GIOCHI MATEMATICI

di Martin Gardner

Le ispirate simmetrie geometriche di Scott Kim

Il libro di Scott Kim pubblicato quest'anno da Byte Publications, *Inversions,* è uno dei più deliziosi e sorprendenti che siano mai stati pubblicati. Nel corso degli anni Kim ha sviluppato la magica abilità di rigirare qualsiasi parola, breve frase o lettera in modo tale da far venir fuori una sorta di sorprendente simmetria geometrica. Prendete in considerazione il modo di scrivere il mio nome che vedete sotto, rivoltate il tutto ed, ecco,... rimane esattamente uguale!

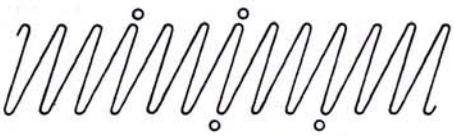
Gli esperti in giochi di parole si sono da tempo accorti che si possono formare brevi parole che presentino vari tipi di simmetria geometrica. Sulla Rue Mozart a Parigi una boutique chiamata «New Man» ha una grande insegna su cui è scritto «NeW MaN» con la *e* e la *a* scritte in modo da differire solo per l'orientamento. Il risultato è che l'insegna è simmetrica rispetto al suo rovesciamento. I nomi VISTA (la rivista della United Nations Association), ZOONOOZ (la rivista dello zoo di San Diego) e NISSIN (un'industria giapponese di materiale fotografico) vengono tutti ingegnosamente scritti così da essere simmetrici rispetto al loro rovesciamento.

BOO HOO, DIOXIDE, EXCEEDED, e DICK COHEN DIED 10 DEC 1883 hanno simmetria speculare rispetto a un asse orizzontale. Se li rovesciate e li mettete di fronte a uno specchio, rimangono immutati. Un giorno in un supermercato mia sorella rimase perplessa di fronte al nome scritto su di una scatola di crackers, finché non si accorse che la scatola era stata messa capovolta sullo scaffale. Wallace Lee, un mago della Carolina del Nord, amava divertire gli amici chiedendo loro se avevano mai mangiato degli «ittaybeds», parola che scriveva su un pezzo di carta in questo modo:

Ittaybeds

Dopo che tutti avevano risposto di no, aggiungeva: «Per forza, si gustano meglio rovesciati».

Molte parole brevi scritte nei normali caratteri di stampa diventano altre parole se vengono rovesciate. MOM diventa WOW, e «do» diventa «op». OSSO rimane uguale. Ecco un modo divertente per scrivere «minimum» in modo che resti uguale se viene ruotato di 180 gradi:



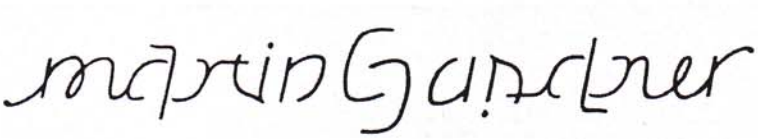
È stato Kim a portare questa curiosa arte della calligrafia simmetrica a livelli mai raggiunti prima. Kim, distorcendo ingegnosamente le lettere (ma neppure tanto da rendere irriconoscibili una parola o una frase), ha prodotto delle configurazioni semplicemente fantastiche. Il suo libro è una raccolta di tali meraviglie, inframmezzate da osservazioni provocatorie sulla natura della simmetria, i suoi aspetti filosofici, il suo inserimento nell'arte, nella musica e nei giochi di parole. Kim non è uno sconosciuto per questa rubrica: è un giovane di origini coreane, nato negli Stati Uniti, che si sta specializzando in informatica alla Standford University. Era ancora un ragazzo quando ha incominciato a creare giochi matematici molto originali, alcuni dei quali sono comparsi in queste pagine. Tra questi: «viaggio del re smarrito» (agosto 1977), il problema della disposizione dei cavalli (negli scacchi) sui vertici di un ipercubo (giugno 1978), la sua soluzione dell'«inscatolamento della scatola» (giugno 1979) e la sua mappa splendidamente simmetrica (giugno 1980). Oltre ad avere una notevole capacità di pensiero geometrico (non solo in due o tre dimensioni, ma anche nello spazio a quattro e in spazi superiori), Kim è un pianista di musica classica che per anni è stato indeciso se proseguire nello studio della matematica o in quello della musica. Al momento si interessa di come servirsi del calcolatore per progettare caratteri di stampa, campo questo in cui fu pioniere il suo amico e mentore Donald E. Knuth.

