - - -		$5 = 3$
188 $\frac{1}{4}$	Cannes de Naples, &c.		

SOLUTION.

Si 100, 175 :: 50, $x = 87\frac{1}{2}$

ou 4, 7 :: 50, $x = 87\frac{1}{2}$

PREUVE.

7, 4 :: $87\frac{1}{2}$, $x = 50$

PROBLEME 58.

Régle de Tare.

Pierre achette une Pipe d'Huile pesant 700 livres, y compris la Pipe, & on lui accorde 16 pour cent de tare.

Quelques Arithméticiens font cette analogie.

100, 16 :: 700, x, = 112 valeur de la tare qu'ils défalquent de 700; ainsi selon eux il reste 588 net. Mais les plus grands Maîtres s'y prennent de cette maniere.

116, 100 :: 700, $x = \frac{12}{29}$.

Par cette méthode il est dû au vendeur 15 ₶ $\frac{12}{29}$ de plus que par l'autre méthode; ce qui paroît juste puisqu'il relâche toujours 16 ₶ de tare, mais sur la quantité de 100 qu'il convient de vendre.

PREUVE.

100, 116 :: 603 $\frac{13}{29}$, $x = 700$

PRO-

PROBLEME 59.

Régle d'Escompte.

Pierre achette d'André, à un an de terme, pour 100 pistoles de marchandises ; André offre à Pierre de lui remettre 10 pour cent s'il veut le payer comptant : on demande quel doit être le profit de Pierre.

Il semble qu'il faudroit prendre le centiéme de 1000 le multiplier par 10, on auroit 100 ; par conséquent Pierre ne payeroit comptant que 900 ₶

Mais il faut observer qu'André ne doit tenir compte à Pierre de 10 pour cent de remise que sur ce qui rentrera réellement dans sa caisse. Par conséquent il faut dire :

Si 110, don. 100 : : 1000 ₶, x

x = 909 ₶ 1 ^{f} 9 ^{d} $\frac{9}{11}$

Profit de Pierre 90 18 2 $\frac{2}{11}$

1000 0 0

Cette pratique est si essentielle que si André ne recevoit comptant que la somme de 900 liv. cet argent à 10 pour cent ne lui donneroit au bout de l'an que 990 liv. par conséquent son sort eut été plus heureux d'attendre les 1000 liv. au bout de l'année.

Plusieurs Arithméticiens suivent une méthode différente ; mais cette pratique est celle de le Gendre, de Savari, &c.

PROBLEME 60.

Encheres des Baux.

Une Métairie a été miſe à un certain prix ; la premiere enchere a été d'un tiers en-ſus, la ſeconde a été d'un cinquiéme du capital & de la premiere enchere, & la troiſiéme a été d'un dixiéme du tout ; enfin elle a été vendue 642 écus $\frac{2}{5}$: on propoſe de déterminer le premier prix de la Métairie avant les encheres.

SOLUTION.

Soit x prix requis.

Donc $\frac{x}{3}$ premiere enchere.

$x + \frac{x}{3}$ ſecond prix $= \frac{4x}{3}$.

$\frac{4x}{15}$ ſeconde enchere.

$\frac{4x}{3} + \frac{4x}{15}$ troiſiéme prix $= \frac{24x}{15}$

$\frac{24x}{15}$ troiſiéme enchere.

$\frac{24x}{15} + \frac{24x}{150}$ quatriéme prix $= \frac{264x}{150} = \frac{44x}{25}$.

$\frac{44x}{25} = 642\frac{2}{5}$ hyp. $= \frac{3212}{5}$.

$$\frac{3212}{5} = \frac{11x}{25} = \frac{803}{5}.$$

$$11x = 4015$$

$$x = \frac{4015}{11} = 365.$$

PREUVE.

	365
$\frac{1}{3}$	$121\ \frac{2}{3}$
	$486\ \frac{2}{3}$
$\frac{1}{5}$	$97\ \frac{1}{3}$
	$584\ 0$
$\frac{1}{10}$	$58\ \frac{2}{5}$
	$642\ \frac{2}{5}$ prix total.

PROBLEME 61.

Troc de Marchandiſes.

Un Trafiquant de Génes veut troquer 30 aunes de Velours à 22 liv. 10 ſ. l'aune, avec un Marchand de Soyeries, pour avoir en échange d'un certain Taffetas à 5 liv. 5 ſ. On propoſe de déterminer combien il doit recevoir d'aunes de Taffetas.

Soit a nombre des aunes de velours.
b prix de l'aune de velours.
c. prix du taffetas.
x nombre des aunes de taffetas qu'il faut donner en échange ; par les conditions du Problême

$ab = cx$. Donc

$\frac{ab}{c} = x$.

Il ne s'agit que de ſubſtituer les valeurs connues pour déterminer l'inconnu x qu'on trouvera de $128\frac{4}{7}$.

PREUVE.

30	$128\frac{4}{7}$
22 10	$5^{tt}\ 5^{f}$
60	640
60	32
15	3
675^{tt}	675

Pour multiplier les $\frac{4}{7}$ par $5^{tt}\ 5^{f}$, réduiſez les $5^{tt}\ 5^{f}$ en 105^{f}, multipliez-le par 4 & diviſez ce produit par 5.

PROBLEME 62.

Lettre de Voiture.

Un Libraire de Tournai reçoit 6 caisses de Livres de Paris, pesant 3749 livres, à 3 ₶ 15 s du cent pesant.

OPERATION.

Si 100 = 3 ₶ 15 s.
x = 3749
3 15 s

11247
1874 10
937 5

14058 . 15 | 100
= 140 ₶ 11 s 9 d

PREUVE.

Si 3 ₶ 15 = 100
x = 140. 11. 9.

Si 900 den = 100
x = $\frac{3374100}{900}$ = 3749.

PROBLEME 63.

Change d'Amsterdam sur Paris.

Rabbi Ismaël voulant voyager en France, prend d'un Banquier d'Amsterdam une lettre sur Paris de 1525 ₶ de France, le Change a $57\frac{1}{8}$ deniers de gros pour écus; combien doit-il compter au Banquier d'argent d'Amsterdam.

2 deniers de gros font un sol de gros.

On réduit les sols en florins comme en France, en tranchant la derniere figure & prenant la moitié.

OPERATION.

Si 3₶ = $57\frac{1}{8}$ 1er état.
40 = 1
x = 1525 ₶

Si 24 = 457 2d état.
40 = 1
x = 1525
457

10675
7625
6100

696925 | 24

Coupez la derniere figure ou divisez par 40.

29038 $\frac{13}{24}$
14519
rep. 725f 19f $\frac{13}{24}$

Change de Paris sur Amsterdam, qui sert de preuve.

Si 1 = 40
Si $57\frac{1}{8}$ = 3
$x = 725^{ll}\ 19\frac{13}{24}$

Si 1 = 40
Si 457 = 24
$x = 725\ 19\frac{13}{24}$
40

29000
38

29038 × 24 = 696925

696925 | 1371 = 457 × 24 divis.
11425
457 508 écus
60

27420 | 1371
00000
20

508
3

1524
1

1525

PROBLEME 64.

Change de Paris sur Londres.

Un Particulier prend chez un Banquier, à Paris, une lettre sur Londres de 417 ₶ sterlins 13 ſ 6 d $\frac{47}{240}$ à 46 $\frac{5}{8}$ deniers sterlins pour écu de 60 sols; combien doit-il payer audit Banquier?

SOLUTION.

Si 46 $\frac{5}{8}$ = 3
x = 417 ₶ 13 ſ 6 $\frac{47}{240}$

Si 11190 = 3
x = 24058127 | 11190

```
24058127 | 11190
 16781   |------
  55912  | 2149 écus
  111527
   10817
       3 ₶
  ------
   32451
      20 ſ
  ------
  649020 | 11190
   89520 |------
         | 58 sols
```

Change de Londres sur Paris, qui sert de preuve.

Si $3^{\#} = 46\frac{5}{8}$

Ou

Si $720^{d} = 373$ huit de deniers.

$x = 1547976$ deniers tour.

$\times 373$

$= 577395048$

$720 \times 8 = 5760$ d.ivr.

$= 5760 = 100242^{d. st.} + \frac{47}{240}$

Or $100242 + \frac{47}{240} = 417^{l. st.}\ 13^{s}\ 6^{d}$ $\frac{47}{240}$. en réduisant comme on réduit en France les deniers tournois en livres.

I v

PROBLEME 65.

Change de Paris sur Madrid.

Un Sécretaire d'Ambassadeur partant pour Madrid, demande combien il recevra de réaux de platte courante de 10 à la piastre, le Change a 65 sols par piastre, pour 4550 ₶ tournois.

OPERATION.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } 65^{\text{sols}} = 1^{\text{piast.}} \\ x = 4550 \times 20 \end{array}\right\} 1^{\text{er}}\text{ état pour avoir des sols.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } 65 = 1 \\ x = 91000 \mid 65 \end{array}\right\} 2^{\text{d}}\text{ état.}$$

$$\begin{array}{rl} 260 & \\ 000 & 1400 \text{ piastres.} \\ & 10 \\ \hline & 14000 \text{ réaux.} \end{array}$$

PREUVE.

$14000^{\text{réaux}}$ 1400 piastres.

$$\text{Si } 1^{\text{p}} = 65^{\text{f}}$$

$$x = 1400 \times 65 = 9100 \mid 0^{\text{f}}$$

$$4550^{₶}$$

PROBLEME 66.

Change de Paris sur Lisbonne.

Même histoire pour le Portugal ; on demande combien on recevra de cruzades & de rez pour 1876 écus 47 f 8 d. Le Change a 660 rez par écu.

OPERATION.

Si 1 écu == 660 rez
x == 1876 # 47 f 8 d
660

112560
112560
220
220
55
22
7 $\frac{1}{3}$

1238684 rez $\frac{1}{3}$ | 400
3868 rep. 3096 c. 284 $\frac{1}{3}$
2684
284 $\frac{1}{3}$

Change de Lisbonne sur Paris, pour servir de preuve.

Si 660 rez = 1 écus
$x = 1238684\frac{1}{3}$

Si 660 = 720
$x = 1238684\frac{1}{3}$

```
             720
        ---------
        24773680
       8670788
             240
     ------------
       891852720 | 660
       2318      |------  den.
        3385      1351292 | 720 d.
          852      6312   | 1876 éc.
          1927      5529  (47 s 3 d.
           6072     4892
            1320     572
             000
```

PROBLEME 67.

Change de Lille ſur Paris.

Lille négocie ſes effets ſur Paris en deniers de gros.

96 deniers de gros font 48 patars.

20 patars valent un florin ; le florin vaut 25 ſ de France.

André veut négocier une lettre ſur Paris de *3698* ₶ à *96* deniers de gros ; combien recevra-t'il de florins ?

$$\left.\begin{array}{rcr} \text{Si } 3 & = & 96 \\ 40 & = & 1 \\ x & = & 3698^{₶} \end{array}\right\} \text{1}^{\text{er}} \text{ état}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \text{Si } 1 & = & 32 \\ 40 & = & 1 \\ x & = & 3698 \end{array}\right\} \text{2}^{\text{d}} \text{ état en prenant le } \tfrac{1}{3} \text{ de 3 \& de } 96.$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \text{Si } 1 & = & 4 \\ 5 & = & 1 \\ x & = & 3698 \\ & & 4 \end{array}\right\} \text{3}^{\text{eme}} \text{ état en prenant le } 8^{\text{eme}} \text{ de 40 \& de 32.}$$

$$\begin{array}{rl} 14792 & \{\ 5 \\ \hline \text{flor.} & 2958\ \tfrac{2}{5} \\ & 739\ \tfrac{3}{5} \\ \hline & 3698.0 \end{array}$$

Change de Paris sur Lille, pour servir de preuve.

$$\text{Si } 1 = 40$$
$$96 = 3$$
$$x = 2958 \text{ flo. } \tfrac{2}{5}$$

$$\text{Si } 1 = 40$$
$$32 = 1$$
$$x = 2958 \text{ fl. } \tfrac{2}{5}$$

$$\text{Si } 1 = 5$$
$$4 = 1$$
$$x = 2958 \text{ fl. } \tfrac{2}{5}$$

5

14792 | 4

3698 ₶

PROBLEME 68.

Mêmes donnés. Le Change a $95\frac{1}{2}$.

Si $3 = 95\frac{1}{2}$

$40 = 1$

$x = 3698.$

Si $6 = 191$

$20 — 1849$

191.

1849

16641

1849

353169 | 120

1131 fl. $2942\frac{110}{120} = \frac{11}{12}$

$19^{pat.}\frac{5}{6} = 10^{d}$ 515

359

119

florins	2942	$19^{pat.}$	10^{d}
	735	14	$11\frac{1}{2}$
	3678^{tt}	14	$9\frac{1}{2}$

PREUVE.

Si $1 = 40$

$95\frac{1}{2} = 3$

$x = 2942\frac{119}{120}$

Si $1 = 40$

$191 = 6$

$x = 2942\frac{119}{120}$

$$
\begin{array}{r}
2942\frac{119}{120} \\
240 \\
\hline
117680 \\
5884 \\
238 \\
\hline
706318
\end{array}
\quad
\begin{array}{|l}
\underline{191} \\
\\
3698
\end{array}
$$

1333

1871

1528

PROBLEME 69.

Mêmes donnés. Le Change a $96\frac{1}{2}$.

Si $3 = 96\frac{1}{2}$

$40 = 1$

$x = 3698$

Si $6 = 193$

$20 = 1$

$x = 1849$

193

5547

16641

1849

356857 | 120

flor. $2973\frac{97}{120}$

$2973 \quad 16\frac{1}{4}$

$743 \quad 9\frac{1}{24}$

$3717 \quad 5\frac{5}{24}$

PREUVE.

Si 1 == 40
96 $\frac{1}{2}$ == 3
x == 2973 flor. $\frac{97}{120}$

Si 1 == 40
193 == 6
x == 2973 $\frac{97}{120}$
240

118920
594694
1

713714 | 193
1347 | 3698
1891
1544

PROBLEME 70.

Un Boulanger vend la livre de pain 2 sols, lorsque la mesure de bled vaut 5 ₶; combien doit-il vendre le pain lorsque la mesure de bled ne lui coûtera que 3 ₶ 15 s?

SOLUTION.

5 ₶ = 100 sols.

3 ₶ 15 s = 75 s

$100^s, 2 :: 75, x = \frac{150}{100} = \frac{15}{10}$.

$\frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1^s\ 6^d$ prix du bled à 3 ₶ 15 s.

PROBLEME 71.

Un Caffetier a reçu de Nancy 30 bouteilles d'une excellente Liqueur à 45 ^{f} qu'il veut mêler avec 50 bouteilles de sa composition à 22 ^{f}, & avec 20 bouteilles à 24 ^{f}. On demande à combien lui reviendra la bouteille du mêlange ?

30	bouteilles	à 45 ^{ff}	=	1350 ^{sols}
50	b - -	à 22	=	1100
20	b - -	à 24	=	480

100 b. diviseur. . 29|30 ^{f} (100

29 ^{f} 3 ^{d} $\frac{3}{5}$

PREUVE.

100 bouteilles à 29 ^{f} 3 ^{d} $\frac{3}{5}$ = 2930 ^{f}.

PROBLEME 72.

Un Directeur de Monnoye à trois lingots à différens titres.

6 marcs à 21 carats.
4 marcs à 23
7 marcs à 22

On demande à quel titre sera l'or de ces trois masses lorsqu'on les aura fondues & mêlées ensemble pour n'en faire qu'une.

SOLUTION.

6	marcs à 21	=	126
4	à 23	=	92
7	à 22	=	154
17 diviseur.			372 | 17
			$21^{\text{it}}\,\frac{15}{17}$

PREUVE.

$21\,\frac{15}{17} \times 17 = 372.$

PROBLEME 73.

Un Aubergiste a du vin à 8 & 12ſ; combien prendra-t'il de l'un & de l'autre pour former cent douze pintes à 9?

OPERATION.

$$\left.\begin{array}{l} 8 = a \\ 12 = b \end{array}\right\} 9 = c.$$

$$b = c + 3$$

$$a = c - 1 \quad \text{Donc}$$

$$b = c + 3$$

$$3a = 3c - 3$$

$$3a + b = 4c. \text{ Donc.}$$

Divisez 112 par 4, ce sera le nombre par lequel il faut multiplier $3a$ & $1b$; on aura 28 pintes à 12ſ & 84 à 8ſ lesquelles formeront 112 pintes à 9ſ.

PREUVE.

84	à 8	=	33 ₶	12
28	à 12	=	16	16
			50	8

Preuve.

112 à 9ſ = 50 ₶ 8ſ.

PROBLEME 74.

Un Orféve a de l'or à 23 carats & à 13 carats ; il veut par leur mêlange faire de l'or à 18 carats : on demande combien il doit prendre de chacun pour faire une masse de 9 marcs.

OPERATION.

$$\left.\begin{array}{l} 23 = a \\ 13 = b \end{array}\right\} 18 = c$$

$$a = c + 5$$

$$b = c - 5 \quad \text{donc} \times 5$$

$$5a = 5c + 25$$

$$5b = 5c - 25$$

$$5a + 5b = 10c.$$

Donc $4a\frac{1}{2} + 4b\frac{1}{2} = 9c$, il faut donc $4\frac{1}{2}$ marcs de l'un & de l'autre pour une masse de 9 marcs à 18 carats.

PREUVE.

Regardons le carat comme un prix, par exemple, 10 ₶.

$4\frac{1}{2}$ marcs d'or à 23 carats donneront 230 ₶ à multiplier par $4\frac{1}{2} =$ 1035 ₶

$4\frac{1}{2}$ marcs à 13 carats ou 130 ₶ $\times 4\frac{1}{2} = 585$, ces deux sommes font 1620 ₶ ; or 9 marcs à 18 carats ou 180 ₶ font 1620 ₶, donc.

PROBLEME 75.

Un Orfévre a de l'or à 23 carats, il veut le réduire à 19 carats par alliage de cuivre rouge; combien doit-il mêler de cuivre rouge.

OPERATION.

De 23 ôtez 19 reste 4, nombre des onces de cuivre qu'il doit mêler avec 19 onces d'or pour avoir 23 onces à 19 carats.

PREUVE.

On peut supposer le carat valoir 9 ₶
19 onces à 23 carats font 3933
23 onces à 19 carats font 3933

PRO-

PROBLEME 76.

Un Fermier a une ſorte de tabac qu'il vend 35 $^{\text{s}}$ la livre, & une autre qu'il vend 4 $^{\text{tt}}$ 15 $^{\text{s}}$. On demande combien il doit prendre de chacun pour en avoir 36 livres à 55 ?

$$\text{Soit}\ \left.\begin{array}{l} a = 35^{\text{s}} \\ b = 95 \end{array}\right\} m = 55$$

$$\begin{array}{l} a = m - 20 \\ b = m + 40 \end{array}$$

$$\text{Donc} \left\{\begin{array}{l} 40\ a = 40\ m \\ 20\ b = 20\ m \end{array}\right.$$

$$40a + 20b = 60\ m$$

$$\begin{array}{r} 10a + 5b = 15\ m \\ 2a + 1b = 3\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12a + 6b = 18\ m \\ 24a + 12b = 36\ m \end{array}$$

PREUVE.

$$\left.\begin{array}{l} 24^{\text{lb}} \text{ à } 35^{\text{s}} = 42^{\text{tt}} \\ 12 \text{ à } 4^{\text{tt}}\ 15 = 57 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 36 \text{ à } 55^{\text{s}} \\ 99^{\text{tt}} \end{array}$$

$$99^{\text{tt}}$$

PROBLEME 77.

Un Capitaine de Vaisseau, de retour de la Côte de Guinée, propose de vendre à un Orfévre 12 marcs d'or.

L'Orfévre les met au creuset pour en connoître le titre; cet or se réduit à 10 marcs, au titre de 20 carats: on demande à quel titre il étoit avant de passer au creuset?

SOLUTION.

10 marcs à $20^c = 200 \mid 12$

12 = diviseur. 80 $16\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

8

PREUVE.

$16\frac{2}{3} \times 12 = 200.$

PROBLEME 78.

Un Homme veut vendre un cheval, un jardin & une maiſon, & du tout enſemble il veut 10000 ₶ ; cependant il faut que le jardin coûte 4 fois plus que le cheval, & la maiſon cinq fois plus que le jardin : On demande combien chacun ſéparément.

SOLUTION.

Soit x prix du cheval.
Donc $4x$ prix du jardin.
Donc $20x$ prix de la maiſon.
Donc $25x = 10000$ hyp.
Donc $x = 400$ prix du cheval.
1600 jardin.
8000 maiſon.

10000 ₶

PROBLEME 79.

Deux Anglois ont mangé 17 douzaines d'Huîtres, l'un en a mangé 7 douzaines plus que l'autre ; on demande ce que chacun en a mangé.

SOLUTION.

Soit $a = 17$ douzaines.

$d = 7$ douzaines.

x un des Anglois, donc

$x + d$ Second Anglois.

Or $2x + d = a$

Donc $x = \frac{a-d}{2}$

Donc $x = 5$ douz. $= 60$ huîtres.

D. $x + d = 12$ d. $= 144$ huîtres.

204[h]

L'on voit que dans les Problêmes de cette nature le plus petit nombre est toujours égal à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence, donnée, & conséquemment la plus grande est égale à la moitié de la somme plus la moitié de la différence ; parce que ces deux quantités doivent faire la somme donnée.

PROBLEME 80.

Deux pieces de vin de Malaga coûtent ensemble 500 ᵗᵗ le prix de l'une est au prix de l'autre comme 2 est à 3.

Déterminer le prix de chacune.

SOLUTION.

Soit x prix de l'une des pieces.

Donc y prix de l'autre égal $\frac{3x}{2}$.

Puisque par hyp. on a $2, 3 :: x, y$.

Or $x + \frac{3x}{2} = 500$ hyp.

Donc $2x + 3x = 1000$

Donc $5x = 1000$

Donc $x = 200$

Donc $y = 300$

PREUVE.

$200 + 300 = 500$ 1ère cond.

$200, 300 :: 2, 3.$ 2de & dere cond.

PROBLEME 81.

Une Fruitiere dit avoir vendu la moitié d'une caisse d'oranges, moins trois oranges, & qu'il lui reste à vendre les $\frac{2}{5}$ de la même caisse, plus 7 oranges. On demande combien la caisse contenoit.

SOLUTION.

$x = \frac{x}{2} - 3 + \frac{2x}{5} + 7$

Donc $x = \frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + 4$.

Donc $x = \frac{9x}{10} + 4$

Donc $10x = 9x + 40$.

Donc $x = 40$

PREUVE.

La $\frac{1}{2}$ de 40 $-$ 3 $=$	17
Les $\frac{2}{5}$ de 40 $=$	16
Le reste est - - - -	7
somme	40

PROBLEME 82.

Un Joueur entrant dans une Académie propose aux Joueurs de deviner ce qu'il avoit dans sa bourse, & se contenta de leur dire que l'excès de ses louis sur *6* étoit égal à l'excès du double de ces mêmes Louis sur 8.

SOLUTION.

Soit x nombre des louis.

Donc $x - 6 = 2x - 8$

Donc $8 - 6 = 2x - x$

Donc $2 = x$.

PREUVE.

$6 - 2 = 8 - 4$

PROBLEME 83.

Pierre dit à Paul, si j'additionne ensemble le nombre des écus que j'ai dans chaque main, il donnera un total égal au produit du nombre des écus de l'une de mes mains par le nombre des écus de l'autre.

REMARQUE.

Ce Problême n'est qu'un jeu d'Arithmétique : on peut supposer dans l'une des mains tel nombre qu'on jugera à propos, & chercher par cette équation ce que doit contenir l'autre.

Soit $a = 6$ nombre d'une main.

Soit x l'autre main.

Donc $a + x = ax$ hyp.

Donc $a = ax - x$

Donc $x = \frac{a}{a-1} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

PREUVE.

$6 + 1\frac{1}{5} = 6 \times 1\frac{1}{5} = 7\frac{1}{5}$.

PROBLEME 84.

Bon jour les 24 belles filles, dit un Aveugle à une bande de jeunes Demoiselles. Une d'entr'elles répond, nous ne sommes pas vingt-quatre ; mais si nous étions quatre fois plus, nous serions autant au-dessus de vingt-quatre que nous sommes au-dessous.

OPERATION.

x nombre des filles.

$24 - x$ excès de 24 sur le nombre des filles.

$5x - 24$ excès de 5 fois leur nombre sur 24.

Or ces deux excès sont égaux par hyp.

Donc $24 - x = 5x - 24$

Donc $48 = 6x$

Donc $8 = x$.

PREUVE.

$$24 - 8 = 40 - 24$$

$$16 = 16.$$

K v

PROBLEME 85.

Deviner combien de louis coûte une Tabatiere dont le double du prix soustrait de 18 donne un reste égal au triple de son prix, plus 3.

OPERATION.

x prix de la tabatiere.

Donc $18 - 2x = 3x + 3$.

Donc $15 = 5x$

Donc $3^{1} = x$

PREUVE.

$18 - 6 = 9 + 3$

$12 = 12$.

PROBLEME 86.

Un Epicier achete 36 Jambons 750^tt^, moins le prix que coûteront 4 Jambons : on demande de déterminer le prix de chaque Jambon.

OPERATION.

Soit x prix de chaque Jambon;

Donc $36x = 750 - 4x$

Donc $40x = 750$

Donc $4x = 75$

Donc $x = 18^{tt}\ 15^{f}$.

PREUVE.

36 Jamb. à	4 Jamb. à
18^tt^ 15^f^	18 15
675^tt^	75^tt^
ajoutez 75	
750^tt^	

PROBLEME 87.

Un Hollandois conduisant ses fils à Paris leur donne pour leurs menus plaisirs 300^tt; il donne à l'aîné 40^tt de plus qu'au cadet, & 20^tt de plus au cadet qu'au troisiéme : quelle est la part de chacun.

OPERATION.

Soit x part du troisiéme.

Donc $x + 20$ part du cadet.

$x + 60$ part de l'aîné.

Or $3x + 80 = 300^{tt}$

Donc $3x = 220$

Donc $x = 73^{tt}\ 6^{f}\ 8^{d}$.

PREUVE.

73	6	8	part du troisiéme.
93	6	8	part du cadet.
133	6	8	part de l'aîné.
300^tt	0^f	0^d.	

PROBLEME 88.

Trois Oncles aſſemblés pour favoriſer l'établiſſement d'une pauvre Niéce, forment une bourſe commune de 144 louis; le premier donne ce qu'il peut, le deuxiéme donne le triple du premier, le troiſiéme donne autant que les deux autres: quel eſt le préſent de chacun?

OPERATION.

x miſe du premier.
$3x$ miſe du ſecond.
$4x$ miſe du troiſiéme.
Or $8x = 144$ louis.
Donc $x = 18$

EXEMPLE.

18 miſe premiere.
54 miſe ſeconde.
72 miſe troiſiéme.

144 louis.

PROBLEME 89.

Un Particulier a deux Vases du Japon, & un couvercle d'argént du prix de 30ᵗᵗ; le couvercle mis sur le premier vase le fait valoir autant que le second vase, mais mis sur le second, il le fait valoir le triple du premier: On demande le prix de chaque vase?

OPERATION.

Soit x prix du premier.
Donc $x + 30 =$ le prix du 2ᵈ.
Or $x + 60 = 3\,x$ par hyp.
Donc $60^{tt} = 2\,x$
Donc $30 = x$.
Donc $60 =$ deuxiéme vase.

PREUVE.

$30^{\text{val. du vase.}} + 30^{\text{couv.}} = 60.$
$30 \times 3 = 60 + 30.$

PROBLEME 90.

Quelle heure est-il, demandoit un Quidam à Pithagore ? Ce Philosophe lui répondit : *Ce qui reste du jour est égal à deux fois les deux tiers de ce qui s'est écoulé.*

SOLUTION.

Soit x nomb. des heur. écoulées.

Donc $24 - x$ reste du jour.

Or $24 - x = \frac{4x}{3}$ hyp.

Donc $72 - 3x = 4x$.

Donc $72 = 7x$

Donc $10\frac{2}{7} = x$

Donc $13\frac{5}{7}$ reste du jour.

PREUVE.

Le double des $\frac{2}{3}$ de $10\frac{2}{7}$ est égal à $13\frac{5}{7}$.

PROBLEME 91.

Un Officier ayant perdu au Trente & Quarante, la $\frac{1}{2}$ & le $\frac{1}{3}$ de son argent ne trouva de retour chez lui que six louis dans sa bourse.

Déterminer ce qu'il avoit avant de se mettre au jeu.

OPERATION.

x argent du joueur.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 6 = x$$

Donc $x + \frac{2x}{3} + 12 = 2x$

Donc $3x + 2x + 36 = 6x$

Donc $36 = x$.

PREUVE.

$\frac{36}{2} = 18$

$\frac{36}{3} = 12$

30 perte.

$36 - 30 = 6$ reste.

PROBLEME 92.

Un Officier commandé pour un coup de main, fit partir secrétement sa troupe; un de ses amis lui demanda de combien d'hommes étoit ce détachement? Il lui répondit, *que la moitié de ce nombre, multipliée par le tiers du même nombre, faisoit* 2400 *hommes.*

OPERATION.

Soit x nombre d'hommes.

Donc $\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6} = 2400$ hyp.

Donc $x^2 = 14400$.

Donc $x = 120$.

PREUVE.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} = 60 \\ \frac{x}{3} = 40 \end{array}\right\} 60 \times 40 = 2400$$

PROBLEME 93.

Un Colonel engage un Valet-de-Chambre pour un an, & lui promet 80 ₶ & un cheval ; après six mois le Maître mécontent de ses services le renvoye en lui donnant le cheval & 20 ₶ : On demande le prix du cheval.

OPERATION.

$2x$ prix du cheval.

Donc $2x + 80$ ₶ gages d'un an.

Donc $x + 40$ gages pour 6 mois.

Or $2x + 20 =$ aussi le salaire de 6 m.

Donc $2x + 20 = x + 40$

Donc $x = 20$

Donc $2x = 40$ prix du cheval.

PREUVE.

$40 + 80 = 120$ gage d'un an.

Donc 60 gage pour six mois.

Or le cheval $+ 20$ font aussi 60 ₶.

Donc.

PROBLEME 94.

Un Colonel achete à crédit un certain nombre de Mulets pour lesquels il fait une obligation de 1000#, quelques jours après il en redemande deux au même prix, dont il fait son billet; au retour de la campagne, il en renvoye 9 au Maquignon qui les reprend sur le même pied que ceux qu'il lui a vendus, lui rend son obligation, & lui compte de plus 400# : on demande le prix & le nombre des Mulets.

OPERATION.

Soit x prix d'un Mulet.

Donc $1000^{\#} + 2x$ dette du Colon.

Donc $9x$ remise au Maquignon, laquelle par hyp. surpasse la dette de 400#.

Donc $1000^{\#} + 2x = 9x - 400$

Donc $1400 = 7x$

Donc $200 = x$.

PREUVE.

9 Mulets à
200

1800. Donc 1400# est la dette du Colonel.

Donc le Colonel a acheté 7 Mulets à deux reprises.

PROBLEME 95.

Un Colonel détache pour un coup de main 230 hommes, tant Volontaires que Grenadiers ; il leur fait distribuer en partant 990 liv. ; sçavoir 5 l. à chaque Volontaire, & 3 l. à chaque Grenadier.

Déterminer le nombre des Grenadiers & des Volontaires.

OPERATION.

Soit v Volontaires.
g Grenadiers.

Donc $v + g = 230$

Donc $v = 230 - G.$

Or $5v + 3G. = 990$ ₶

Donc $5v = 990 - 3G.$

Or $5v = 230 - G \times 5 = 1150 - 5G.$

Donc $1150 - 5G. = 990 - 3G.$

Donc $1150 - 990 = 5G - 3G.$

Donc $160 = 2G.$

Donc $80 =$ Grenadiers

Donc $150 =$ Volontaires.

PREUVE.

80 Grenadiers à	150 Vol. à
3	5
240	750
750	
990 Total.	

PROBLEME 96.

On donne de gratification aux Grenadiers Royaux 17563 ₶ à condition que cette ſomme ſera partagée entre 7 Capitaines, 17 Lieutenans & 23 Sergens; de maniere que 5 Capitaines ayent autant que 7 Lieutenans, & 9 Lieutenans autant que 11 Sergens.

SOLUTION.

$$\left.\begin{array}{l} 7\ \text{Cap.} \\ 17\ \text{Lieut.} \\ 23\ \text{Serg.} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 5\ C. = 7\ L. \\ 9\ L. = 11\ S. \end{array}\right\}\ \text{hyp. donc}$$

$$\left.\begin{array}{l} C. = \frac{7L}{5} \\ L. = \frac{11S}{9} \end{array}\right\}\ \text{Donc}$$

$$\left.\begin{array}{l} C. = \frac{77S}{45} \\ L. = \frac{11S}{9} \end{array}\right\} \text{donc} \left.\begin{array}{l} 7C = \frac{539S}{45} \\ 17L = \frac{187S}{9} \end{array}\right\}\ \text{Donc}$$

$$\frac{2509S}{45} = 17563\text{₶}\ \text{Donc}$$

$$2509 = 790335\ \text{Donc}$$

$$\begin{array}{l} S. = 315\text{₶} \\ L. = 385 \\ C. = 539 \end{array}$$

PREUVE.

1°. 7 Cap.	= 539 × 7	= 3773	
17 Lieut.	= 385 × 17	= 6545	
23 Serg.	= 315 × 23	= 7245	
			17563

2°. 5 Cap.	= 2695
7 Lieut.	= 2695

3°. 9 Lieut.	= 3465
11 Serg.	= 3465

PROBLEME 97.

Un Pere ayant le triple de l'âge de son fils s'en chagrinoit, le fils pour le consoler lui dit, *cher Pere, attendez quelques années, & vous n'aurez plus que le double de mon âge.*

Soit x âge du Fils.

Donc $3x$ âge du Pere.

Or dans un certain tems n on prétend que le Pere n'aura plus que le double de l'âge du Fils, il s'agit de déterminer le nombre des années exprimées par n

$3x + n = 2x + 2n$ hyp.

Donc $x = n$; c'est-à-dire, que tel âge qu'ait le Pere, pourvu qu'il soit triple de l'âge du fils; dans un nombre d'années égal au premier âge du fils, le Pere n'en aura plus que le double.

Soit l'âge du Pere	54
l'âge du fils sera	18

ajoutant 18 de part & d'autre, le Fils aura 36 & le Pere 72.

PROBLEME 98.

Un Pere dit à son fils, qui étudioit les Mathématiques, voici 5 louis. Si tu peux en faire deux parts, telles que la plus grande divisée par la plus petite fasse 5, je te donnerai la plus grande.

OPERATION.

$a = x + y$ 1ere hyp.

$a = \frac{x}{y}$ 2eme hyp.

Donc $x = ay$

Donc $a = ay + y$

Donc $y = \frac{a}{a+1} = \frac{5}{6}$

Donc $x = 4\frac{1}{6}$ part du fils.

PREUVE.

$4 + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 5$

$4 + \frac{1}{6}$ divisé par $\frac{5}{6} = \frac{25}{6}$ divisé par $\frac{5}{6} = \frac{25}{5} = 5$.

PRO-

PROBLEME 99.

Un Oncle dit à ſon Neveu, je te donnerai ce que j'ai de louis dans la main, ſi tu me dis ce qu'il y en a ; le quarré de ce nombre, plus 12 fois ce nombre fait 133.

SOLUTION.

Soit x nombre d'écus.

Donc $xx + 12x = 133$

Donc $xx + 12x + 36 = 133 + 36$

Donc $x + 6 = 13$

Donc $x = 13 - 6 = 7$.

PREUVE.

$7 \times 7 = 49$

12 fois $7 = 84$

133

PROBLEME 100.

Un Major doit compoſer un bataillon quarré d'hommes à centre plein, pour lequel on lui donne 3481 hommes : on demande les hommes du front ou du flanc.

OPERATION.

Soit x nomb. des hommes du front.

Donc $x^2 = 3481$ hyp.

Donc $x = \sqrt{3481} = 59$ front ou flanc.

PREUVE.

$59 \times 59 = 3481$.

PROBLEME 101.

Former un bataillon quarré à centre vuide avec le même nombre d'hommes 3481^h, mais tel que le quarré vuide ſoit de 169^h.

OPERATION.

Doublez 59 & joignez-y 1, vous aurez 119 qu'il faut ôter de 169, reſte 50 qu'il faut renvoyer au camp, & le bataillon fera montre de 3600^h quoique l'on n'ait employé que 3312.

PROBLEME 102.

Un Bataillon quarré de forme oblongue contient 1152 hommes, le nombre des hommes du front est double du nombre des hommes du flanc.

Déterminer le nombre des hommes du front, & ceux du flanc.

SOLUTION.

Soit x nombre des hommes du flanc.
Donc $2x$ nomb. des hom. du front.
Donc $2x^2 = 1152$ donc $x^2 = 576$
Donc $x = \sqrt{576} = 24$ pour le flanc & 48 pour le front.

PREUVE.

$24 \times 48 = 1152$: de plus 48 est double de 24.

PROBLEME 103.

Un bataillon en forme de quarré-long contient 4800 hommes, le nombre des hommes du front & celui des hommes du flanc fait 140 hommes.

On demande combien en front & en flanc ?

Soit x front du bataillon.

Donc $140 - x$ est le flanc, or $140 - x \times x = 4800$. Donc $140x - x^2 = 4800$

Ou bien pour rendre x^2 positif, on aura $x^2 - 140x = -4800$, & en completant le premier membre, on aura $x^2 - 140x + 4900 = 4900 - 4800 = 100$; donc $x - 70 = 10$. $x = 80$, donc le flanc est de 60.

PREUVE.

$80 + 60 = 140$
$80 \times 60 \times 4800$.

PROBLEME 104.

Former un bataillon de 1815 hommes, dont le front soit au flanc comme 5 est à 3.

OPERATION.

$x, y :: 5, 3.$

Donc $3x = 5y.$

Donc $x = \frac{5y}{3}.$

Or $xy = 1815.$

Donc $x = \frac{1815}{y}.$

Donc $\frac{5y}{3} = \frac{1815}{y}.$

Donc $5y^2 = 5445.$

Donc $y^2 = 1089.$

Donc $y = 33.$

Donc $x = 55.$

PREUVE.

$33 \times 55 = 1815.$

$5, 3 :: 55, 33 = 165.$

PROBLEME 105.

Pierre donne à sa fille les $\frac{3}{5}$ de son bien. Jean donne à son fils les $\frac{3}{4}$ du sien. La part des époux se trouve égale : on demande le bien des deux Peres.

OPERATION.

Soit x bien de Pierre,

& y bien de Jean.

Par la condition du Problême on aura $\frac{3x}{5} = \frac{3y}{4}$

Donc $4x = 5y$

Donc $x, y :: 5, 4$;

C'est-à-dire, que le bien de Jean est les $\frac{4}{5}$ du bien de Pierre.

Soit 50000 bien de Pierre. Donc 40000 bien de Jean. Donc &c.

PROBLEME 106.

Un Boucher a acheté des Moutons & des Agneaux pour 300^{tt} & le prix des Moutons multiplié par le prix des Agneaux, & divisé par la différence des deux prix, est égale au prix des Moutons : On demande le prix des Moutons & des Agneaux.

SOLUTION.

Soit x prix des Moutons.
y prix des Agneaux.
Hyp. $\frac{xy}{x-y} = x$.
Donc $xy = x^2 - yx$
Donc $2\,xy = x^2$
Donc $2\,y = x$
Donc $y = \frac{x}{2}$.

Il ne s'agit donc plus à présent que de diviser $a = 300$ en deux parties, telle que l'une soit double de l'autre.

PROBLEME 107.

Un Piqueur du Roi achete à Guibrai deux chevaux 1000 #, un Curieux, de ses amis lui demande ce qu'il a payé de chacun ; il répond *la demie du prix de l'un est égal au quart du prix de l'autre.*

OPERATION.

Soit x prix de l'un.

Donc 1000 # — x est le prix de l'autre.

Or $\frac{x}{2} = \frac{1000-x}{4}$ hyp.

Donc $4x = 2000 - 2x$

Donc $6x = 2000$.

Donc $x = 333\frac{1}{3}$ # prix de l'un.

Donc - - $666\frac{2}{3}$ prix de l'autre.

PREUVE.

La $\frac{1}{2}$ de $333\frac{1}{3}$ est - - - 166 # $\frac{2}{3}$

Le $\frac{1}{4}$ de $666\frac{2}{3}$ est - - - $166\ \frac{2}{3}$

PROBLEME 108.

Si l'on doubloit le nombre de mes écus, disoit un bon-homme, j'en donnerois *6*, ce qu'il obtint; il continua la même priere une seconde & troisiéme fois sous les mêmes conditions, mais à la troisiéme priere, il ne lui resta rien dans la poche.

Combien avoit-il d'espéces avant son premier souhait.

OPERATION.

x nomb. des piéces du bon-homme.

$2x - 6$; 1er. souhait.

$4x - 12 - 6$ 2d souhait.

$8x - 24 - 12 - 6$. 3 & d. f.

Or $8x - 42 = 0$. hyp.

Donc $8x = 42$

Donc $x = 5\frac{1}{4}$

PREUVE.

$10\frac{1}{2} - 6 = 4\frac{1}{2}$

$9 - 6 = 3$

$6 - 6 = 0$.

PROBLEME 109.

Si je vends mon Bled 15 ₶ le septier, j'acheterai une Métairie, disoit un Fermier, & j'aurai 500 ₶ de reste, mais si je ne le vends que 12 ₶ je serai contraint d'emprunter 4000 ₶. Déterminer le nombre des septiers, & le prix de la Métairie.

OPERATION.

Soit x nombre des septiers.

Donc $15x - 500 = y$. Métairie.

$12x + 4000 = y$

Donc $15x - 500 = 12x + 4000$

Donc $3x = 4500$

Donc $x = 1500$ nomb. des sept.

Donc 22000 prix de la Métairie.

PREUVE.

1500 × 15 ₶ = 22500 ₶

1500 × 12 = 18000 ₶

PROBLEME 110.

Un Tapissier dit avoir fourni 10 aunes de Damas de Caux, qu'il lui restoit de la piéce $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; on demande le nombre des aunes de la piéce.

OPERATION.

Soit x nombre des aunes de la piéce.

Donc $x = 10 + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$.

Donc $x = 10 + \frac{7x}{12}$.

Donc $12x = 120 + 7x$

Donc $5x = 120$

Donc $x = 24$

PREUVE.

Le $\frac{1}{3}$ de 24 = 8

Le $\frac{1}{4}$ de 24 = 6

Ces deux fractions font 14

qui jointes à - - - 10

font - - - - - 24 aunes de la piéce.

PROBLEME III.

Un Pelerin de S. Jacques y ayant fait trois voyages, dit qu'au premier il avoit doublé son argent & dépensé 20#; qu'au second voyage il avoit triplé ce qui lui étoit resté, & n'avoit dépensé que 27#, & qu'enfin dans le troisiéme il avoit doublé ce dernier reste, & n'avoit dépensé que 19#, & qu'il étoit retourné chez lui avec 250#. On demande avec combien d'argent il étoit parti pour le premier pelerinage.

SOLUTION.

Soit x argent au départ, donc

$2x - 20$ 1er voyage fini

$6x - 60 - 27$ 2eme voyage

$12x - 120 - 54 - 19$. 3e & d. v.

qui se réduit à $12x - 193 = 250$. hy.

Donc $x = \frac{443}{12} = 36\frac{11}{12}$; c'est-à-dire qu'il avoit en partant 36# 18f 4d.

Preuve du Problême précédent.

36^{tt}	18^{s}	4^{d}
36	18	4
73,	16,	8
20		
53^{tt},	16,	8
		3
161,	10,	0
27		
134,	10,	0
		2
269	0	0
19		
250		

PROBLEME 112.

Un Entrepreneur de travaux a pris un Mineur pour 60 jours, à condition de lui donner 40^f tous les jours qu'il travaillera ; mais que les jours qu'il ne travaillera point, il lui retiendra 5^f : or au bout de 60 jours ils soldent de compte ; le Mineur ne reçoit que 48tt. On demande de déterminer les jours de travail.

OPERATION.

Soit x jours de travail.
y jours de repos.
Donc $40x$ paye des jours de travail.
$5y$ retenue des jours de repos.
Or $40x - 5y = 48^{tt} = 960$ fols.
Or $x + y = 60$ jours.
Donc $x = 60 - y$
Donc $40x = 2400 - 40y$
Donc $2400 - 40y - 5y = 960$
Donc $480 - 8y - y = 192$
Donc $288 = 9y$
Donc $y = 32$
Donc $x = 28$

PREUVE.

32^{f} à $5^{f} = 8^{tt}$
28 à $2^{tt} = 56$
Or $56 - 8 = 48$.

PROBLEME 113.

Un Entrepreneur prend deux Ouvriers à la journée, il donne au premier 7 liv. par jour, au deuxiéme 2 liv. 10 ſ. le premier jour, 3 liv. le deuxiéme jour, 3 liv. 10 ſ. le troiſiéme jour, en augmentant toujours de 10 ſ. On demande le tems qu'ils employeront tous deux, pour recevoir de l'Entrepreneur une ſomme égale.

Solution.

Soit x nombre des journées de chacun.

$140^{f} = 7^{tt}$ gain par jour du premier.

Donc $140\,x$ gain du premier pour toutes ſes journées.

50^{f} gain du ſecond ouvrier pour le premier jour.

Or $x - 1 \times 10^{\text{fols}} = 10x - 10$.

$10x - 10 + 50 = 10x$ par propriété des progreſſions Arithmétiques; or $10x + 40 + 50 \times \frac{x}{2} = \frac{10x^2 + 90x}{2} = 5x^2 + 45x$, ſomme du deuxiéme pour toutes ſes journées; or cette ſomme eſt égale à celle du premier par hyp. Donc.

$5x^2 + 45x = 140x$, donc $5x + 45 = 140$. Donc $x + 9 = 28$. Donc $x = 19$ nombre des journées de chacun. *Preuve.*

$19 \times 7 = 133$.

19 à 50^{f} & 10^{f} d'augmentation par jour donnent 133^{tt} ſuivant les régles des Progreſſions.

PROBLEME 114.

Le Coureur d'un Grand-Seigneur poursuit un Domestique qui a volé son Maître, le fuyard a quatre lieues d'avance ; mais le Coureur marche deux fois plus vîte. Déterminer le chemin qu'aura fait le Coureur pour le joindre.

OPERATION.

Soit x chemin du voleur au-delà des 4 lieues d'avance, lorsque le Coureur le joint.

Donc $2x$ est le chemin du Coureur dans le même-tems.

Or le chemin total du voleur est égal à celui du Coureur, donc $4 + x = 2x$ Donc $4 = x$.

Donc le voleur sera joint à la fin de la quatriéme lieue d'après les 4 lieues d'avance.

PREUVE.

Le Coureur marchant deux fois plus vîte que le fuyard, doit avoir fait au moment de rencontre le double du chemin du fuyard, ce que la solution donne.

PROBLEME 115.

Deux Couriers partent, l'un de Paris pour Lyon, & l'autre de Lyon pour Paris : ce dernier fait par jour deux lieues de plus que le premier ; or ils se rencontrent au bout de quatre jours, & l'on suppose de Paris à Lyon 104 lieues.

On demande de déterminer le chemin de chacun au bout de 4 jours de marche.

OPERATION.

Soit x chemin du premier par jour.

Donc $x + 2$ chemin du deuxiéme le premier jour.

Donc $x + 8$ chemin du deuxiéme le quatriéme jour.

Donc $2x + 10 \times \frac{4}{2} = 4x + 20$ chemin du deuxiéme pour les 4 jours de marche.

Or le premier aura fait $4x$, mais le chemin du premier & du second fait 104 lieues, donc $8x + 20 = 104$; c'est-à-dire, $x = 10\frac{1}{2}$.

PREUVE.

Le premier en 4 jours aura fait	42[l]
Le second dans le même-tems -	62
Par la loi des progressions	
	104

PROBLEME 116.

Un Voleur fait par jour 30 lieues ; la Maréchaussée le poursuit, mais elle ne peut faire que 10 lieues le premier jour, 15 l le second jour, 20 l le 3eme &c. On demande en combien de jours elle l'atteindra.

Soit x nombre des jours requis.

Donc $30\,x$ chemin du Voleur.

$x - 1 \times 5 = 5x - 5 . 5x - 5 + 10 = 5\,x + 5$, chemin de la Maréchaussée pour le dernier jour, selon la régle des progressions Arithmétiques.

$5\,x + 15 \times \frac{x}{2} = \frac{5x^2}{2} + \frac{15\,x}{2}$ chemin total de la Maréchaussée.

Or ce chemin est égal à celui du Voleur, donc $\frac{5x^2 + 15x}{2} = 30\,x$.

Donc $5\,x^2 + 15\,x = 60\,x$

Donc $5\,x^2 = 45\,x$

Donc $x^2 = 9\,x$

Donc $x = 9$ jours ou la Maréchaussée joindra le Voleur.

PREUVE.

En neuf jours le Voleur aura fait 270 lieues, & la Maréchaussée faisant 10 lieues le premier jour, & 5 de plus chaque jour aura fait au bout de 9 jours 270 lieues.

PROBLEME 117.

Un Chat guette une Souris éloignée de 23 pieds, il s'en approche en tapinois, ne faisant par heure que 5 pieds, & la Souris s'en éloigne de 3 pieds par heure, déterminer en combien d'heures il l'attrapera.

SOLUTION.

Soit x tems requis.
Donc $5x$ chemin du Chat.
$23^p + 3x$ chemin de la Souris.
Or $5x = 23^p + 3x$.
Donc $2x = 23$
Donc $x = 11\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que le Chat attrapera la Souris en $11\frac{1}{2}$ heures.

PREUVE.

En $11\frac{1}{2}$ à 5 pieds par heure le Chat a fait $57\frac{1}{2}$ pieds.

En $11\frac{1}{2}$ à 3 pieds par heure la Souris a fait $34\frac{1}{2}$ pieds & 23 qu'elle a d'avance font $57\frac{1}{2}$.

PROBLEME 118.

Un Boucher achete d'un Fermier la $\frac{1}{2}$ des Moutons qu'il a dans sa Bergerie, & demande un $\frac{1}{2}$ Mouton par-dessus le marché ; deux autres viennent successivement faire le même marché : or ces trois Bouchers emmenent tout le troupeau entier ; on demande le nombre des Moutons, & combien chaque Boucher en a enlevé.

Soit x nombre des Moutons.

Donc $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ part du 1^er^ Boucher.

Donc $x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ 1^er^ reste $= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ part du 2^eme^ $= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.

D. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$ 2^e^ reste $= \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

$\frac{x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$ part du 3^eme^ $= \frac{x+1}{8}$.

Or $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} = \frac{7x+7}{8}$.

Or $\frac{7x-7}{8} = 8x$.

Donc $7 = x$.

PREUVE.

La $\frac{1}{2}$ de $7 + \frac{1}{2} = 4$

La $\frac{1}{2}$ de $3 + \frac{1}{2} = 2$

La $\frac{1}{2}$ de $1 + \frac{1}{2} = 1$

$\overline{7}$

PROBLEME 119.

Diviser une quantité quelconque en deux parties, telles que l'une soit en un rapport donné avec l'autre.

SOLUTION.

Soit a quantité donnée.

Soient $x, y :: b, c$.

Donc $x = \frac{by}{c}$

Donc $x + \frac{by}{c} = a$

Donc $2y + by = 2a$

Donc $y = \frac{2a}{c+b}$

Soit $a = 300$

$b = 2$

$c = 1$

$\frac{2a}{b+c} = \frac{600}{3} = 200 - y$

Donc $x = c.$

PREUVE.

$\frac{200 \times 100}{100} = 200 = x.$

PROBLEME 120.

Trouver la ſomme d'une progreſſion infinie deſcendante 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c.

SOLUTION.

Selon le *Théorème* 8 *page* 29. vous aurez cette proportion.

$$4 - 2, 2 :: 4 - 0, x.$$

Parce que le dernier terme étant l'unité diviſée par une quantité infiniment grande, donne un quotient infiniment petit qu'on peut regarder comme zéro ; on trouvera donc que $x = 8$, c'eſt-à-dire le double du premier terme, lorſque la raiſon eſt ſous-double.

Et généralement la ſomme de tous les termes d'une progreſſion décroiſſante moins le premier, eſt égale au premier terme diviſé par le dénominateur de la raiſon qui regne dans la progreſſion, moins l'unité.

Soit 36, 12, 4, 1 $\frac{1}{3}$, &c. On voit que 3 eſt le dénominateur de la raiſon ſous-triple qui régne dans cette progreſſion, donc la ſomme des termes qui ſuivent le premier eſt $\frac{36}{3-1} = \frac{36}{2} = 18$; donc toute la ſomme eſt 54.

PROBLEME 121.

Achille va dix fois plus vîte qu'une Tortue, & la Tortue a une lieue d'avance : On demande à quel point Achille l'atteindra.

SOLUTION.

Supposons que ces dixiémes, & dixiémes de dixiémes que la Tortue parcourt sont une progression descendante & infinie $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$; le tout étant évalué par le Problême précédent ne vaut que $\frac{1}{9}$ de lieue, comme Achille va dix fois plus vîte que la Tortue, lorsque la tortue aura fait ce $\frac{1}{9}$, Achile aura fait $\frac{10}{9} = 1^{l.}\ \frac{1}{9}$ c'est-à-dire qu'au $\frac{1}{9}$ de la seconde lieue Achille atteint la Tortue.

Si Achille fait par heure 3000 pas; la Tortue pendant le $\frac{1}{10}$ de la seconde lieue fera 300 pas; quand Achille fera ces 300 pas, la Tortue fera le dixiéme de $300 = 30$ pas; quand Achille fera ces 30^{p}, la Tortue fera $\frac{1}{10} = 3$; quand Achille fera ces 3 pas, la Tortue n'aura que $\frac{3}{10}$ d'avance, de sorte qu'Achille en faisant un pas l'aura passé.

300 pas.
30
3
$\frac{3}{10}$

Or 333 $\frac{3}{10}$ divisés par 3000 = $\frac{1}{9}$ de lieues + $\frac{1}{1111}$.

PROBLEME 122.

Déterminer les points de rencontres de l'aiguille des heures, & de l'aiguille des minutes.

OPERATION.

Il est évident que les faisant partir chacune du point de 12 heures, l'aiguille des minutes reviendra à ce point tandis que l'aiguille des heures marquera 1 heure, & lorsque l'aiguille des heures aura fait $\frac{1}{11}$ de la seconde heure, l'aiguille des minutes qui va douze fois plus vîte aura fait $\frac{12}{11}$, c'est-à-dire 1 heure $\frac{1}{11}$; par conséquent les deux aiguilles se rencontreront à $1^h \frac{1}{11}$ à $2^h \frac{2}{11}$ $3^h \frac{3}{11}$ $4^h \frac{4}{11}$, &c. de sorte qu'elles souffriront 11 rencontres.

PRO-

PROBLEME 123.

Des Progressions Arithmétiques.

Un Vice-Roi du Pérou de retour en Espagne, achete un Palais à condition de payer la premiere année 5000 ₶, la seconde 200 ₶ de plus ; ainsi de suite pendant 11 ans.

On demande de déterminer ce qu'il payera la derniere année.

SOLUTION.

Du nombre des termes soustrayez un, multipliez ce reste par la différence qui regne dans la progression, joignez à ce produit le premier terme ; cette somme est la valeur du dernier terme de la progression Arithmétique.

OPERATION.

$11 - 1 = 10$, 10×2000 ₶ $=$ 20000 ₶; $20000 + 5000$ ₶ $= 25000$ ₶; dernier ou 11eme payement.

PROBLEME 124.

Même histoire. Les mêmes donnés qu'au Problême précédent, mais on demande le prix total du Palais.

SOLUTION.

Par le Problême précédent il faut chercher la valeur du dernier terme ; puis joindre ce dernier terme au premier, & multiplier le tout par la demi du nombre des termes, ce sera la somme des termes de la progression; c'est-à-dire, le prix total du Palais du Vice-Roi.

OPERATION.

25000 ₶ - - dernier terme.
5000 - - premier terme.
$30000 \times 5\frac{1}{2}$ demi du nombre des termes.

$30000 \times 5\frac{1}{2} = 165000$, prix du Palais payé en 11 années de tems.

PROBLEME 125.

Même Problême, mais les donnés sont :

p	$=$	5000^{tt}	premier terme.
r	$=$	2000^{tt}	rapport ou differ.
ω	$=$	25000^{tt}	dernier terme.
n	$=$	x - -	nomb. des termes.
s	$=$	y - -	sommes de termes.

SOLUTION.

Il s'agit de déterminer le nombre des termes. Pour y parvenir, du dernier soustrayez le premier, divisez le reste par le rapport ou la différence, augmentez d'un le quotient qui en résultera ; ce sera le nombre des termes requis.

OPERATION.

$25000^{tt} - 5000^{tt} = 20000^{tt}$, $\frac{20000}{2000} = 10$; $10 + 1 = 11$. nombre des termes.

PROBLEME 126.

Même hypothèse. Les donnés sont les termes suivans :

$p = 5000^{tt}$ premier terme.
$r = 2000^{tt}$ différence.
$\omega = 25000^{tt}$ dernier terme.
$n = 11$ - - nomb. des termes.
$s = y$ - - som. à déterminer.

OPERATION.

Par le Problême précédent cherchez le nombre des termes ; puis joignez ensemble le premier & le dernier terme qui sont donnés, multipliez-en la somme par la demi du nombre des termes, le produit sera la somme requise.

EXEMPLE.

$25000^{tt} + 5000^{tt} = 30000^{tt}$;
$30000^{tt} \times \frac{11}{2} = 165000^{tt}$;

PROBLEME 127.

Même hypothèse. Les donnés sont les termes suivans.

s = 165000ᵗᵗ somme des termes.
p = 5000ᵗᵗ premier terme.
r = 2000ᵗᵗ rapport ou differ.
n = x - nomb. des termes.
ω = y - dernier terme.

SOLUTION.

1°. Joignez ensemble { le quarré du prix de la premiere année. Le quart du quarré de la difference. Le double de la difference multipliée par la somme des termes. }

2° Soustrayez de la somme de ces trois quantités, le produit du premier terme par la differ.

3°. Extrayez la racine quarrée de ce reste.

4°. Joignez a cette racine le premier terme, & soustrayez-en la demi de la difference.

5°. Divisez le double de la somme des termes par ce reste, le quotient donnera le nombre des termes que l'on demande.

EXEMPLE.

25000000 quarré du premier terme.
1000000 quart du quarré de la dif.
660000000 doub. de la dif. × la som.
686000000
10000000 1ᵉʳ terme × la difference.
676000000 ; dont √ = 26000 ;
26000 + 5000 = 31000 ;
31000
1000 - demi difference.
30000 ; or $\frac{330000}{30000}$; doub. de la som.) 11 nomb. des termes que l'on requéroit.

PROBLEME 128.

Même hypothèse. Les donnés sont pour ce Problême.

$p =$ 5000ᵗᵗ premier terme.
$r =$ 2000ᵗᵗ dif. des termes.
$s =$ 165000ᵗᵗ somme des termes.
$n = x$ - - nomb. des termes.
$\omega = y$ - - der. t. à déterminer.

SOLUTION.

Faites une somme de ces trois quantités.

1°. Le quarré du premier terme.
2°. Le quart du quarré de la différ.
3°. Le doub. de la dif. le prix total.

De cette somme soustrayez le premier terme × la différence.

Extrayez la racine quarrée de ce reste, ôtez-en la demi de la différence, le reste est le dernier terme que l'on requiert.

EXEMPLE.

25000000 quarré du 1er terme.
1000000 quart du quarré de la dif.
660000000 doub. de la dif. × la som.
686000000
10000000 prod. du 1er t. par la dif.
676000000 Donc $\sqrt{} = 26000$, or
26000ᵗᵗ — 1000 = 25000ᵗᵗ; = ω.
dernier terme que l'on demandoit.

PROBLEME 129.

Même hypothèſe. Les donnés ſont dans ce Problême.

p = 5000ᵗᵗ premier terme.
n = 11ᵗᵗ - - nomb. des termes.
ω = 25000ᵗᵗ dernier terme.
r = x - - rapport ou différ.
s = y - - ſomme des termes.

SOLUTION.

Pour avoir le rapport ou la différence, du dernier terme ôtez le premier, diviſez le reſte par le nombre des termes moins un, le quotient donnera le requis.

EXEMPLE.

25000ᵗᵗ dernier terme.
5000ᵗᵗ premier terme.

20000; $\frac{20000}{10}$ = 2000ᵗᵗ; obſervez que 10 eſt le nombre des term. moins un; 2000ᵗᵗ = r. diff.

PROBLEME 130.

Même hypothèse. Les donnés sont les mêmes que ci-devant, mais on propose de déterminer le prix du Palais.

SOLUTION.

Pour avoir la somme de la progression, joignez ensemble le 1er & le dernier terme, multipliez cette somme par le nombre des termes, & divisés ce produit par 2, le quotient est la somme requise.

EXEMPLE.

$35000 + 5000 = 30000$;
$30000 \times 11 = 330000$;
$\frac{330000}{2} = 165000$; = *s.* somme demandée.

PROBLEME 131.

Même hypothèse. Les donnés sont les termes suivans.

$p = 5000^{tt}$ - premier terme.
$n = 11^{tt}$ - - nomb. des termes.
$s = 165000^{tt}$ somme des termes.
$r = x$ - - différence.
$\omega = y$ - - dernier terme.

SOLUTION.

Pour déterminer 1°. le rapport ou la différence prenez le double de la somme ; soustrayez-en le double du premier terme $\times$ le nombre des termes, & divisez ce reste par le quarré du nombre des termes moins le nombre des termes. Le quotient donnera la différence ou le rapport Arithmétique requis.

EXEMPLE.

$165000^{tt} \times 2 = 330000$.
$5000 \times 2 \times 11 = 110000$;
$330000 - 110000 = 220000$;
$11 \times 11 = 121$; $121 - 11 = 110$;
$\frac{220000}{110} = 2000 = r$, rapport ou différence requise en cet exemple particulier.

PROBLEME 132.

Même hypothèse. Les donnés étant les mêmes qu'au Problême 131. Déminer la valeur du dernier terme.

Solution générale.

Doublez la somme, divisez-la par le nombre des termes, ôtez-en le premier terme le reste sera le requis.

Application.

$165000^{tt} \times 2 = 330000^{tt}$;
$\frac{330000^{tt}}{11} = 30000^{tt}$;
$30000^{tt} - 5000^{tt} = 25000^{tt} = \omega$ dernier terme requis numériquement.

PROBLEME 133.

Même hypothèse. Les donnés sont les termes suivans.

p = 5000# 1er t. ou 1er payement.
u = 25000# dern. t. ou dern. pay.
s = 165000# som. des term. ou prix du Palais.
r = x - - excès ou différences des payemens
n = y - - nombre des termes ou des payemens progressifs.

Déterminer 1°. la différence.

Solution générale.

Du quarré du dernier terme soustrayez le quarré du premier terme, divisez ce reste par le double de la somme des termes, moins la somme du premier & du dernier.

Application particuliere.

$25000 \times 25000 = 625000000$,
$5000 \times 5000 = 25000000$,
$625000000 - 25000000 =$
600000000,
$165000 \times 2 = 330000$,
$25000 + 5000 = 30000$,
$330000 - 30000 = 300000$:
or $\frac{600000000}{300000} = 2000 = r$. rapport ou différence requise.

PROBLEME 134.

Même hypothèſe. Les donnés ſont les mêmes qu'au précédent Problême ; il s'agit dans celui-ci de déterminer le nombre des années du payement.

Solution générale.

Diviſés le double du prix total par la ſomme du premier & du dernier ; le quotient ſera requis.

Application.

$165000 \times 2 = 330000$;
$5000 + 25000 = 30000$,
$\frac{330000}{30000} = 11 = n$. nombre des termes.

PROBLEME 135.

Même hypothèse. Les donnés de ce Problême sont.

$r = 2000$ ₶ rapport ou accroissemens.

$n = 11$ ₶ - nombre des termes.

$u = 25000$ ₶ dernier terme.

Déterminer le premier terme.

Solution générale.

Au dernier terme joignez le rapport, soustrayez-en le rapport multiplié par le nombre des termes.

Application.

25000 ₶ $+ 2000 = 27000$ ₶,

2000 ₶ $\times 11 = 22000$,

$27000 - 22000 = 5000$ ₶ $= p$ premier terme.

PROBLEME 136.

Même hypothèse. Les donnés sont les mêmes qu'au Problême précédent ; mais on propose de déterminer la somme des termes de la progression.

Solution générale.

1°. Au produit du rapport par le nombre des termes divisé par deux, joignez le produit du dernier terme par le nombre des termes.

2°. Soustrayez de cette somme la demi du produit de la différence par le quarré du nombre des termes, le reste est la somme requise.

Application.

$2000 \times 11 = 22000$, $\frac{22000}{2} = 11000$, $25000 \times 11 = 275000$, $11000 + 275000 = 286000$, $2000 \times 121 = 242000$, $\frac{242000}{2} = 121000$, $286000 - 121000 = 165000 = s$. somme des termes.

PROBLEME 137.

Même hypothèse. Les donnés de ce Problême sont.

r = 2000[tt] différence.

n = 11 - - nombre des années.

s = 165000 somme de la prog.

Il s'agit de déterminer le premier terme.

SOLUTION.

A la demi de la différence joignez la somme des termes divisée par le nombre des termes, & de ce quotient soustrayez la demi - différence multipliée par le nombre des termes.

EXEMPLE.

$\frac{2000}{2} = 1000.$ $\frac{165000}{11} = 15000;$

$1000 + 15000 = 16000,$

$1000 \times 11 = 11000,$

$16000 - 11000 = 5000.$ premier terme demandé.

PROBLEME 138.

Même hypothèse qu'au précédent; mais on demande le dernier payement.

HYPOTHESE.

r = 2000# - rapport.
n = 11 - - nomb. des termes.
s = 165000 somme des termes.
ω = dernier terme qu'il faut déterminer.

OPERATION.

1°. Prenez la demi du produit du rapport par le nombre des termes.

2°. Joignez-y le quotient de la somme des termes par le nombre des termes.

3°. Soustrayez-en la demi du rapport.

EXEMPLE.

11000 = $\frac{1}{2}$ du produit de r par n.
15000 = $\frac{s}{n}$.

26000
1000 = la demi de r.
25000 = ω dernier terme.

PROBLEME 139.

Même hypothèse qu'au précédent; mais les donnés sont.

$r = 2000$ ₶
$\omega = 25000$ ₶
$s = 165000$ ₶

Il s'agit de déterminer *p.* premier terme & *n.* nombre des termes.

Pour déterminer le premier terme *p.*

1°. Prenez le quart du quarré du rapport donné.

2°. Joignez-y le produit du rapport par le dernier terme.

3°. Joignez-y de plus le quarré du dernier terme.

4°. Soustrayez-en le double du produit du rapport par la somme des termes.

5°. Extrayez la racine quarrée de ce reste.

6°. Joignez à cette racine la demi du rapport.

Application en nombres.

1000000	quart du rapport élevé au quarré.
50000000	produit du rapport par le dernier terme.
625000000	quarré du dernier terme.
676000000	somme.
660000000	double du produit du rapport par la somme.
16000000	reste.

4000	-	racine du reste ci-dessus
1000	-	demi du rapport.
5000	-	premier terme demandé.

PROBLEME 140.

Même hypothèse. Les donnés sont les mêmes qu'au Problême précédent.

$r = 2000^{\text{tt}}$ - - rapport.
$\omega = 25000$ - - dernier terme.
$s = 165000$ - somme.

L'on demande le nombre des termes.

SOLUTION.

Divisez le double de la somme donnée par la demi du rapport, augmentée du dernier terme plus la racine quarrée du quart du quarré du rapport, plus le produit du rapport par le dernier terme, plus le quarré du dernier terme. De toute cette somme il faut ôter avant l'extraction le double du produit du rapport par la somme des termes.

Application en nombres.

330000 = 2 s.

1000 - - - demi du rapport.
25000 - - - dernier terme.
26000 - - - total auquel il faut joindre la racine de la somme de ces quantités.

1000000 = $\frac{1}{4}$ du quarré du rapport.
50000000 = $r\omega$
625000000 = ω^2 quarré du dernier terme.

676000000
660000000 = 2 $r s$.

16000000 - - dont racine est 4000.

Il faut joindre ces 4000 à 26000, on aura 30000, qui doit être, comme on a dit le diviseur de 330000; on aura donc $\frac{330000}{30000} = 11 = n$. nombre des termes requis.

PROBLEME 141.

Même hypothèse qu'au précédent, mais les donnés sont.

n = 11 - - nomb. des années
ω = 25000# dern. payement
s = 165000# som. des payem.

Il faut déterminer p. premier terme, & r. rapport des termes.

OPERATION.

Pour déterminer p. 1er payement.

1°. Divisez le double de la somme des termes par le nombre des termes.

2°. Soustrayez-en le dernier terme, le reste est la valeur du 1er terme.

Application.

$330000 = 2s.$

$30000 = \frac{2s}{n}.$

$30000 - 25000 = 5000\# = \frac{2s}{n} - \omega = p.$

Le premier terme est donc 5000#.

PROBLEME 142.

Même hypothèse. Les donnés sont les mêmes qu'au précédent Problême. On demande le rapport.

$n = 11$ - - nombre des termes.
$\omega = 25000$ dernier terme.
$s = 165000$ somme des termes.
$r = x$.

SOLUTION.

1°. Du double du produit du dernier terme par le nombre des termes, soustrayez le double de la somme des termes.

2°. Divisez ce reste par le quarré du nombre des termes.

Application en nombre.

$550000 = 2\omega n$
$330000 = 2s.$

220000

$121 - 11 = 110 = n^2 - n.$

$\frac{220000}{110} = 2000 = r$, rapport requis.

PROBLEME 143.

Des Progressions Géométriques.

Un Arithméticien s'engage à travailler à une discussion de Banqueroute, & promet de la finir en six mois, pourvû qu'on lui donne 5 # le premier mois, 10 # le second mois, 20 # le troisiéme mois; ainsi de suite, ce qui forme une progression Géométrique dont le premier terme $p = 5$

Le rapport ou la raison des termes - - - - -	r	$= 2$.
Le nombre des termes de la progression - - -	n	$= 6$
Le dernier terme - - -	ω	$= x$
La somme des termes - -	s	$= y$.

Il s'agit donc de déterminer le dernier terme & la somme des termes, ce qui forme deux Problêmes.

SOLUTION.

Pour déterminer le dernier terme.

Il faut multiplier le premier terme par le rapport élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un. Il faut donc élever 2 à la 5e puissance, & multiplier cette puissance par le 1er terme 5, on aura le 6ème terme que l'on regarde ici comme le dernier.

OPERATION.

2 élevé à la 5e puissance donne 32;
32 × 5 1er terme donne 160, = ω
ou dernier terme.

PROBLEME 144.

Même exposé qu'au précédent Problême, mais il s'agit de déterminer la somme des termes de la progression.

Les donnés du Problême sont :

p = 5 - - premier terme
n = 6 - nombre des termes
r = 2 - rapport ou raison
ω = 160 dern. t. par le Prob. 1r
s = y somme des termes qu'il s'agit de déterminer dans ce Problême par le moyen des *donnés*.

SOLUTION.

Il faut multiplier le 1er terme par le rapport élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes, & de ce produit ôter le 1er terme, puis diviser ce reste par le rapport moins l'unité.

OPERATION.

2 élevé à la 6e puis. donne 64
64 mult. par 5. 1er t. donne 320
320 moins 5 1er terme donne 315
315 divisé par 2 — 1 donne 315
somme requise.

PRO-

PROBLEME 145.

Même exposé qu'au premier Problême, mais les donnés sont:

p = 5 - premier terme.
r = 2 - rapport.
ω = 160 dernier terme.
n = x - nombre des termes.
s = y - somme des termes.

C'est donc ici le nombre des termes, & la somme que l'on cherche à connoître, en nombre ce qui forme deux Problêmes ou deux cas.

SOLUTION.

Pour déterminer le nombre des termes prenez le Logarithme du dernier terme divisé par le premier terme, & divisez ce quotient par le Logarithme du rapport, les entiers de cette division augmentez de l'unité donneront le nombre des termes.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{160 \text{ dernier terme}}{5 \text{ premier terme}}\end{array}\right\} 32 \text{ quotient.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Le Log. de } 32 \text{ est } \dfrac{1.5051500}{0.3010300} \\ \text{Le Log. de } 2 \text{ est}\end{array}\right\} 5 \text{ quot.}$$

$5 + 1 = 6$. nombre des termes demandés.

PROBLEME 146.

Même exposé que ci-devant, mais on demande de déterminer la somme des termes de la progression.

p	=	5	premier terme.
r	=	2	rapport.
ω	=	160	dernier terme.
n	=	6	nombre des termes.
s	=	y	somme des termes.

SOLUTION.

Pour déterminer la valeur numérique de s, multipliez le dernier terme par le rapport, soustrayez de ce produit le premier terme, divisez ce reste par le rapport moins l'unité.

Le quotient sera la somme requise.

OPERATION.

$160 \times 2 = 320$; $320 - 5 = 315$; $\frac{315}{2-1} = \frac{315}{1} = 315$, somme requise.

PROBLEME 147.

Même exposé qu'au Problême premier, mais les donnés sont:

$p = 5$ - premier terme.
$r = 2$ - rapport.
$s = 315$ - somme de la prog.
$n = x$ - nombre des termes.
$\omega = y$ - dernier terme.

On demande ici le nombre des termes & le dernier terme, ce qui fournit deux cas ou deux Problêmes.

SOLUTION.

Pour déterminer le nombre des termes, il faut multiplier la somme des termes par le rapport, & joindre à ce produit le premier terme, puis en ôter la somme des termes, & diviser ce reste par le premier terme; enfin diviser le Logarithme de ce quotient par le Log. du rapport.

OPERATION.

$315 \times 2 = 630$, $630 + 5 = 635$;
$635 - 315 = 320$, $\frac{320}{5}$ L. 64.

Le Log. de 64 est $\frac{1.8061800}{0.3010300} = 6 = n$
Le Log. de 2 est

c'est-à-dire que 6 est le nombre des termes.

PROBLEME 148.

Même exposé qu'au précédent Problême, mais on demande le dernier terme ω.

SOLUTION.

p	$=$	5 -	1er terme de la prog.
r	$=$	2 -	rapport ou raison.
n	$=$	6 -	nombre des termes.
s	$=$	315	somme des termes.

Ceci donné on aura le dernier terme, en multipliant la somme des termes par le rapport, & joignant à ce produit le premier terme; puis de cette somme soustrayant la somme des termes, & divisant enfin ce reste par le rapport.

OPERATION.

$315 \times 2 = 630$; $630 + 5 = 635$; $635 - 315 = 320$; $\frac{320}{2} = 160 = \omega$ dernier terme.

PROBLEME 149.

Même exposé qu'au premier Problême, mais les donnés sont :

$p = 5$ - - premier terme.

$n = 6$ - - nombre des termes.

$\omega = 160$ - dernier terme.

Il s'agit dans ce Problême de déterminer numériquement le rapport r, & la somme s.

Déterminer le rapport r.

SOLUTION.

Divisés le dernier terme par le premier ; puis extrayez de ce quotient une racine d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un.

OPERATION.

$\frac{160}{5}$. 32 $\sqrt[5]{32} = 2$. Cette opération se fait plus aisément par les Logarithmes : divisez le Logarithme de 32 qui est 1. 5051500 par 5, nombre des termes moins un, vous aurez 0. 3010300 ; Logarithme de $2 = r$, rapport en question dans ce Problême.

PROBLEME 150.

Même exposé qu'au précédent ; mais il s'agit de déterminer la somme des termes de la progression.

p	=	5	-	premier terme.
n	=	1	- -	nombre des termes.
ω	=	160	-	dernier terme.
r	=	2	-	rapport.
s	=	x	- -	somme des termes.

La somme de cette progression se déterminera.

1°. En divisant le dernier terme par le premier & tirant de ce quotient une racine d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un.

2°. En multipliant cette racine par le dernier terme, & soustrayant de ce produit le premier terme.

3°. En divisant ce reste par un diviseur que l'on trouvera ainsi.

Divisez le dernier terme par le premier, puis extrayez une racine d'autant de degrés qu'il y a de termes moins 1, & soustrayez de cette racine 1.

OPERATION.

$\frac{160}{5} = 32$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $160 \times 2 = 320$, $320 - 5 = 315$.

Pour avoir le Diviseur, prenez $\frac{160}{5} = 32$ puis $\sqrt[5]{32} = 2$; enfin $2 - 1 = 1$: divisez 315 par 1 vous aurez $315 = s$, somme requise.

Pour avoir la $\sqrt[5]{32}$, il faut diviser le Logarithme de 32, qui est 1.5051500, par 5, on aura 0.3010300 qui dans les tables répond à 2.

PROBLEME 151.

Même exposé qu'au premier Problême, mais les donnés sont :

$p = 5$ - - premier terme.
$n = 6$ - - nombre des termes.
$s = 315$ -
$r = x$ - - rapport.
$\omega = y$ - - dernier terme.

Ce Problême expose deux inconnus à déterminer, ce qui forme deux cas dont on va résoudre ici le premier.

OPERATION.

Souſtrayez de la ſomme des termes le premier, & diviſés ce reſte par le premier terme, ce quotient eſt l'un des deux membres d'une équation dont l'autre nombre eſt la ſomme des termes diviſée par le premier, & multipliée par le rapport inconnu : mais le rapport inconnu élevé à une puiſſance d'autant de degrés qu'il y a de termes, on aura donc cette équation $\frac{s-p}{p} = \frac{s}{p} x - x^n$; c'eſt-à-dire, $\frac{315-5}{5} = \frac{315}{5} x - x^6$, qui ſe réduit à $62 = 63 x - x^6$, il ne s'agit que d'aſſigner à x diverſes valeurs, juſqu'à ce que $63 x - x^6 = 62$.

On trouvera que donnant à x, 2 pour valeur, on aura $63 x = 126$, & $x^6 = 64$, qui ſouſtrait de 126, donnera 62 ; ce qui prouve que 2 eſt la vraye valeur du rapport requis.

PROBLEME 152.

Même exposé qu'au précédent ; mais on requiert le dernier terme ω, les donnés sont :

$p = 5$ - - premier terme.
$n = 6$ - - nombre des termes.
$s = 315$ - somme des termes.
$r = 2$.
$\omega = y$ - - dernier terme.

SOLUTION.

Elevez le rapport à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un, & multipliez cette puissance par le premier terme de la progression.

OPERATION.

$r^{n-1} = r^5 = 32$, $32 \times 5 =$ $160 = \omega$. dernier terme.

PROBLEME 153.

Même exposé qu'au premier, mais les donnés sont :

$p = 5$ - - premier terme.
$\omega = 160$ - dernier terme.
$s = 315$ - somme des termes.
$r = x$ - - rapport.
$n = y$ - - nombre des termes.

Déterminer le rapport r.

SOLUTION.

On requiert le rapport r, & le nombre déterminé n.

De la somme des termes soustrayez le premier, & divisez ce reste par la somme des termes moins le dernier.

OPERATION.

$$r = \frac{315-5}{315-160} = \frac{310}{155} = \frac{62}{31} = 2.$$

PROBLEME 154.

Même exposé qu'au précédent, mais il faut déterminer ici le nombre des termes.

$p = 5$ - - premier terme.
$u = 160$ - dernier terme.
$s = 315$ - somme des termes.
$r = 2$ - - rapport.
$n = y$ - - nombre des termes.

SOLUTION.

Divisez le dernier terme par le premier, vous trouverez une quantité qui doit être le premier membre d'une équation dont l'autre membre est le rapport 2, élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes moins 1; de sorte qu'il ne s'agit plus que d'élever 2 à telle puissance qu'elle devienne égale à ce premier membre, le nombre des degrés de cette puissance plus 1 donnera le nombre des termes que l'on cherche.

OPERATION.

$\frac{160}{5} = 32 = 2$ élevé à la cinquiéme puissance donc il y a six termes; mais pour abréger, il faut chercher dans les tables des Logarithmes le Logarithme de 32, & le diviser par le Logarithme de 2, le quotient sera 5, = le nombre des termes moins 1. Donc il y a 6 termes.

$$\frac{\text{Log. } 32 = 1.5051500}{\text{Log. } 2 = 0.3010300}\ 5 = n - 1.$$

$$n = 6.$$

PROBLEME 155.

Même exposé qu'au premier, mais les donnés sont :

$r = 2$ - - rapport.
$n = 6$ - - nombre des termes.
$\omega = 160$ - dernier terme.
$p = x$ - - premier terme.
$s = y$ - - somme des termes.

Il s'agit donc de déterminer ici le premier terme & la somme des termes ; ce qui fournit, à l'ordinaire, deux Problêmes.

SOLUTION.

Pour déterminer le premier terme il faut diviser le dernier terme par le rapport élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un, le quotient est le requis.

OPERATION.

$\frac{160}{32} = 5 =$ premier terme demandé ; observez que 32 est 2 élevé à la cinquiéme puissance.

PROBLEME 156.

Même exposé que ci-devant, mais il s'agit de déterminer la somme des termes.

Les donnés sont :

$r = 2$ - - rapport des termes.
$\omega = 160$ - dernier terme.
$n = 6$ - - nombre des termes.
$p = 5$ - - premier terme.

SOLUTION.

Il faut multiplier le dernier terme par le rapport, & de ce produit ôter le premier terme, & diviser ce reste par le rapport moins l'unité, le quotient est la somme requise.

OPERATION.

$160 \times 2 = 320$; $320 - 5 = 315$, $\frac{315}{2-1} = 315 = s$. somme des termes que l'on avoit à déterminer.

PROBLEME 157.

Même exposé, mais les donnés sont :

$r = 2$ - - rapport.
$n = 6$ - - nombre des termes.
$s = 315$ - somme des termes.

Il faut déterminer ici le premier & le dernier terme, ce qui fournit à l'ordinaire, deux cas dont on va résoudre le premier.

SOLUTION.

Pour donc déterminer le premier terme multipliez la somme par le rapport moins un, & divisez ce produit par le rapport élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes, en ôtant 1 de cette puissance.

OPERATION.

$315 \times 2 - 1 = 315$; $\frac{315}{64-1} = \frac{315}{63} = 5$. premier terme requis.

PROBLEME 158.

Même exposé qu'au précédent, mais il faut déterminer le dernier terme.

SOLUTION.

Les donnés sont, comme ci-devant,

$r = 2$ - rapport des termes
$n = 6$ - nomb. des termes.
$s = 315$ somme
& de plus $p = 5$ premier terme.
$\omega = y$ - dernier terme à déterminer.

On le déterminera en multipliant le premier terme par le rapport élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un.

OPERATION.

5×2 élevé à la cinquiéme puissance, c'est-à-dire 5×32 : or $5 \times 32 = 160 = \omega$. dernier terme requis.

PROBLEME 159.

Même exposé qu'au premier Problême, mais le donnés sont.

$r = 2$ - - rapport des termes.
$\omega = 160$ - dernier terme.
$s = 315$ - somme des termes.
$p = x$ - - premier terme.
$n = y$ - - nombre des termes.

Pour déterminer le premier terme.

SOLUTION.

Faites le produit du dernier terme par le rapport, joignez-y la somme des termes, soustrayez de ce total le produit de la somme par le rapport, le reste est le premier terme requis.

OPERATION.

$315, + 160 \times 2 = 635,$
$635 - 315 \times 2 = 635 - 630,$
$635 - 630 = 5.$ premier terme demandé.

PROBLEME 160.

Même expoſé qu'au premier Problême, mais les donnés ſont les mêmes qu'au 159eme.

$r \equiv 2$ - - rapport des termes.
$u \equiv 160$ - dernier terme.
$s \equiv 315$ - ſomme des termes.
$p \equiv x$ - - premier terme.
$n \equiv y$ - - nombre des termes à déterminer.

SOLUTION.

La ſolution eſt la même qu'au 154eme Problême ; parce que les donnés ſont les mêmes.

PROBLEME 161.

Même exposé qu'au premier, il ne différe que par les donnés qui sont:

$n = 6$ - - nombre des termes.
$\omega = 160$ - dernier terme.
$s = 315$ - somme des termes.
$r = x$ - - rapport.
$p = y$ - - premier terme.

Le rapport & le premier terme sont ici à déterminer.

Pour avoir le rapport il faut prendre la somme de la progression pour numérateur, & le dernier terme pour dénominateur, & réduire cette fraction à moindre terme ; puis extraire la racine du dénominateur d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un.

OPERATION.

$\frac{315}{160} = \frac{63}{32}$, extrayez la racine cinquiéme de 32, ce qui est très-facile par les Logarithmes ; prenez le Logarithme de 32 qui est 1.5051500, divisez-le par 5, vous aurez 0.3010300, qui dans les tables répond à 2.

PROBLEME 162.

Même exposé, les mêmes donnés qu'au 161^e, & de plus le rapport étant connu, déterminer le premier terme.

$n = 6$ - - nomb. des termes.
$u = 160$ - dernier terme.
$s = 315$ - sommes de termes.
$r = 2$ - - rapport.
$p = y$ - - premier terme à dét.

SOLUTION.

Divisés le dernier terme par le rapport élevé à une puissance d'autant de degrés qu'il y a de termes moins un.

OPERATION.

$\frac{160}{32} = 5 = p$. premier terme qu'il falloit déterminer.

La solution de ces Problêmes sur les progressions, dépend, comme l'on voit de quelques formules qui sont du ressort d'une théorie complette. On peut voir dans les Elémens de M. l'Abbé de la Caille, la formule générale des progressions Arithmétiques.

PROBLEME 163.

Un Banquier a 100000# en Billets de Banque qui perdent sur la place les $\frac{4}{5}$, mais s'il portoit à la Monnoye en vieilles espéces le triple de la valeur de ces billets : on lui donneroit 400000# en nouvelles espéces.

Il s'agit de déterminer ne pouvant trouver d'espéces ce qu'il doit fondre, afin qu'il n'ait en espéces que le triple de la valeur des Billets restans.

x valeur des Billets à fondre dont il n'aura en argent que $\frac{x}{5}$; or $\frac{x}{5}$ est triple de la valeur des Billets restans qui sont $100000 - x$.

Donc $\frac{x}{5} = 300000 - 3x$

Donc $x = 1500000 - 15x$

Donc $1500000 = 16x$.

Donc $x = 93750$, valeur des Billets à fondre, dont il ne retirera en argent que 18750#, triple de 6250, restant de ses Billets.

Il retirera donc de ces 100000# 25000#; c'est-à-dire, 5000 de profit qu'il auroit perdu s'il avoit fondu tous ses Billets ; puisqu'il n'en auroit tiré que 20000# en espéces.

PROBLEME 164.

Vingt personnes ont dépensé 20 écus ; sçavoir :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Les hommes, } h = 6^{\text{₶}}\\ \text{Les femmes, } f = 4^{\text{₶}}\\ \text{Les valets, - } v = 1^{\text{₶}}\end{array}\right\} 3^{\text{₶}} = m$$

On propose de déterminer le nombre des hommes, des femmes & des valets.

Faites ces équations dans lesquelles on allie le prix moyen avec un moindre & un plus grand.

$$\left.\begin{array}{l} h = m + 3 \\ v = m - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2h = 2m + 6 \\ 3v = 3m - 6 \end{array}\right\} 2h + 3v = 5m$$

$$\left.\begin{array}{l} f = m + 1 \\ v = m - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2f = 2m + 2 \\ v = m - 2 \end{array}\right\} 2f + v = 3m$$

Donc $2h + 2f + 4v = 8m$; donc $h + f + 2v = 4m$; donc $5h + 5f + 10v = 20m$.

PREUVE.

5 hommes à $6^{\text{₶}}$ font	10 écus
5 femmes à $4^{\text{₶}}$ font	6 écus & $2^{\text{₶}}$
10 valets à - $1^{\text{₶}}$ font	3 écus & $1^{\text{₶}}$
20 hommes.	20 écus.

PROBLEME 165.

Deux Marchands font venir du vin d'Orléans par le canal de Briare.

Le premier 20 muids.

Le second 60 muids.

Le premier donne pour son péage 2 muids, & le Commis lui rend 4^{tt} en argent.

Le second donne 5 muids & 5^{tt} en argent.

Déterminer le prix du muid & le droit de péage par muid.

SOLUTION.

Soit x prix du muid. Donc
$2x - 4^{tt}$ péage du 1^{e} p. ses 20 muids.
$5x + 5^{tt}$ péage du 2^{e} p. ses 60. muids.
Soit y droit de péage par muid. Donc
$20y$ péage du premier pour 20 muids.
$6y$ péage du 2^{e} pour 60 muids. Or
$2x - 4^{tt} = 20y$, donc $x = \frac{20+4}{2} = 10y + 2^{tt}$.
$5x + 5^{tt} = 60y$, donc $x = \frac{60y-5}{5} = 12y - 1^{tt}$.
Donc $10y + 2 = 12y - 1$. Donc $3^{tt} = 2y$, donc $y = 1^{tt}\ 10^{f}$.
Donc $x = 12y - 1 = 17^{tt}$, prix du muid, & $1^{tt}\ 10^{f}$ droit par muid.

PREUVE.

20 muids à 1 ₶ 10 ſ par muid de droit ſont 30 ₶.

Or il donne deux muids, à 17 ₶ ſont 34 ₶ ; c'eſt-pourquoi on lui rend 4 ₶ en argent.

60 muids à 1 ₶ 10 ſ ſont 90 ; or il donne 5 muids à 17 ₶, c'eſt 85 ₶ ; il doit donc donner 5 ₶.

PRO-

PROBLEME 166.

Le Fermier d'un Bac a reçu 46 ₶ 10 f pour une semaine, à raison de
2 f - - - pour une voiture.
1 f - - - pour un homme à cheval.
0 6 d - pour un piéton.

Or il a mis à part ce qu'il a reçu de ces trois espéces de passagers, & il a trouvé,

3 Voituriers contre 7 Cavaliers, &
5 Cavaliers contre 8 Piétons.

Déterminer combien de chacun a passé le Bac.

OPERATION.

v. voituriers x nomb. des voituriers,
c. cavaliers. or $x, c :: 3, 7$. donc $x = \frac{7x}{3} = c$.

p. piétons. Or $\frac{7x}{3}, p :: 5, 8$. Donc $\frac{56x}{15} = p$. on a donc ces expressions.

$v = x$ - à 2 f ou 24 d $= 24x$ arg. des v.
$c = \frac{7x}{3}$ à 1 f ou 12 d $= \frac{84x}{3} = 28x$ argent des c.
$p = \frac{56x}{15}$ à 6 d $= \frac{336x}{15} = \frac{112x}{5}$ argent des p.

Or $24x + 28x + \frac{112x}{5} = \frac{372x}{5} =$ 46 ₶ 10 f $= 930$ f & 930 f $= 11160$ d $= \frac{55800}{5}$. Donc.

$372x = 55800$, donc $x = 150\,v$.
Donc $350\,c$.
$560\,p$.

O

PROBLEME 167.

Des nombres parfaits.

Trouver tant de nombres parfaits que l'on voudra ; c'eſt-à-dire des nombres tels que la ſomme de leurs parties aliquotes forment enſemble le nombre dont elles ſont parties.

SOLUTION.

Soit cette ſuite en progreſſion double.

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

$2 \times 4 - 1 = 6$ 1^er nombre parfait
$4 \times 8 - 1 = 28$ 2^e nombre parfait
$16 \times 32 - 1 = 496$ 3^e nomb. parf.
$64 \times 128 - 1 = 8128$. 4^e n. parfait.

Il faut toujours prendre un nombre pairement pair, c'eſt-à-dire, diviſible par 2 juſqu'à l'unité, & le multiplier par le nombre qui le ſuit immédiatement diminué de l'unité.

PROBLEME 168.

Des nombres amiables.

Ce ſont deux nombres tels que chacun eſt égal à la ſomme des parties aliquotes de l'autre.

OPERATION.

	5.	11.	23.	47.	95.
Soit	2.	4.	8.	16.	32, &c.
	6.	12.	24.	48.	96.

$6 \times 12 = 72$, $72 - 1 = 71$,

$71 \times 4 = 284$.

284 eſt un des nombres amiable.

L'autre ſe trouve ainſi :

$5 \times 11 = 55$; $55 \times 4 = 220$, ſecond nombre amiable.

Les deux nombres ſont donc

284, & 220.

Les parties aliquotes de 284 ſont, 1. 2. 4. 71. 142. dont la ſomme eſt 220, & les parties aliquotes de 220 ſont, 1. 2. 4. 5. 10. 11. 20. 22. 44. 55. 110, donc la ſomme eſt 284.

PROBLEME 169.

Déterminer deux nombres entiers dont le produit ſoit le double de leur ſomme.

Soit x un des deux nombres,

& y l'autre, on aura ſelon l'hypot. $xy = 2x + 2y$; ſuppoſons que $x, y :: a, b$. Donc $bx = ay$. Donc $x = \frac{ay}{b}$, donc $xy = \frac{ay^2}{b} = \frac{2ay}{b} + 2y$ Donc $\frac{ay}{b} = \frac{2a}{b} + 2$. Donc $ay = 2a + 2b$. Donc $y = 2 + \frac{2b}{a}$: or la plus petite valeur qu'on puiſſe aſſigner à b eſt l'unité, & comme y eſt ſuppoſé entier, la moindre valeur d'a en nombre entiers eſt 2; donc $y = 3$, donc $x = 6$: or $3 + 6 = 9$, $3 \times 6 = 18$. Ce qui ſatisfait à la queſtion.

Il n'y a en nombres entiers que les deux ſeuls nombres 3 & 6 dont le produit ſoit double de leur ſomme.

On obſervera que ceci n'eſt qu'un jeu de nombre; car à la rigueur 18 pieds quarrés n'eſt pas double de 9 pieds de long.

PROBLEME 170.

Trouver tant de nombres que l'on voudra dont le produit soit double de leur somme.

SOLUTION.

Que $x, y :: 1, 3$. Donc $x = \frac{y}{3}$.
Donc $2x = \frac{2y}{3}$. Donc

$$2y = \frac{y^2}{3} = \frac{2y}{3} + 2y. \text{ Donc}$$

$$\frac{y}{3} = \frac{2}{3} + 2.$$

Donc $y = 2 + 6 = 8$.
Donc $x = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

PREUVE.

$$xy = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

$$2x + 2y = 21\frac{1}{3}.$$

Il ne s'agit que de mettre tel rapport que l'on voudra, mais on ne trouvera jamais les deux inconnus en nombres entiers.

PROBLEME 171.

Trouver un nombre qui divisé par 2. 3. 4. 6. il reste 1, & divisé par 5 il reste 4 ; enfin divisé par 7 il ne reste rien.

Faites ces opérations ; en supposant x pour le nombre inconnu.

$\frac{x}{2} = m + \frac{1}{2}$, donc $x = 2m + 1$

$\frac{2m+1}{3} = n + \frac{1}{3}$, donc $m = \frac{3n}{2}$.

Donc $x = 3n + 1$.

$\frac{3n+1}{4} = p + \frac{1}{4}$, donc $n = \frac{4p}{3}$.

Donc $x = 4p + 1$.

$\frac{4p+1}{5} = q + \frac{4}{5}$, donc $p = \frac{5q+3}{4}$.

Donc $x = 5q + 4$.

$\frac{5q+4}{6} = r + \frac{1}{6}$, donc $r = \frac{6r-3}{5}$.

Donc $x = 6r + 1$.

$\frac{6r+1}{7} = t$, donc $r = \frac{7t-1}{6} = t + \frac{t-1}{6}$; or $\frac{t-1}{6}$ doit être un nombre entier, puisque $\frac{7t-1}{6} = r$; donc la plus petite valeur qu'on puisse assigner à t est 7; donc $r = 8$, donc $x = 6r + 1 = 49$.

PREUVE.

$\frac{49}{2} = 24$ reste 1, $\frac{49}{5} = 9$ reste 4

$\frac{49}{3} = 16$ reste 1, $\frac{49}{6} = 8$ reste 1

$\frac{49}{4} = 12$ reste 1, $\frac{49}{7} = 7$ reste 0

PROBLEME 172.

Trois amis ont chacun reçu une somme telle que si le premier reçoit la moitié de la somme des deux autres, cet accroissement avec son argent fera 40 louis; si le second reçoit le tiers de la somme des deux autres, il aura aussi 40 louis; enfin si le troisiéme reçoit le quart de la somme des deux autres, il aura aussi 40 louis: on demande la somme de chacun.

SOLUTION.

1er $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = a = 40$

2^{d} $y + \frac{x}{3} + \frac{z}{3} = a$

3^{e} $z + \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = a$. Donc

A. $2x + y + z = 2a$

B. $3y + x + z = 3a$

C. $4z + x + y = 4a$. Donc

$y = 2a - 2x - z$, qu'il faut substituer dans les deux équations B & C, on aura.

$$6a - 6x - 3z + x + z = 3a$$

$$4z + x + 2a - 2x + z = 4a$$

Ces deux équations se réduisent à celles-ci.

D. $6a - 5x - 2z = 3a$

$3z - x = 2a$: or

$x = 3z - 2a.$

Substituons cette valeur dans l'équation D. on aura

$6a - 15z + 10a - 2z = 3a.$

Donc $13a = 17z$

Donc $z = \frac{13a}{17} = \frac{520}{17} = 30$ louis $\frac{10}{17}$.

Donc $x = \frac{200}{17} = 11\,\frac{13}{17}$

Donc $y = \frac{440}{17} = 25\,\frac{15}{17}$.

PREUVE.

1ere $\frac{200}{17} + \frac{220}{17} + \frac{260}{17} = 40$

2de $\frac{440}{17} + \frac{200}{51} + \frac{520}{51} = 40$

3éme $\frac{520}{17} + \frac{50}{17} + \frac{110}{17} = 40.$

PROBLEME 173.

Un Réservoir contient 100 muids d'eau, il se remplit en 9 heures par un tuyau A, & se vuide en 12 heures par un tuyau B.

On demande de déterminer en combien de tems il se remplira, le tuyau d'écoulement & celui de remplissage étant ouverts.

SOLUTION.

En 1 heure $\frac{100}{9}$ de remplissage.
En 1 heure $\frac{100}{12}$ d'écoulé. Donc
En 1 heure $\frac{1200}{108}$ de remplissage.
En 1 heure $\frac{900}{108}$ d'écoulé. Donc
$\frac{300}{108} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$. gain ou remplissage par heure les deux tuyaux ouverts; faites cette analogie.

$2\frac{7}{9}, 1^h :: 100, x = \frac{900}{25} = 36^h$.

PREUVE.

En 36^h à $\frac{100}{9}$ par heure, il a coulé par A. $36 \times \frac{100}{9} = \frac{3600}{9} = 400$ muids d'eau.

En 36^h à $\frac{100}{12}$ par heure, il s'en est perdu par B, $\frac{3600}{12} = 300$ muids. Donc il en a resté 100 dans le Réservoir.

PROBLEME 174.

La Fontaine des trois Pucelles.

Par une des mammelles de l'une des Nymphes le Réservoir se vuide en 3 heures, par une des mammelles de l'autre Pucelle il se vuide en quatre heures; enfin par la mammelle de la troisiéme il se vuide en 5 heures.

On demande en combien de tems le Réservoir sera vuidé par les trois à la fois.

SOLUTION.

x tems de l'écoulement total.
p quantité d'eau du Réservoir. Donc
$\frac{p}{3}$ dépense en 1^h de tems par 1^{re} ouver.
$\frac{p}{4}$ dépense en 1^h par 2^e ouverture.
$\frac{p}{5}$ Dépense en 1^h par 3^e ouverture.
$\frac{p}{3} + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} = \frac{47p}{60}$, dites par proportion.

Si $\frac{47p}{60}$, 1^h :: $\frac{60p}{60}$, $x = \frac{60}{47} = 1\frac{13}{47}{}^h$.

PREUVE.

En une heure de tems par les 3 ouvertures, il s'est écoulé les $\frac{47}{60}$ du Réservoir, partant reste $\frac{13}{60}$: or en $\frac{13}{47}$ de tems il s'écoule les $\frac{13}{60}$ restans; ce qui se trouve en disant:

Si 1^h, $\frac{47}{60}$ :: $\frac{13}{47}$, $y = \frac{13}{60}$.

On vient de voir que le Réservoir se vuide par trois ouvertures à la fois en $1^h \frac{13}{47}$.

On demande de déterminer la dépense de chaque robinet pendant le tems de $1^h \frac{13}{47}$.

SOLUTION.

Faites ces trois analogies.

$$1^h, \frac{60}{47} :: \left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}, x = \frac{20}{47} \\ \frac{1}{4}, y = \frac{15}{47} \\ \frac{1}{5}, z = \frac{12}{47}. \end{array}\right\} = \frac{47}{47} = 1^{\text{B}}$$

PROBLEME 175.

La Couronne d'Hyeron.

Pour déterminer l'or & l'argent pur dont le mêlange formoit la Couronne de ce Roi, Archimede prit deux lingots, chacun du même poids que la Couronne, l'un d'or & l'autre d'argent, il les plongea successivement en un vase de forme réguliere plein d'eau : Ce sçavant Géométre recueillit avec soin les trois volumes d'eau que ces trois corps firent sortir du vase, ce qui lui fournit ce raisonnement :

La différence des deux volumes d'eau des deux lingots, est au volume d'eau de la Couronne comme la différence de chacun des volumes d'eau des lingots au volume d'eau de la Couronne, est au volume d'eau que feroit sortir chacune des masses d'or & d'argent qui composent la Couronne.

Soit 48 onces poids de la couronne

$7\frac{3}{4}$ poids du volume qui fait sortir un lingot d'or pur de 48 onces.

$9\frac{1}{4}$ poids du volume d'eau que fait sortir un lingot d'arg. pur de 48 onces.

8 poids du vol. d'eau que fait sortir la Couronne. Donc

$9\frac{1}{4} - 7\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ différence des deux lingots.

$8 - 7\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ dif. du vol. d'eau du lingot d'or & de la Couronne.

$9\frac{1}{4} - 8 = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ dif. du vol. d'eau du lingot d'argent & de la Couronne.

OPERATION.

$\frac{3}{2}, 8 :: \frac{5}{4}, x = \frac{20}{3}$ vol. d'eau de l'or de la Couronne.

$\frac{1}{4}, y = \frac{4}{3}$ vol. d'eau de l'arg. de la Couronne.

Il s'agit à présent de diviser 48 en deux parties, telles que l'une soit à l'autre comme 20, 4. c'est-à-dire, comme 5, 1.

Il faut diviser 48 par $5 + 1 = 6$.

On aura 8 pour les onces d'argent, & par conséquent 40 onces d'or pur.

PROBLEME 176.

Le Sommelier d'un Monastere fut convaincu d'avoir tiré d'un tonneau de 360 pintes, par trois fois de suite, 6 pintes, remettant 6 pintes d'eau pour chaque remplissage.

On lui retrancha par punition chopine chaque jour jusqu'à la concurrence du vin qu'il avoit bû.

On demande ce qu'il faut lui retrancher en total.

SOLUTION.

Soit $354 + 6$ état du tonneau après le premier remplissage.

$\frac{354+6}{60}$ 2^{eme} levée à faire, parce que 6 est la 60^{eme} de 360.

$354 + 6 - \frac{354+6}{60} = \frac{20886+354}{60}$ seconde levée faite.

$\frac{20886+714}{60}$ 2^{d} remplissage.

$\frac{20886+714}{3600}$ 3^{eme} levée à faire.

$\frac{20886+714}{60} - \frac{20886-714}{3600} =$

$\frac{1232274+42126}{3600}$ 3^{eme} levée faite.

$\frac{1232274+63726}{3600}$ 3^{e} & d^{er} remplissage

qui se réduit à $\frac{205379+10621}{600} =$

$342^{\text{p}} + \frac{179}{600}$, $17^{\text{p}} \frac{421}{600}$. Vin à retrancher au Sommelier.

PREUVE.

$\frac{354}{60} = 5\frac{9}{10}$: $354 - 5\frac{9}{10} =$
$348\frac{1}{10} = \frac{3481}{10}$.
$\frac{3481}{10}$, la 60eme est $\frac{3481}{600} = 5\frac{481}{600}$.

$\frac{9}{10} = \frac{540}{600}$.

$$\begin{array}{r} 540 \\ 481 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1021}{600} = 17\frac{421}{600}$.

Premiere levée	6	
Seconde levée	5	$\frac{9}{10}$
Troisiéme levée	5	$\frac{481}{600}$
	17	$\frac{421}{600}$.

PROBLEME 177.

J'ai mis à part une somme pour le mariage de mes filles, dit une bonne Veuve, devinez quelle est cette somme, & combien j'ai de filles à marier ?

Je donne à la premiere 1000 liv. & la cinquiéme partie de la somme mise à part les 1000 liv. prélevées ; je donne 2000 liv. à la seconde, & la cinquiéme partie de ce deuxiéme reste ; enfin à la troisiéme 3000 l. & la cinquiéme partie de ce troisiéme reste, ainsi des autres ; mais malgré tout elles sont partagées également.

OPERATION.

Soit x somme mise à part. Donc

La premiere fille aura $1000^{tt} + \frac{x-1000}{5} = \frac{4000+x}{5}$, partant il reste $x - \frac{4000-x}{5} = \frac{4x-4000}{5}$.

Or il faut en ôter 2000 reste $\frac{4x-14000}{5}$.

La 2^e fille aura donc $2000^{tt} + \frac{4x-14000}{25}$.

La part de cette 2^e fille est donc $\frac{36000+4x}{25}$.

Or par hyp. cette dot est égale à la 1^{ere} qui est $\frac{4000+x}{5} = \frac{20000+5x}{25}$.

Donc $20000 + 5x = 36000 + 4x$.

Donc $x = 16000^{tt}$.

La 1^{ere} a $\frac{4000+x}{5} = \frac{20000}{5} = 4000^{tt}$.

Or $\frac{16000}{4000} = 4$; donc elles étoient 4 filles, & avoient chacune 4000^{tt}.

PROBLEME 178.

Soustraction singuliere.

On propose de déterminer la différence de deux nombres dont on ignore le plus grand.

OPERATION.

1°. Prenez autant de 9 que le nombre à soustraire aura de figures.

2°. Prenez la différence de ces deux nombres.

3°. Faites joindre cette différence au nombre majeur.

4°. Otez 1 du premier chiffre à gauche, & joignez-le au premier à droite, vous aurez la différence requise.

EXEMPLE.

Pierre dit qu'il devinera l'excès de ce qu'André a dans sa bourse sur la sienne.

Pierre soustrait 345# secrétement de 999#, reste 654#. Il dit à André de joindre l'argent qu'il a à cette différence, d'en ôter la premiere figure à gauche & de la joindre à la derniere figure à droite, & que cette expression est la différence exacte de ce qu'ils ont chacun dans leur bourse.

En effet, soit 345 somme de Pierre. 927 somme d'André.

Par l'opération de Pierre on a 654# qu'André doit joindre à 927#, il aura 1581#; effaçant le 1 du mille & le portant aux unités on aura 582, différence de 345# à 927#.

Autre Exemple.

Dette	9000#			999
Paye -	705			705
Reste -	8295			294
				9000
Preuve	9000			9294
			ôtez 1	8294
			à 9.	1
				8295

PROBLEME 179.

De M. Comiers.

Aveugle des Quinze-vingts.

Je fais, dit-il, en un moment, tout aveugle que je suis, ce qu'on ne peut faire qu'avec beaucoup de tems & avec plusieurs mains de papier.

Déterminer quel sera le produit d'un nombre composé de *666* chiffres *9* multipliés par *666* chiffres *6*.

Ledit Aveugle a déterminé que le produit de ces figures étoit de 1332 chiffres dont,

1°. *665* = *6* à gauche.
2°. 1 = 5 de suite.
3°. *665* = 3 de suite.
4°. 1 = 4 de suite.

1332 chiffres.

Si on multiplie *9999* par *6666* on aura *66653334*, qui répresente l'effet total du produit de Comiers.

L'Algébriste peut s'exercer à chercher la formule de Comiers.

Du Triangle de M. Pascal.

1°. Il faut pour le former poser une suite d'unités, telle qu'on les voit dans les deux premiers rangs d'équerre.

2°. Dans le second ordre posez la suite naturelle des nombres.

3°. Le troisiéme ordre se forme de l'addition de la premiere & seconde case du second ordre $1 + 2 = 3$.
$1 + 2 + 3 = 6$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

4°. Prenez dans le 3e. $1 + 3 = 4$.
$1 + 3 + 6 = 10$.
$1 + 3 + 6 + 10 = 20$. vous aurez les cases du quatriéme ordre ; & ainsi de suite pour remplir les autres cases.

Les nombres du *premier ordre* font une suite d'unités, ceux du *second ordre* forment la *progression naturelle*.

Les nombres du *troisiéme ordre* se nomme *Triangulaires*, parce que chaque case contient un nombre tel qu'on en peut former un triangle : comme on peut le vérifier avec des jettons.

Les nombres du *quatriéme ordre* se nomment *Pyramidaux* ; en eflet 4 peuvent s'arranger en une pyramide dont 3 seroit la base.

TRIANGLE ARITHMETIQUE.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Ce Triangle ingénieux ſert particuliérement dans les différentes eſpeces de combinaiſons ; il y a deux eſpeces principales de combinaiſons, la premiere eſt celle où l'on ne cherche que les différens aſſemblages de pluſieurs choſes ſans avoir égard à leurs changemens de place.

La ſeconde eſt celle où l'on a égard aux différens changemens de place, par exemple, les trois quantités *a*, *b*, *c*, priſes deux à deux ſans avoir égard aux divers changemens de places, ne ſont ſuſceptibles que de ces trois combinaſons.

a b,

a c,

b c,

Mais ſi l'on a égard aux changemens de place, ces trois quantités formeront ces ſix combinaiſons.

a b, *b a*, *c a*,

a c, *b c*, *c b*.

La maniere dont on propoſe une queſtion détermine l'eſpece de combinaiſon dont elle dépend : Si l'on demande, par exemple, le nombre des conjonctions des ſept planetes priſes deux à deux, trois à trois, &c. On voit que ces ſortes de combinaiſons ſont de la premiere eſpece ; parce que dans la conjonction de deux planetes on n'a point égard laquelle des deux eſt ſupérieure ; ainſi Mercure éclipſé par le Soleil ou le Soleil éclipsé par Mercure, ne forme qu'une conjonction.

Mais si l'on demandoit en combien de manieres différentes sept personnes peuvent se ranger autour d'une table, on voit alors qu'il faut avoir égard aux changemens de place ; par conséquent c'est une seconde espece que l'on nomme *permutations* ou *changemens d'ordre*.

La premiere conserve le nom de *combinaison simple*.

Des Combinaisons simples.

Ces combinaisons ont trois cas différens. Le premier, est lorsque l'on combine plusieurs choses différentes sans répéter la même grandeur dans un même assemblage.

Le second, est lorsqu'on peut répéter une même grandeur autant de fois dans chaque assemblage qu'elles sont prises de fois.

Enfin le troisiéme est lorsque l'on combine plusieurs grandeurs, dont quelques-unes sont égales entr'elles.

Premier cas des Combinaisons simples.

Il faut d'abord examiner combien

2, 3, 4, 5, &c. choses peuvent se combiner prises 2 à 2.

2°. Examiner combien 3, 4, 5, 6, &c. peuvent se combiner prises 3 à 3 &c.

3°. Examiner combien 4, 5, 6, 7, &c. peuvent se combiner prises 4 à 4 &c. & ainsi de suite.

Enfin rassemblant le nombre de ces combinaisons, on tirera une régle générale pour déterminer combien de fois 2, 3, 4, 5, &c. grandeurs peuvent être combinées en les prenant de toutes les façons possibles.

a & *b*, prises deux à deux ne peuvent souffrir que la seule combinaison *a b*.

a, *b*, *c*, prises deux à deux ne peuvent souffrir que les trois combinaisons *a b*, *a c*, *b c*.

a, *b*, *c*, *d*, prises deux à deux ne peuvent souffrir que les six suivantes.

a b, *a c*, *a d*,
b c, *b d*,
c d.

On trouve donc que les combinaisons de 2, 3, 4, &c. prises deux à deux sont exprimées par les nombres, 1, 3, 6, &c. qui sont les nombres

bres du troisiéme ordre du Triangle Arithmétique.

En second lieu *a*, *b*, *c*, prises trois à trois ne donnent que ces quatre suivantes : *abc*, *abd*, *acd*,
bcd.

a, *b*, *c*, *d*, *e*, prises trois à trois en donnent 10. *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*,
bcd, *bce*, *bde*,
cde,

On voit donc que 3, 4, 5, choses prises 3 à 3 donnent pour nombre de leurs combinaisons, 1, 4, 10, qui se rapportent au quatriéme ordre du Triangle Arithmétique, &c.

PROBLEME 180.

Trouver par le moyen du Triangle Arithmétique toutes les combinaisons simples de plusieurs choses prises un certain nombre de fois.

Soit par ex. *6* choses prises 3 à 3.

Je cherche dans la progression naturelle le nombre *6*, & le comptant pour un, je prens la troisiéme case diagonale où je trouve 20, qui me donne le nombre de combinaisons de *6*. choses prises 3 à 3.

Par conſéquent les ſept planetes priſes deux à deux donneront 21 combinaiſons, priſes 3 à 3, 35 combinaiſons.

Second Cas.

Dans cette ſeconde eſpece de combinaiſon, on répéte, ou plutôt on combine avec elle-même chaque grandeur, par conſéquent a & b priſes deux à deux donneront $a\,a$, $a\,b$,
$b\,b$.

C'eſt-à-dire trois différentes combinaiſons, les deux mêmes choſes priſes 3 à 3 donnent a^3, a^2b, ab^2,
b^3.

& priſes quatre à quatre donnent a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4.

D'où l'on voit que le nombre de ces combinaiſons ſuit la progreſſion naturelle.

a, b, c, priſes une à une donnent 3 combinaiſons, priſes deux à deux elles en donnent 6, trois à trois 10, qui répondent au nombre du troiſiéme ordre.

Enfin a, b, c, d, priſes une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, donnent 4, 10, 20, 35, &c. qui répondent au nombre du quatriéme ordre.

Troisiéme Cas.

Dans ce dernier cas, la ſuite des quantités données eſt compoſée de termes tous égaux, ou de termes dont quelques-uns ſont différens.

Lorſque les quantités ſont toutes égales telles que a, a, a, a, leur produit 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, ne ſont qu'un ſeul produit a^2, a^3, a^4, &c.

Si la ſuite eſt compoſée de grandeurs en parties égales & en parties inégales telles que a, a, b, b, b, les deux premieres donneront a, a^2; les trois dernieres donneront b, b^2, b^3; multipliant donc les deux premieres par b, b^2, b^3, on aura les ſix combinaiſons ſuivantes :

$$ab,\ a^2b,\ ab^2,\ a^2b^2,\ ab^3,\ a^2b^3.$$

auquel ajoutant a^2, b^2, b^3. on aura 9 combinaiſons, & ſi l'on y joint les deux quantités ſimples a & b, & on aura en tout 11 combinaiſons.

Pour trouver ce nombre ſans être obligé de les faire, écrivez les cinq grandeurs données a, a, b, b, b.

Prenez 3 pour les deux premieres a, a. multipliez-le par le nombre des ſuivantes ; c'eſt-à-dire par 3, vous aurez 9. Joignez-y le nombre des diverſes eſpéces qui ne ſont que deux, l'on aura 11 pour le nombre requis.

De même ſi l'on vouloit ſçavoir le nombre des diviſeurs de 360[d], il faudroit trouver tous ſes diviſeurs ſimples en cette maniere.

360	
180	2 div.
90	2
45	2
15	3
5	3
1	5

Vous trouverez trois 2, deux 3, & un 5, qui ſont ſix diviſeurs ſimples.

Prenez 4 pour les trois premiers diviſeurs ſimples, multipliez-le par 2 pour les deux ſeconds diviſeurs ſimples, on aura 8, joignez-y 4 pour les trois premiers diviſeurs, vous aurez 12, joignez-y 4 & 8 vous aurez 24. nombre des diviſeurs de 360, qui ſont tous exprimés page 54.

Des Permutations ou changemens d'ordre.

Les permutations, de même que

les combinaiſons dont nous venons de parler, ont trois différens cas.

Le premier, eſt lorſque chaque grandeur ne ſe combine pas avec elle-même.

Le ſecond eſt lorſque chaque grandeur peut ſe combiner avec elle-même autant de fois qu'il y a de différente eſpéce d'aſſemblage.

Le troiſiéme eſt lorſqu'il ſe trouve des grandeurs égales, & des grandeurs inégales.

Premier Cas.

Il faut examiner d'abord combien de permutations peuvent former 2, 3, 4, 5, 6, &c. grandeurs ; priſes 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, &c. d'où l'on déduira une régle pour déterminer combien elles peuvent donner de combinaiſons priſes de toutes les manieres.

1°. Deux grandeurs *a* & *b* donnent les deux permutations *a b*
b a.

Trois grandeurs priſes auſſi deux à deux donnent les ſix permutations
a b, *b a*, *c a*,
a c, *b c*, *c b*.

Quatre grandeurs priſes deux à

deux en donnent 12, cinq en donnent 20, &c. de sorte qu'on trouvera que les nombres qui expriment les permutations de 2, 3, 4, 5, 6, &c. grandeurs prises 2 *a* 2 sont :

2, 6, 12, 20, 30, &c.

qu'on peut trouver de cette maniere. Soit la suite naturelle des nombres

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
	2,	6,	12,	20,	30,	42,	56,	72.

Le premier multiplié par le second donne le premier terme de la suite d'en bas ; le second multiplié par le troisiéme donne le second, & ainsi de suite.

On voit donc que 6 choses prises deux à deux formeront 30 permutations.

2°. Trois grandeurs *a*, *b*, *c* prises 3 à 3 donnent 6 permutations.

Quatre grandeurs prises 3 à 3 en donnent 24.

Cinq grandeurs prises 3 à 3 en donnent 60. de sorte que pour trouver cette suite, il faut écrire la suite dont nous venons de parler 6, 12, 20, 30, 42, &c. & la suite naturelle 1, 2, 3, 4, 5, &c. & faire les produits des termes relatifs, on aura

6, 29, 60, 120, 210.

qui expriment les permutations des grandeurs données prises trois à trois.

3°. Quatre grandeurs prises 4 à 4, donnent 24, 120, 360, &c. en continuant de multiplier par la même méthode, qu'on peut continuer aussi loin qu'on veut.

On en peut avoir une explication plus détaillée dans l'Arithmétique des Géometres de M. l'Abbé Deidier.

Second Cas.

Dans cette espéce de permutations chaque grandeur peut se répéter autant de fois que l'on veut prendre de grandeurs ensemble, ainsi *a*, *b*, *c* prises deux à deux, donneront

aa, *bb*, *cc*,
ab, *ba*, *ca*,
ac, *bc*, *cb*.

D'où l'on voit que 3 grandeurs prises 2 à 2 ont un nombre de permutations égal au nombre des grandeurs élevés à une puissance d'autant de degrés que l'on prend de choses ensemble, par conséquent 4 grandeurs prises 3 à 3 donnent 64 combinaisons, c'est à 4 élevé à la troisiéme puissance.

De même cinq grandeurs prises 4 à 4 donneront autant de combinés que 5 élevé à la quatriéme puissance, on aura 625.

Troisiéme Cas.

Dans cette derniere espéce de permutations on considere des grandeurs égales & inégales par exemples, *a*, *a*, *b*, *b*, à combiner en les prenant toutes ensemble, comme l'on fait dans les anagrammes dans lesquels on cherche les différens arrangemens des lettres d'un nom dans lequel on peut rencontrer deux mêmes lettres.

1°. Il faut observer que pour déterminer combien de fois un certain nombre de choses peuvent être combinée étant prises toute ensemble, on doit avoir recours à cette Table.

1,	2,	3	4.,	5,	6,	7,	8,	9,	&c.
1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	40320,	362880.	

qui nous indique que 4 choses ou 4 lettres d'un nom, sont susceptibles de 24 combinaisons, &c.

2°. Il faut prendre le nombre des permutations dont sont susceptibles les grandeurs égales en les supposant inégales, & faire le produit de ces nombres.

3°. Prendre le nombre des combinaisons de toutes les grandeurs considérées comme inégales, & diviser ce nombre par le produit ci-dessus par exemple : soient à combiner les 5 grandeurs *a*, *a*, *b*, *b*, *b*.

1°. *a*, *a* donnent 2 combinaisons.

2°. *b*, *b*, *b* donnent 6 combinaisons.

$6 \times 2 = 12$. diviseur.

3°. 5 choses prises ensemble donnent 120 combinaisons.

dividende $120 \,|\, \underline{12}$

10 q.

On a donc 10 combinaisons.

X REMARQUE.

Trois termes de la progression naturelle pris de suite, sont tels que les combinant ensemble on aura six rangées dont la somme divisée par le terme moyen donnera toujours 666.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l}
567 & \\
576 & \\
675 & \\
657 & \\
765 & \\
756 & \\
\hline
3996 & 6 \\
\cline{2-2}
 & 666
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
789 & \\
798 & \\
879 & \\
897 & \\
978 & \\
987 & \\
\hline
5328 & 8 \\
\cline{2-2}
 & 666
\end{array}$$

DES QUARRÉS MAGIQUES.

On nomme *Quarrés Magiques* une suite de chiffres disposés en un quarré de cellules de telle maniere que les chiffres de chaque bande tant horizontales, que verticales, & diagonales fassent une même somme.

On distingue deux sortes de Quarrés Magiques, les quarrés *pairs*, & *impairs*.

DES IMPAIRS.

Méthode de mémoire pour les quarrés impairs.

1°. Posés l'unité, & le nombre par lequel on veut commencer au-dessous de la case du milieu.

2°. Mettez les nombres suivans dans les cases descendantes diagonalement de gauche à droite.

3°. Quand on est arrivé à la derniere case diagonale remontez à la plus haute case de la bande suivante.

4°. La case diagonale venant à manquer, transportez le chiffre suivant dans la case la plus éloignée à gauche de la bande inférieure.

5°. Si vous rencontrez en suivant

la diagonale une case remplie ; partez de cette case & placez le chiffre dans la diagonale de droite à gauche.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

11	24	7	20	3	65
4	12	25	8	16	65
17	5	13	21	9	65
10	18	1	14	22	65
23	6	19	2	15	65
65	65	65	65	65	65

Autre maniere.

Fig. 1

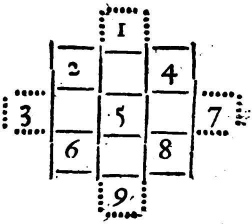


Fig. 1.

				1				
			2		6			
		3		7		11		
	4		8		12		16	
5		9		13		17		21
	10		14		18		22	
		15		19		23		
			20		24			
				25				

Fig. 2.

	9	
7		3
	1	

	20		24	
16		25		4
	21		5	
22		1		10
	2		6	

Remarquez, 1°. Que dans les caſes ponctuées on place les chiffres ſuivant leur ordre naturel diagonalement de droite à gauche.

2°. Qu'on laisse vuide alternativement une suite de cases.

3°. Qu'on reprend les chiffres des cases ponctuées pour remplir les cases vuides comme on voit dans la Figure 2.

Des Quarrés Magiques pairs.

Ces quarrés dépendent du quarré de 16 qui se forme ainsi.

A

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

M.

	15	14	
12			9
8			5
	3	2	

N. B.

1°. Remplissez les cases diagonales en posant 1 dans la case A. passez les deux suivantes & posez 4 dans la case de cette premiere bande.

2°. Passez 5 & posez 6 & 7, ainsi du reste comme l'indique la Figure M.

Il reste 8 cases de vuide qu'il faut remplir de cette maniere ; commencez par la case B du quarré N, comptez 1 qu'il ne faut point poser, pofez 2, 3, dans les cases suivantes, passez 4 posez 5, passez 6 & 7 posez 8, &c. & remplissant l'un par le moyen de l'autre, on a le quarré de 16.

Du quarré de 36.

1°. Formez suivant la méthode précédente un quarré de 16 cases, au milieu de celui de 36, rempli des 16 nombres qui tiennent le milieu entre les 36 nombres à poser.

Pour trouver ces 16 nombres moyens, ôtez 16 de 36 reste 20 dont la demi est 10, il y a donc 10 nombres de part & d'autre, des 16 moyens, donc le premier de ces 16 moyens est 11, & le dernier 26.

2°. Il ne s'agit plus que de placer les 10 extrêmes.

Formez cette double suite.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27.

puis remplissez les deux coins d'en-haut par 1 & 6, & remplissez les coins d'en-bas par 31 & 36 afin que les deux cases diagonales forment 37, ce qui rend déja les 6 cases diagonales magiques.

Observez à présent de mettre autant de grand nombre en bas qu'en haut, or comme il y en a déja deux grands en bas, placez les deux plus grands de la suite précédente en haut dans les cases de leur rang, avec leurs complemens dans les cases d'en-bas correspondantes.

Placez le nombre 5 dans sa case naturelle & son correspondant, la case vuide est déterminé de 30, chaque bande devant former 111.

1	35	34	30	5	6
33	11	25	24	14	4
8	22	16	17	19	29
9	18	20	21	15	28
27	23	13	12	26	10
31	2	3	7	32	36

Pour les bandes latérales formez ces deux suites.

1, 4, 8, 9, 10,
36, 33, 29, 28, 27.

& observez de placer le plus fort des

restans dans la seconde case, parce qu'il tient le second rang dans la suite, & dans la bande la plus foible.

Si vous remarquez alors que la bande où vous avez placez 33 forme une somme plus forte que sa correspondante, vous remplirez suivant la suite précédente par des nombres forts, les cases de la bande plus foible, la derniere est donnée.

PROBLEME 181.

Déterminer la marche du Cavalier au jeu des Echecs pour parcourir les 64 cases noires & blanches de l'Echiquier.

Pour être sûr de l'opération exacte couvrez d'un jetton chaque case que le Cavalier parcourrera, si l'Echiquier se trouve rempli de jettons, le Problême sera résolu.

L'Echiquier a 64 cases que le Cavalier parcourrera aisément en commençant parla case A.

							A
34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

On a imaginé d'autres Méthodes fort ingénieuses, mais celle-ci nous a paru la plus facile, & la plus naturelle.

PROBLEMES GEOMETRIQUES.

PROBLEME 182.

Un Laboureur a deux champs dont l'un eſt les $\frac{4}{3}$ de l'autre ; on demande de déterminer ce que le plus petit eſt au plus grand.

OPERATION.

Renverſez la fraction vous aurez $\frac{3}{4}$, rapport du plus petit au plus grand, en effet le grand étant les $\frac{4}{3}$ du petit, le petit n'en peut être que les $\frac{3}{3}$. Donc le petit eſt les $\frac{3}{4}$ du grand.

PROBLEME 183.

Le champ de Pierre surpasse le champ de Paul de 21 toises quarrées, & ces deux champs sont chacun des quarrés : Quelle est la longueur de chacun des deux champs ?

OPERATION.

$x^2 - y^2 = a$;

Or $x^2 - y^2 = x - y \times x + y$.

D'où j'observe que x & y ne doivent différer entr'eux que de l'unité, afin que $x - y = 1$, & que par conséquent $x + y = a$.

Il ne s'agit donc plus que de diviser 21 en deux parties qui ne différent entr'elles que de l'unité, vous aurez 10 & 11 pour la longueur des deux champs.

$10 \times 10 = 100$

$11 \times 11 = 121$

21. différence.

PROBLEME 184.

Trouver une ligne droite dont le quarré ſoit double d'un quarré donné.

CONSTRUCTION.

Faites un quarré ſur la diagonale A C, il ſera double du quarré donné A B C D. Fig. 78

La démonſtration en eſt trop ſenſible pour en dire davantage.

PROBLEME 185.

Trouver une ligne droite dont le quarré ſoit la demi d'un quarré donné.

CONSTRUCTION.

Menez les deux diagonales A F, E C, elles ſe couperont en D. Faites un quarré ſur la ligne A D, il ſera la demi du quarré donné A E F C. Fig. 79

C'eſt le Problême inverſe du précédent.

PROBLEME 186.

Déterminer une ligne droite dont le quarré soit égal à la différence de deux autres.

CONSTRUCTION.

Fig. 81 Décrivez un demi-cercle sur le côté du plus grand quarré, portez le côté C D du petit, de B en X, menez A X, le quarré de cette ligne est égal au quarré de A B, moins le quarré de C D.

C'est une conséquence de la 47e; car l'angle X est droit, & conséquemment le quarré de A B est égal au quarré de A X plus celui de B X, donc le quarré de A X est égal au quarré de A B moins celui de B X.

PROBLEME 187.

Déterminer en nombres tant de triangles rectangles que l'on voudra.

SOLUTION.

La somme des quarrés des deux nombres quelconques est l'hypothenuse d'un triangle rectangle, donc un des côtés qui forment l'angle droit est la différence de ces deux quarrés, & l'autre côté est le double du produit de ces deux nombres.

Soient $a = 7$. Donc $a^2 = 49$.
$b = 5$. $b^2 = 25$.

$a^2 + b^2 = 74$. hypothenuse.

$a^2 - b^2 = 24$. un des côtés qui forment l'angle droit.

$a \times b \times 2 = 70$. L'autre côté.

$\overline{a^2 + b^2}^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 5476$.

$\overline{a^2 - b^2}^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = 576$.

$\overline{2a + 2b^2}^2 = 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 4900$. Or

$\overline{a^2 + b^2}^2 = \overline{a^2 - b^2}^2 + \overline{2a + 2b}^2$;

Donc, &c.

PROBLEME 188.

Déterminer si l'angle formé par deux murailles, est droit, aigu, ou obtus.

OPERATION.

Du point de concours intérieur des deux murailles, portez d'une part 4 pieds, de l'autre 3 pieds, faites tendre une corde.

1°. Si elle est de 5 pieds, l'angle est droit ou de 90 degrés.

2°. Si elle est moindre que 5, l'angle est aigu.

3°. Si elle est plus grande que 5; l'angle de concours est obtus.

PROBLEME 189.

Connoître l'angle intérieur de deux murailles, sans entrer en leur enceinte.

OPERATION.

Appliquez une régle sur un des parois extérieur, & soustrayez de 180 l'angle qu'elle formera avec l'autre parois, le reste sera la valeur des degrés de l'angle intérieur; parce que toute ligne droite qui tombe sur une autre, forme avec elle deux angles égaux pris ensemble à 180 degrés.

PRO-

PROBLEME 189.

Trouver une ligne droite dont le quarré soit double, triple, quadruple, &c. d'un autre quarré.

CONSTRUCTION.

Elevez à l'extrêmité de A B une perpendiculaire indéfinie.

1°. Portez A B de A en C, le quarré de C B est double du quarré de A B.

2°. Portez C B de A en D, le quarré de D B est triple de celui de A B. Fig. 82.

3°. Portez D B de A en E, le quarré de E B est quadruple de celui de A B.

4°. Portez E B de A en F, le quarré de F B est quintuple de celui de A B, &c.

PROBLEME 190.

Trouver une ligne droite dont le quarré ſoit moitié, tiers, quart, &c. d'un quarré donné.

CONSTRUCTION.

Fig. 83 Pour avoir la demi, diviſez A B en deux également, & cherchez par le Problême ci-deſſus un quarré double de 2 B, il ſera moitié du quarré de A B.

2°. Diviſez B C en trois également, & cherchez un quarré triple de B 3, il ſera le tiers du quarré de A B.

3°. Pour avoir un quarré qui ſoit le quart de D C, diviſez DC en quatre, & cherchez un quarré qui ſoit quadruple de C 4, ou plus ſimplement, diviſés D C en deux également, le quarré de cette ligne ſera le quart de celui de A B.

4°. Diviſez A D en 5, & cherchez un quarré qui ſoit 5 fois ou quintuple de D 5, il ſera le cinquiéme du quarré de A B, &c.

PROBLEME 191.

Déterminer la hauteur d'une Tour accessible à son pied.

OPERATION.

Servez-vous d'un petit triangle ABC isocelle rectangle, posez le côté AB parallele à l'horizon; bornoyez par les points AC, le point X, en vous reculant, ou en avançant vers D; mesurez la distance AD, elle est égale à la hauteur DX, parce que les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels; par conséquent AB, BC :: AD, DX; or AB = BC. Donc AD = DX. Fig. 84.

PROBLEME 192.

Déterminer les hauteurs par le moyen de leur ombre.

OPERATION.

A l'extrêmité de l'ombre posez perpendiculairement un petit bâton; puis faites cette analogie. Fig. 85.

L'ombre du bâton est à la hauteur du bâton, comme l'ombre de l'arbre donné est à sa hauteur.

AB, BC :: BD, DX.

PROBLEME 193.

Une Echelle à 84 pieds, on ne peut la poſer pour l'eſcalade qu'à 8 pieds : de quelle hauteur eſt la muraille ?

OPERATION.

Du quarré de l'Echelle ſouſtrayez le quarré de la diſtance du pied, extrayez la racine du reſte, ce ſera la hauteur du mur.

7056 quarré de l'Echelle.
64 quarré du Talus.

6992 dont racine $83 \frac{103}{167}$.

PROBLEME 194.

La Muraille & l'Echelle étant donnés, trouver le Talus.

Du quarré de l'Echelle ôtez le quarré de la Muraille ; la racine quarrée du reſte donnera le Talus requis.

Soit 12 hauteur de la Muraille, Echelle 15 pieds

De $15 \times 15 = 225$ ôtez
$12 \times 12 = 144$, reſte 81
dont racine eſt 9, Talus requis.

PROBLEME 195.

Un Mur a 42 pieds de hauteur, on ne peut poser l'échelle qu'à douze pieds : de quelle longueur doit être l'échelle ?

OPERATION.

Faites une somme du quarré de 42 & du quarré de 12, vous aurez 1908 dont la racine quarrée est $43 + \frac{9}{87} = \frac{3}{29}$ presque $\frac{1}{10}$.

PREUVE.

$43 + \frac{1}{10} \times 43 + \frac{1}{10} = 1857 \frac{61}{100}$ racine approximée suivant la régle établie page 41.

PROBLEME 196.

Trouver par approximation une ligne droite égale à un arc de cercle.

1°. Tirez la corde AB.

2°. Coupez-la en deux également en O par la perpendiculaire OM, que vous prolongerez d'un quart de MO. Fig. 93.

3°. Centre P, rayon PA ; faites les sections FE, la ligne EF satisfait au Problême.

PROBLEME 197.

On propose d'achever la circonférence d'un Bassin circulaire dont l'Architecte n'a fait qu'une partie.

Soit la partie commencée l'arc M, N, O.

Fig. 92 1°. Tirez les cordes N M, N O.

2°. Divisez-les chacune en deux parties également & perpendiculairement. La commune section P est le centre du Bassin dont l'arc M N O est partie.

PROBLEME 198.

Trouver le centre d'un Bassin circulaire où l'on veut poser un jet d'eau.

Operation.

Tirez dans ce cercle une ligne droite que vous diviserez en deux parties égales & perpendiculairement par le moyen de la ligne A B qui se termine à la circonférence, le milieu de cette ligne sera le centre où il faut poser le jet d'eau.

Fig. 91

PROBLEME 199.

Fournir le galon néceſſaire pour un chapeau dont on fournit le diamétre.

OPERATION.

Prenez trois fois le diamétre, & à ce nombre joignez la ſeptiéme partie du diamétre.

Soit 18 pouces diamétre d'un chapeau, dites :

$$7, 22 :: 18^{p}, x = 56\tfrac{4}{7}.$$

PROBLEME 200.

Trouver la ſuperficie du Cadran qui eſt à l'extrêmité de la nef d'Amiens, ſon diamétre étant donné de 28 pieds.

Faites cette analogie :

$14, 11 :: 28 \times 28, s.$ ſurface.

Ou

$1, 11 :: 28 \times 2, s = 616.$ ſurf.

PREUVE.

$7, 22 :: 28, c = 88.$ circonf.

$$88 \times \tfrac{28}{4} = 616^{f}.$$

PROBLEME 201.

La corde $a + a$ d'un arc, & la flêche b étant donnés, trouver le reste de cette flêche qui feroit le diamétre d'un cercle.

OPERATION.

Fig. 90. Prenez une troisiéme proportionnelle à la flêche b, & à la moitié de la corde $a + a$, elle sera le reste du diamétre.

$$b, a :: a, x = \frac{a^2}{b}.$$

PROBLEME 202.

L'aire & la diagonale d'un champ quarré-long étant données ; déterminer les dimensions de ce champ.

OPERATION.

L'aire est 240, & la diagonale 26. Soit x une des dimensions. Donc $\frac{240}{x}$ est l'autre dimension.

Or $x^2 + \frac{57600}{x^2} = 26 \times 26 = 676$.

Donc $x^4 + 57600 = 676\, x^2$; donc $x^4 - 676\, x^2 = - 57600$. Donc

$$x^4 - 676\, x^2 + 114244 = 114244 - 57600.$$

$$x^4 - 676\, x^2 + 114244 = 56644.$$

Donc $x^2 - 338 = \sqrt{56644} = 238$.

Donc $x^2 = 576$, donc $x = \sqrt{576} = 24$; donc

$\frac{240}{24} = 10 =$ l'autre dimension.

PROBLEME 203.

L'aire & la différence des côtés d'un champ étant connus en nombres ; déterminer les dimensions du champ.

OPERATION.

Soit x un des côtés.

14 différence des deux côtés.

240 surface du champ.

Donc $x + 14$ est l'autre côté.

Donc $x^2 + 14x = 240$.

Donc $x^2 + 14x + 49 = 240 + 49 = 289$.

Donc $x + 7 = 17$, donc $x = 10$.

Donc l'autre côté est - - - 24.

PREUVE.

$24 - 10 = 17$ [sic].

$24 \times 10 = 240$.

PROBLEME 204.

Même exposé, mais résolu par une équation différente pour faire voir qu'il y a diverses méthodes de résoudre un Problême.

OPERATION.

240 aire du champ.
26 diagonale du champ.
x un des côtés.
y différence des deux côtés.

Donc $x+y$ est l'autre côté.

ceci posé on a

1°. $x+y \times x = 240; = x^2 + xy.$

$\overline{x+y}^2 + x^2 = 26 \times 26 = 676.$

$x^2 + xy = 240.$ Donc

$x^2 = 240 - xy.$

$x^2 + 2\,xy + y^2 + x^2 = 676.$

$2\,x^2 + 2\,xy + y^2 = 676.$ Donc

$2\,x^2 = 480 - 2\,xy.$ Donc

$480 - 2\,xy + 2\,xy + y^2 = 676.$

Donc $y^2 = 196$, donc $y = 14.$

Il faut achever le Problême par le précédent.

PROBLEME 205.

Les deux côtés d'un rectangle & la diagonale étant donnés, déterminer chacune des deux dimensions.

SOLUTION.

Soit x l'un des deux côtés inégaux.

34 somme des deux côtés.
26 diagonale, donc
$34 - x$ est l'autre côté.

$$\overline{34-x}^2 + x^2 = \overline{26 \times 26} = 676.$$
$$1156 - 68x + \underbrace{x^2 + x^2}_{2x^2} = 676.$$
$578 - 34x + x^2 = 338$, donc
$x^2 - 34x = -240$, donc
$x^2 - 34x + 289 = 289 - 240.$
$x^2 - 34x + 289 = 49$, donc
$x - 17 = 7$
$x = 24$; donc l'autre côté est 10.

PREUVE.

$24 + 10 = 34.$ 1ere condition.
$\overline{24}^2 + \overline{10}^2 = \overline{26}^2 = 676.$ 2e cond.

PROBLEME 206.

La diagonale & la différence des côtés inégaux étant donnés ; déterminer chacune des deux dimensions.

SOLUTION.

La diagonale est 26.
La différence des côtés est 14.
Soit x un des côtés.
Donc $x + 14$ est l'autre côté.
ceci posé.

$x^2 + \overline{x + 14}^2 = \overline{26}^2 = 676$. D.
$\underbrace{x^2 + x^2}_{2x^2} + 28x + 196 = 676$. D.
$x^2 + 14x + 98 = 338$. Donc
$x^2 + 14x = 240$. Donc
$x^2 + 14x + 49 = 240 + 49$ D.
$x^2 + 14x + 49 = 289$. Donc
$x + 7 = \sqrt{289} = 17$. Donc
$x = 24$ donc l'autre côté est 10.

PREUVE.

$\overline{24}^2 + \overline{10}^2 = 26 \times 26 = 676.$

PROBLEME 207.

Trouver un cercle qui ſoit égal en ſurface à deux cercles donnés.

CONSTRUCTION.

Fig. 86 Soient les deux cercles A & B ; faites un triangle rectangle dont les deux côtés qui forment l'angle droit ſoient égaux aux rayons des deux cercles donnés A & B, l'hypothenuſe X eſt le rayon d'un cercle égal aux deux cercles A & B pris enſemble ; parce que les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons.

PROBLEME 208.

Déterminer le rayon d'un cercle qui ſoit égal à la différence de deux cercles donnés.

CONSTRUCTION.

Décrivez un demi cercle ſur le Fig. 87 rayon du plus grand, portez le rayon du petit de D en E, prenez C E pour rayon d'un cercle Y dont la ſurface eſt égale à celle de X moins celle de B.

PROBLEME 209.

Déterminer le rayon d'un cercle qui soit double, triple, quadruple, &c. d'un cercle donné.

CONSTRUCTION.

Cherchez une ligne dont le quarré soit double, triple, quadruple, &c. du quarré du cercle donné par le Problême 189. Décrivez un cercle dont le rayon soit égal à cette ligne, le Problême est résolu.

PROBLEME 210.

Déterminer le rayon d'un cercle qui soit la demi, le tiers, le quart, &c. d'un cercle donné.

CONSTRUCTION.

Décrivez un cercle dont le rayon soit une ligne dont le quarré soit par Problême 190. la demi, le tiers, le quart, &c. du quarré du cercle donné.

PROBLEME 211.

Mathurine revenant du marché rapporta une botte d'asperges de 15^{s}, son Maître ayant reçu la visite de deux amis qu'il pria à dîner, la renvoya au marché avec un lien double de la premiere botte, & lui donna 30^{s}, mais la Marchande demanda 60^{s}.

Avoit-elle raison ?

SOLUTION.

Les diamétres des cercles sont entr'eux comme les circonférences ; or par hypothèse la circonférence de l'un des cercles est double de celle de l'autre, donc son diamétre est double ; or les surfaces semblables sont entr'elles comme les quarrés des diamétres ; donc la surface de l'un est quadruple de celle de l'autre : par conséquent la Marchande d'asperges avoit raison de demander le quadruple du prix de la premiere botte.

Il suit de-là qu'un diamétre double donne une surface quadruple.

Un diamétre triple donne une surface noncuple.

PROBLEME 212.

Suppoſant la circonférence de la premiere botte d'aſperges de 22 pouces ; combien doit avoir celle d'une botte double.

OPERATION.

22 de circonférence donne $38\frac{1}{2}$ de ſurface ; doublez $38\frac{1}{2}$ vous aurez 77 dont ſa circonférence ſe trouve ainſi :

$11, 14 :: 77, x^2$. diamétre.

$\frac{77 \times 14}{11} = 7 \times 14 = 98$. dont la racine eſt à peu près $9\frac{17}{19}$, valeur du diamétre.

$9\frac{17}{19} \times 3\frac{1}{7} = 31\frac{13}{133}$; ce qui diffère de 44, double de 22, qui donneroit le quadruple en ſurface, comme on a vu au Problême précédent.

PROBLEME 213.

Construire un Bassin ovale sur une ligne donnée A B pour son grand diamétre.

1°. Coupez cette ligne en trois parties égales au point D F.

Fig. 94 2°. De ces points comme centres & de l'intervalle de ces tiers, faites deux cercles dont les circonférences se couperont en P P.

3°. Centres P, rayon D B, décrivez les arcs M M pour achever l'ovale.

PROBLEME 214.

Tracer un Parterre de fleurs en forme ovale, dont on donne le grand & petit diamétre.

1°. Croisez perpendiculairement les deux diamétres A B, C D.

2°. Portez la moitié E C, de A en O. Fig. 95.

3°. Divisez le reste O E en huit parties, dont vous en porterez trois de O en I.

4°. Du point I comme centre, & de l'intervalle A I, décrivez un arc sur lequel vous porterez le rayon de part & d'autre en Y, Z, opérez de même au côté opposé, pour avoir les points R S.

5° Des points Z & S, comme centre, & de l'intervalle Z S, faites des arcs qui se coupent en P, Q; ce point sera le centre de l'arc Z C S, &c.

PROBLEME 215.

Trouver le centre & les deux diamétres d'une ovale.

1°. Tirez une ligne droite A B, menez sa parallele C K.

2°. Coupez chacune de ces lignes en deux également.

Fig. 96 3°. Tirez la ligne E F, que vous prolongerez de part & d'autre, le milieu I de G H est le centre de l'ovale.

4°. Pour avoir les deux diamétres de ce point I & d'un intervalle à volonté I L, faites un cercle qui coupera la circonférence de l'ovale en C & en L.

5°. Menez une ligne droite C L; & coupez-la en deux également & perpendiculairement par la ligne M N vous aurez le grand diamétre.

6°. La ligne qui coupera N M en deux également & perpendiculairement sera le petit.

PROBLEME 216.

Réduire les deux quarrés en un ſeul.

Soit les deux quarrés A B C D : B E F G.

Prenez A N = B E, menez N F, N D, imaginez le triangle N E F, ſe mouvoir comme ſur une charniere en F, & ſe placer en F G H, imaginez de même N A D ſe mouvoir en D, & ſe placer en D C H : on aura le quarré D N F H, égal aux deux quarrés propoſés. *Fig.* 97

On peut exécuter ce Problême en carton.

Cette ingénieuſe découverte eſt de *Sturmius*, ſçavant Mathématicien Allemand.

C'eſt une démonſtration de la fameuſe 47^{e}, en effet le quarré D NFH, n'eſt autre choſe que celui de l'hypothenuſe D N, qui ſoutient les deux côtés des deux quarrés donnés.

PROBLEME 217.

Transformer un parallelogramme rectangle en un quarré parfait.

CONSTRUCTION.

Décrivez un demi-cercle ſur la ſomme des deux dimenſions du rectangle donné ; élevez une perpendiculaire à leur point de jonction, juſqu'à la rencontre du cercle, elle ſatisfait au Problême, parce que ſelon la propriété du cercle, le produit de A par B eſt égal au quarré de X. Fig. 76

Donc $ab = x^2$, Donc &c.

PROBLEME 218.

Transformer un Triangle en un Parallelogramme.

CONSTRUCTION.

Du sommet du triangle rectiligne donné, menez une parallele à sa base, menez du même sommet par le milieu de la base une ligne droite & de l'une des deux extrêmités de la base une parallele à cette ligne qui part du sommet, la figure AB, satisfait au Problême. Fig. 75.

Parce que la surface du triangle est égale au produit de la demi de sa base par la perpendiculaire ; ce qui donne aussi la surface du parallelogramme.

PROBLEME 219.

Changer un Parallelogramme en un autre ſous une ligne donnée.

CONSTRUCTION.

Fig. 88 Soit le Parallelogramme AB, à tranſformer en un autre ſous la ligne K.

Prolongez HB en G, prenez BG = K ; prolongez HA indéfiniment, menez par les points G & D, la ligne GE, menez GF, EF, paralleles à BI ; HG ; prolongez AD, BD, le parallelogramme DF, eſt égal à AB, ſous la ligne DC = BG = K ; ce qu'il falloit faire.

La démonſtration en eſt ſenſible ſi l'on fait attention que AB, DF, ſont complémens de parallelogramme.

PROBLEME 220.

Changez un triangle ABC en un parallelogramme ſous une ligne D & un angle donné N.

CONSTRUCTION.

1°. Changez le triangle en un parallelogramme par Problême 218.

Fig. 89 2°. Changez le parallelogramme en un autre ſous la ligne donnée par Problême précédent.

PRO-

PROBLEME 221.

Transformer un Polygone en un triangle rectiligne.

CONSTRUCTON.

Menez les lignes droites CA, CE, & leurs paralleles BY DX; le triangle rectiligne Y C X, est égal au Polygone AD.

Parce que les parties retranchées Fig. 77. sont égales à celles que l'on ajoute.

PROBLEME 222.

Transformer un triangle rectiligne en un Polygone.

CONSTRUCTION.

Soit le triangle ABC, des points D & E, pris à volonté, menez les lignes indéfinies DG EF, menez les lignes Fig. 78. BD, BE, & leurs paralleles AG, CF, qui détermineront les points G & F, menez BG, BF.

Le Polygone D G B F E, est égal au triangle donné ABC.

C'est l'inverse du précédent Problême.

PROBLEME 223.

Un Particulier voulant avoir un jardin au bout de sa maison, propose à son voisin d'échanger un terrain en lozange ayant 92 pieds de contour, contre un quarré de même contour; on demande si le possesseur du quarré peut faire cet échange sans perte.

Il est évident que le lozange contient moins de surface que le quarré; parce que l'aire du lozange est le produit de 23 par la perpendiculaire, moindre que 23, au lieu que la surface du quarré est le produit de 23 par 23.

PROBLEME 224.

Changer une surface en une autre qui lui soit isopérimétre, mais dont la surface soit la plus grande qu'il est possible.

SOLUTION.

Changez votre surface en un cercle, c'est la plus capable des figures isopérimétres.

Soit un quarré-long de 17 pieds sur 1 pied, son périmétre est 36; dites par régle de proportion selon l'analogie d'Archimede:

22, 7 :: 36, D. Diamétre = 11 $\frac{5}{11}$, la surface de ce cercle est de 103 $\frac{4}{11}$; quelle différence à celle de 17 que le rectangle donné renferme, & même à celle de 8 $\frac{3}{4}$ que donneroit un rectangle de 17 pieds $\frac{1}{2}$ sur $\frac{1}{2}$; dont le contour seroit pourtant de 36 pieds aussi-bien que le cercle?

PROBLEME. 225.

Changer un quarré en un triangle équilatéral isopérimétre.

Soit un quarré dont les deux dimensions prises ensemble fassent 12, le contour ou le périmétre est 24, dont le tiers est 8, pour chacun des côtés du triangle équilatéral.

Remarquez que la surface du quarré est 36, & la surface du triangle est à peu près 28; d'où l'on voit que dans les figures régulieres celles qui sont terminées par le moindre nombre de côtés, sont les moins capables quoique isopérimétres.

PROBLEME 226.

En conservant le périmétre ou le contour d'une surface, la changer en une autre qui soit infiniment petite.

OPERATION.

Que le coutour ou le périmétre d'une surface soit 36 ; & que sa forme soit un quarré de 9 sur 9, son aire est 81 ; si l'on prend la demi de 36 & qu'on en ôte 1, on pourra former un rectangle de 17 sur 1 dont la surface sera 17, & dont le contour sera néanmoins 36.

Si l'on donne à l'un de ses côtés $17\frac{1}{2}$ & l'autre $\frac{1}{2}$, sa surface sera $8\frac{3}{4}$, & son contour sera néanmoins encore 36, &c.

PROBLEME 227.

L'Avocat Patelin veut faire doubler l'habit qu'il a levé chez M. Guillaume ; c'est du drap de 5 quarts de large sur 3 aunes $\frac{3}{4}$ de long.

La doublure n'a que $\frac{2}{3}$ de large ; combien en doit-il acheter d'aunes ?

SOLUTION.

Il faut multiplier 3 aunes $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{4}$, on aura $\frac{75}{16}$, qu'il faut diviser par $\frac{2}{3}$; on réduira $\frac{75}{16}$ en $\frac{225}{48}$ & $\frac{2}{3}$ en $\frac{32}{48}$ c'est donc $\frac{225}{32} = 7\frac{1}{32}$, de long.

PREUVE.

$3\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{75}{16} = \frac{225}{48}$.

$7\frac{1}{32} \times \frac{2}{3} = \frac{450}{96} = \frac{225}{48}$.

On voit que les deux surfaces sont égales, ce qui prouve la solution.

PROBLEMES 228.

Une Piece d'Etoffe contient $9\frac{3}{16}$ en superficie, sa largeur est les $\frac{3}{16}$ de sa longueur; combien a-t'elle de long & de large?

SOLUTION.

Soit x longueur.

Donc $\frac{3x}{16}$ est la largeur.

Or $\frac{3x^2}{16} = 9\frac{3}{16} = \frac{147}{16}$.

Donc $3x^2 = 147$, donc $x^2 = 49$.

Donc $x = 7$, longueur.

Donc $1\frac{5}{16}$ est la largeur.

PREUVE.

$7 \times 1\frac{5}{16} = 9\frac{3}{16}$; 1ere condition.

$1\frac{5}{16} =$ les $\frac{3}{16}$ de 7. seconde & derniere condition.

PROBLEME 229.

Déterminer ce qu'il faut de Tapisserie pour couvrir un pilier de $2\frac{1}{2}$ toises de hauteur sur $7\frac{1}{2}$ pieds de circonférence.

OPERATION.

Multipliez 2 toises $\frac{1}{2}$ par 7 pouces $\frac{1}{2}$; c'est-à-dire $\frac{5}{2}$ par $\frac{5}{4}$, vous aurez $\frac{25}{8} = 3$ toises quarrées $\frac{1}{8}$.

3 toises quarrées $\frac{1}{8}$ font 3 toises 4 pieds, 72 pouces quarrés.

PREUVE.

$15^{pds} \times 7\frac{1}{2} = 112\frac{1}{2} = \frac{225}{2}$, qu'il faut diviser par 36; on aura

$$\frac{225}{72} = 3\frac{9}{72} = 3\frac{1}{8}.$$

PROBLEME 230.

Denis le Tyran s'empara du Champ d'un pauvre homme ; ce Champ étoit quarré & contenoit 80 perches de contour, il lui en donna un autre qui avoit aussi 80 perches de contour ; cependant il ne contenoit en surface que les $\frac{7}{16}$ du premier Champ. Quelles pouvoient donc être les dimensions du Champ du Tyran ?

OPERATION.

Soient x & y les dimensions requises.

Donc $xy = 175$. hyp.

Or $x + y = 40$. hyp.

Donc $x = 40 - y$.

Donc $xy = 40y - y^2$.

Donc $40y - y^2 = 175$.

Pour rendre y^2 positif, changez tous les signes en leurs contraires, vous aurez

$$- 40y + y^2 = - 175.$$

Donc $y^2 - 40y = - 175$.

$y^2 - 40y + 400 = 400 - 175$.

Donc $y - 20 = 15$.

Donc $y = 35$.

Donc $x = 5$.

PREUVE.

1°. $20 \times 20 = 400$ pq contour 80 p.
$35 \times 5 = 175$ pq contour 80 p.
2°. $175, 400 :: 7, 16 = 2800$.

PROBBEME 231.

La surface de mon Jardin, disoit un Géometre, est telle qu'en lui joignant, ou lui ôtant 8 pieds quarrés, il aura une forme quarrée.

OPERATION.

1°. Quarrez le nombre donné 8.
2°. Joignez-y le nombre 4.
3°. Prenez le quart de la somme, le Problême sera résolu.

EXEMPLE.

$8 \times 8 = 64.$
$64 + 4 = 68.$
$\frac{68}{4} = 17$ nombre requis.

PREUVE.

$\left.\begin{array}{l} 17 + 8 = 25 \\ 17 - 8 = 9 \end{array}\right\}$ nombres quarrés.

PROBLEME 232.

Trouver la ſuperficie des cinq Corps réguliers.

1°. Pour le thétraedre, quadruplez la ſurface d'un de ſes triangles. Fig. 63.

2°. Pour l'exaedre, ou cube, ſextuplez le quarré d'une de ſes dimenſions.

3°. Pour l'octaedre, octuplez la ſurface d'un de ſes triangles.

4°. Pour le dodécaedre, dodécuplez la ſurface d'un de ſes pentagones.

5°. Pour l'icoſaedre, prenez vingt fois la ſurface d'un de ſes triangles.

PROBLEME 233.

Trouver la ſuperficie d'un pain de Sucre, dont le côté eſt de 22 pouces & le diamétre de ſa baſe eſt de 11 pouces.

1°. La circonférence de la baſe ſera de $34 \frac{4}{7}$.

2°. Multipliez $34 \frac{4}{7}$ par la demi de
Fig. 98 $22 = 11$, vous aurez $380 \frac{2}{7}$ ſuperficie.

PREUVE.

$$11 \times \frac{22}{2} = 121.$$

$$121 \times \frac{22}{7} = \frac{2662}{7} = 380 \frac{2}{7}.$$

PROBLEME 234.

Trouver la superficie du restant d'un pain de Sucre coupé parallelement à sa base, dont on connoît les deux diamétres & le côté oblique.

Soient les deux diamétres 7 & 11^{p}, & le côté oblique 8^{p}.

1°. Cherchez les deux circonférences paralleles que vous trouverez de 22, & $34\frac{4}{7}$. Fig. 98

2°. Multipliez la demi de leur somme par 8, vous aurez $28\frac{2}{7}$ à multiplier par 8 qui donneront $226\frac{2}{7}$.

PREUVE.

$7 + 11 = 18$ dont la $\frac{1}{2}$ est 9.

$9 \times 8 = 72.$

$72 \times 3\frac{1}{7} = 226\frac{2}{7}.$

PROBLEME 235.

Trouver la superficie d'une Sphere ayant $4\frac{1}{2}$ pieds de diamétre.

OPERATION.

Faites cette analogie.

14, 11 :: comme le quadruple du quarré du diamétre est à la surface requise.

$14, 11 :: \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{81}{4}, x.$

quad. du quarré.

$14, 11 :: 81, x = 63\frac{9}{14}.$

PREUVE.

$4\frac{1}{2}$ donnent de circonf. $14\frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$

Fig. 66 $14\frac{1}{7} \times 4\frac{1}{2} = \frac{891}{14} = 63\frac{9}{14}.$

PROBLEME 236.

Trouver la superficie d'une Ovale.

Faites cette analogie.

14, 11 comme le produit des deux diamétres 8 & 12, est à la surface requise $75\frac{3}{7}$.

On regarde l'Ovale comme un cercle dont le quarré du diamétre est représenté par le produit des deux axes.

PROBLEME 237.

Trouver la solidité des cinq Corps réguliers.

Pour le thetraedre, multipliez sa base par le tiers de sa hauteur perpendiculaire.

Pour l'exaedre ou cube, multipliez ses trois dimensions l'une par l'autre, ou regardez le cube comme un composé de six * pyramides égales ayant toutes leur sommet au centre du cube ; prenez la surface de la base d'un de ces côtés, que vous multiplierez par le tiers de sa hauteur & vous prendrez ce produit six fois.

Pour l'octaedre, regardez-le comme deux pyramides quadrangulaires qui ont un quarré parfait pour base commune. Fig. 63.

Pour le dodécaedre, regardez-le comme un solide composé de 12 pyramides pentagonales.

Pour l'icosaedre, regardez-le comme un solide formé de vingt pyramides triangulaires.

* Cette ingénieuse découverte est du fameux Sanderson, Anglois, aveugle de naissance.

PROBLEME 238.

Trouver la ſolidité d'une Sphere dont le diamétre eſt 10.

SOLUTION.

Faites cette analogie.

$$21,\ 11 :: 1000 \overset{\text{cube du diam.}}{,}\ x = 523^{\text{ p. cub.}}\ \tfrac{17}{21}.$$

PREUVE.

10 pieds de diamétre donnent $31\,\frac{3}{7}$ pour la circonférence d'un grand cercle, & pour ſurface de la Sphere $314\,\frac{2}{7}$.

Multipliez cette ſurface par le diamétre 10, vous aurez $3142\,\frac{6}{7}$, dont le ſixiéme eſt $523,\ \frac{17}{21}$.

PROBLEME 239.

Trouver la ſolidité d'un pain de ſucre dont la hauteur eſt 15 pouces, & le diametre de ſa baſe 7 pouces.

La ſurface de la baſe ſera 38 pouces $\frac{1}{2}$ qu'il faut multiplier par 5 tiers de la hauteur du cône, vous aurez 192 $\frac{1}{2}$ pouces cubes pour la ſolidité requiſe.

Si l'on vouloit avoir la ſolidité de ce pain de Sucre tronquée, il faudroit chercher la ſolidité totale, & en ôter la ſolidité de la partie enlevée.

PROBLEME 240.

Connoiſſant le côté d'un cube, déterminer par approximation le côté d'un cube double, triple, &c.

SOLUTION.

Soit $a = 7$ côté donné.

Faites le cube de ce côté, & multipliez-le par le rapport donné que l'on ſuppoſe r, vous aurez

ra^3 dont la racine ſatisfera au Problême.

EXEMPLE.

$a^3 = 343.$

$r = 3.$ Donc

$ra^3 = 1029.$

Il ne s'agit plus que d'extraire la racine cubique de 1029, que l'on trouvera de $10 \frac{29}{331}$.

L'on doit remarquer que le rapport r peut déſigner un nombre fractionnaire tel que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c.

FIN.

TABLE DES AMUSEMENS MATHEMATIQUES.

Mêmes

Des Progressions Arithmétiques.

Des Progressions Géométriques.

Fin de la Table.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit intitulé, *les Amusemens Mathématiques, &c.* & je n'y ai rien trouvé qui puisse en empêcher l'impression. A Paris ce 2 Septembre 1748.

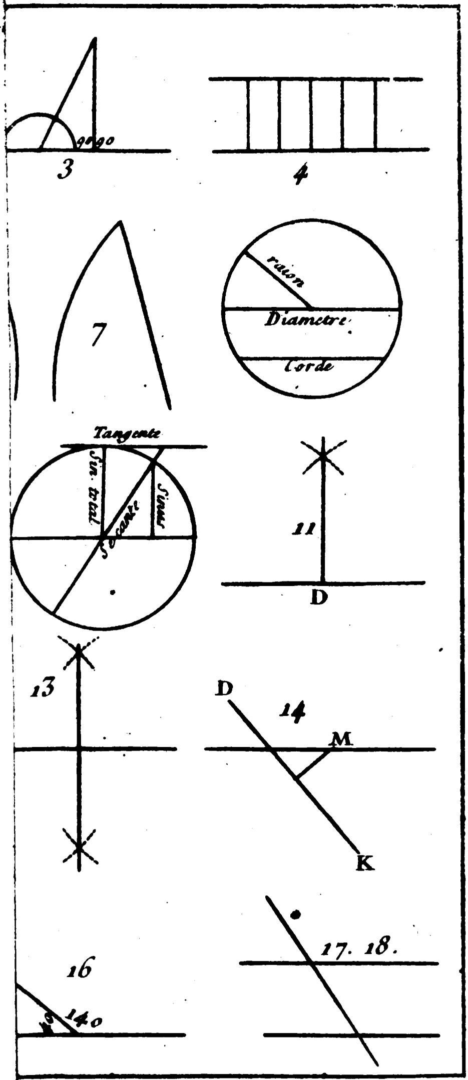
CLAIRAUT.

PRIVILEGE DU ROY.

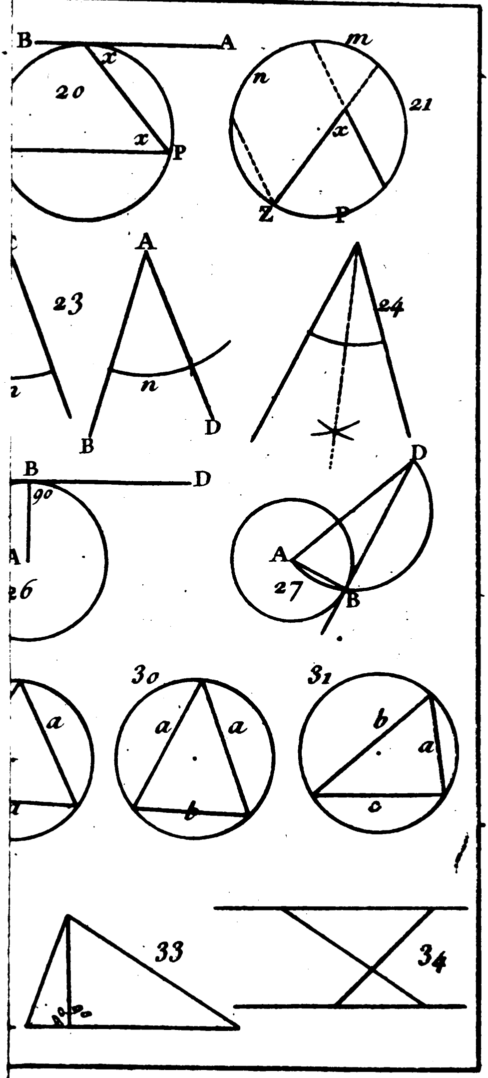
LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien-amé le Sieur *** Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Les Amusemens Mathématiques, précédé d'un Abrégé d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie, nécessaire pour l'intelligence des Problêmes.* S'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Permission pour ce nécessaires : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant ; Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou pluſieurs Volumes, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de trois années conſécutives à compter du jour de la datte deſdites Préſentes : Faiſons défenſes à tous Libraires, Imprimeurs & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la Feuille imprimée attachée pour modéle ſous le contre-Scel des Préſentes, que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; qu'avant de l'expoſer en vente, le Manuſcrit, qui aura ſervi de Copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-chèr & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France ; le tout à peine de nullité deſdites Préſentes : Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, & ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la Copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi ſoit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. DONNE' à Verſailles le vingt-cinquiéme jour du mois de Janvier mil ſept cent quarante-neuf, & de notre Regne le trente-quatriéme. Par le Roi en ſon Conſeil. *Signé*, SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre XI de la Chambre Royale des Imprimeurs & Libraires de Paris, N° fol. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1732. A Paris le 1749. G. CAVELIER, *Syndic.*

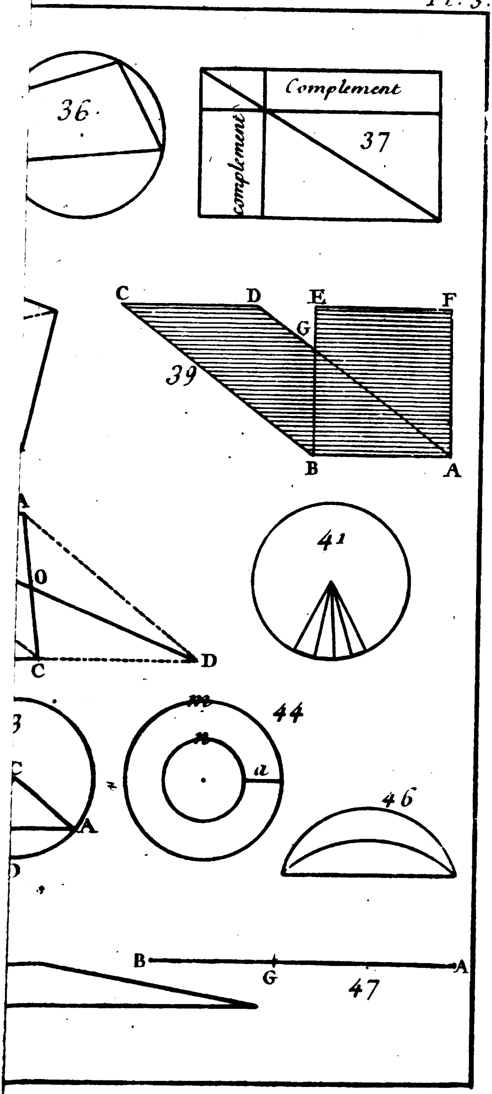
De l'Imprimerie de DELAGUETTE, rue S. Jacques à l'Olivier. 1749.



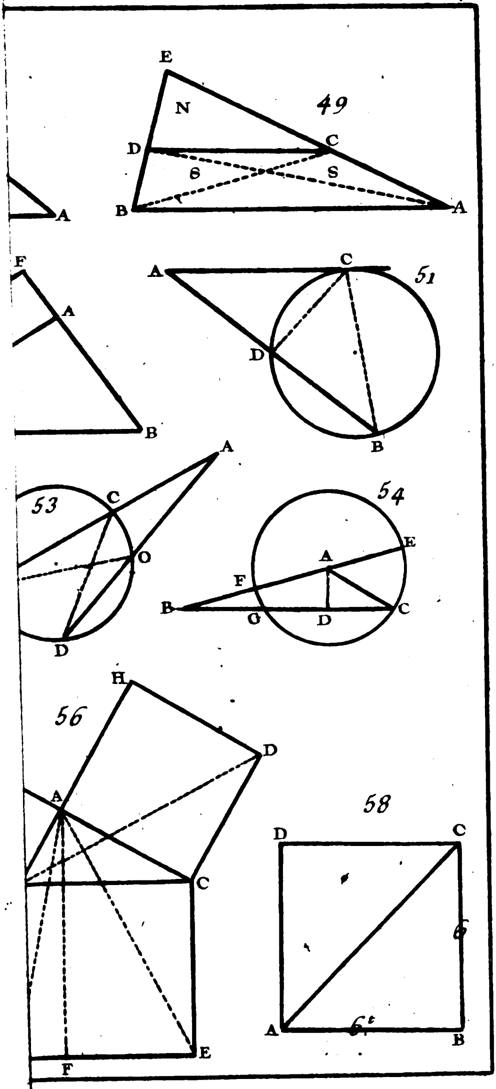
90 90
3
4
7
raion
Diametre
Corde
Tangente
Sin. total
Secante
Sinus
11
D
13
D
14
M
K
16
140
17. 18.


B
A
x
20
x
P
m
n
21
x
Z
P
A
23
n
B
D
24
B
D
90
A
26
D
A
27
B
a
30
a
a
b
31
b
a
c
33
90
34

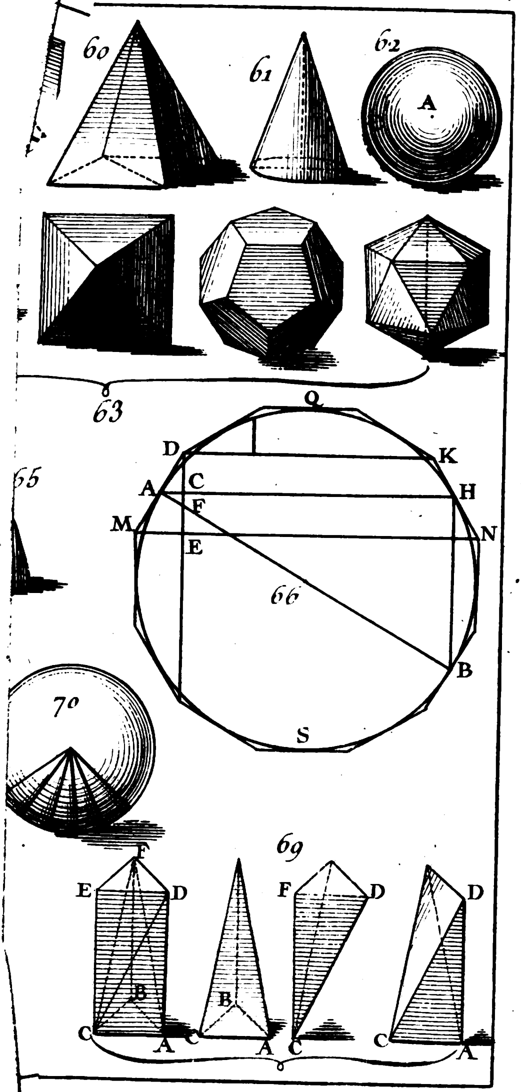
Pl. 3.

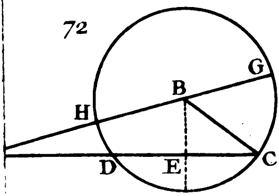

36
Complement
complement
37
C
D
E
F
G
39
B
A
A
O
C
D
41
m
n
a
44
C
A
46
B
G
A
47

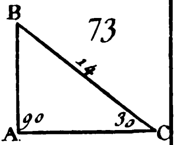
Pl. 4.

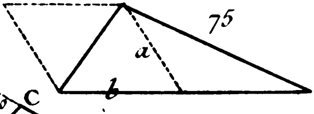


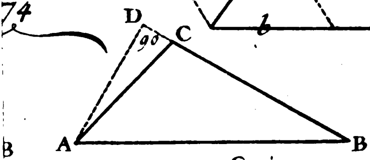
Pl. 5.

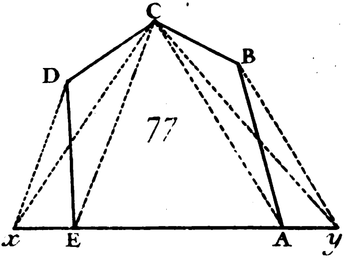


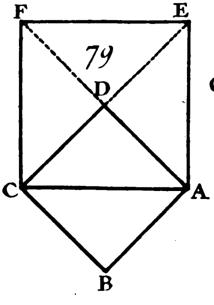

72
G
B
H
D
E
C

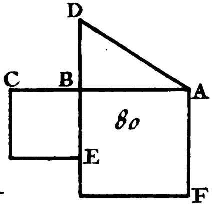

B
73
14
90
30
A
C

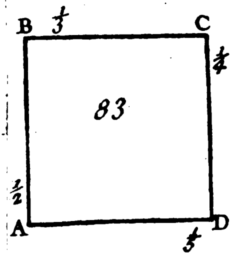

75
a
b

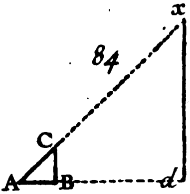

74
D
90
C
A
B

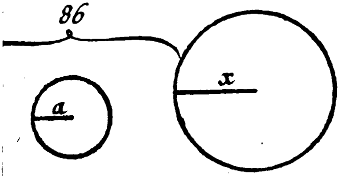

C
B
D
77
x
E
A
y

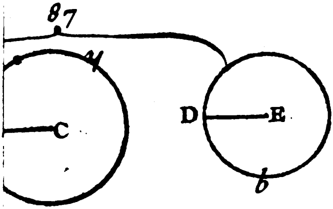

F
E
79
D
C
A
B

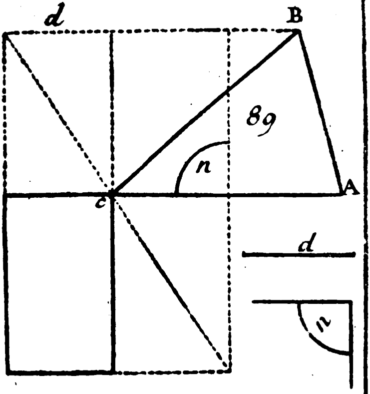

D
C
B
A
80
E
F

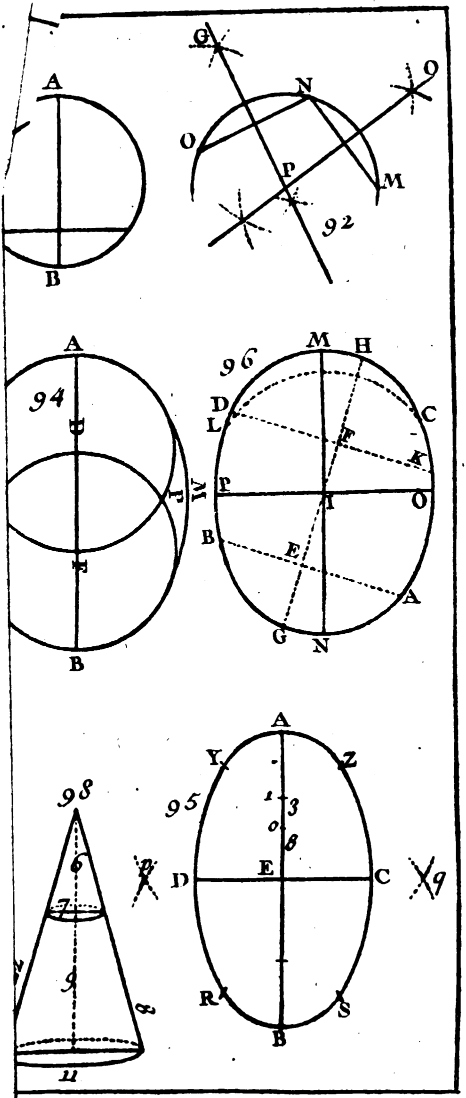

B
1/3
C
1/4
83
1/2
A
D
1/5


x
84
C
A
B
d


86
x
a


87
y
C
D
E
b


d
B
89
n
A
c
d
n


A
B
G
N
Q
O
P
M
92
A
94
D
F
M
E
B
96
M
H
D
C
L
F
K
P
I
O
B
E
A
G
N
A
Y
Z
95
1
3
0
8
p
D
E
C
q
R
S
B
98
6
7
9
8
11