Per diversi anni il talento di Kim per scrivere le parole in modo da dar loro inattese simmetrie venne sfruttato solo per divertire gli amici e per elaborare cartoline natalizie per la famiglia. Quando incontrava uno sconosciuto o una sconosciuta ad una festa, imparava il suo nome, quindi spariva per un attimo e ritornava con il nome graziosamente disegnato in modo che si potesse leggere ugualmente anche rovesciato. Nella figura della pagina a fronte compare il suo biglietto di Natale del 1977 con simmetria di rovesciamento. (Lester e Pearl sono suo padre e sua madre; Grant e Gail suo fratello e sua sorella.) L'anno successivo trovò il modo per rendere «Merry Christmas 1978» specularmente simmetrico con asse di simmetria orizzontale, mentre nel 1979 lo rese con asse di simmetria verticale. Per l'anniversario di matrimonio dei suoi genitori, Kim ideò una torta con una glassa di cioccolata e vaniglia che formava la combinazione che si vede nella pagina a fianco. («Lester» è in nero, «Pearl» è rovesciato, in bianco.) Questa è la tecnica di Kim «figura e sfondo». Ne troverete un altro esempio in *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid,* il libro vincitore del premio Pulitzer scritto da quel buon amico di Kim che è Douglas R. Hofstadter, con il quale mi alterno quest'anno su queste colonne. A proposito di Kurt Gödel, J. S. Bach e M. C. Escher, in un'altra figura della pagina a fronte si può vedere come Kim abbia dato a ciascun nome un'incantevole simmetria speculare. In una figura a pagina 118 Kim ha scritto l'intero alfabeto in modo tale che la configurazione complessiva ha una simmetria bilaterale.

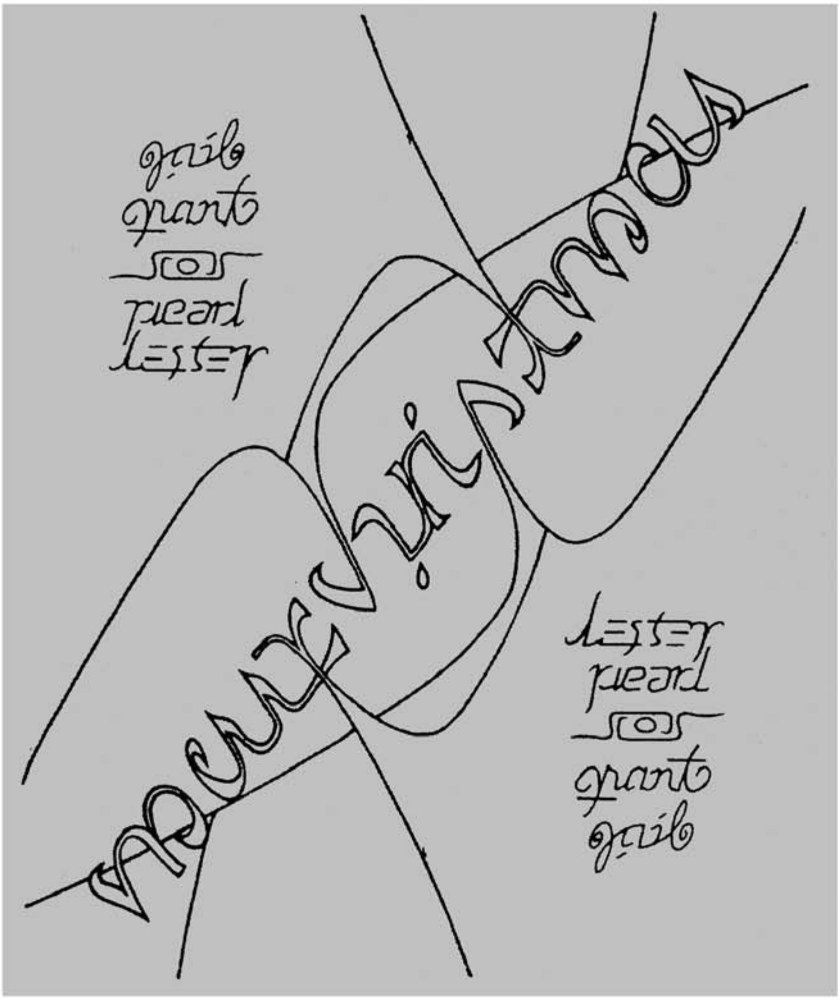
La calligrafia magica di Kim fu notata da Scot Morris, uno dei redattori di «Omni», che dedicò una pagina della sua popolare rubrica di giochi al lavoro di Kim nel numero di settembre 1979 di «Omni» e bandì un concorso tra i lettori per la ricerca di configurazioni analoghe. Kim venne assunto per giudicare le migliaia di proposte arrivate. Troverete quelle vincenti sul numero di «Omni» dell'aprile 1980 e le migliori classificate nella rubrica di Morris di maggio e del novembre dello stesso anno.

Tutte le configurazioni del libro di Kim sono fatte da lui; eccovene alcune altre a pagina 118 per darvi un'idea della sorprendente varietà di trucchi visivi che Kim estrae dal suo cappello.

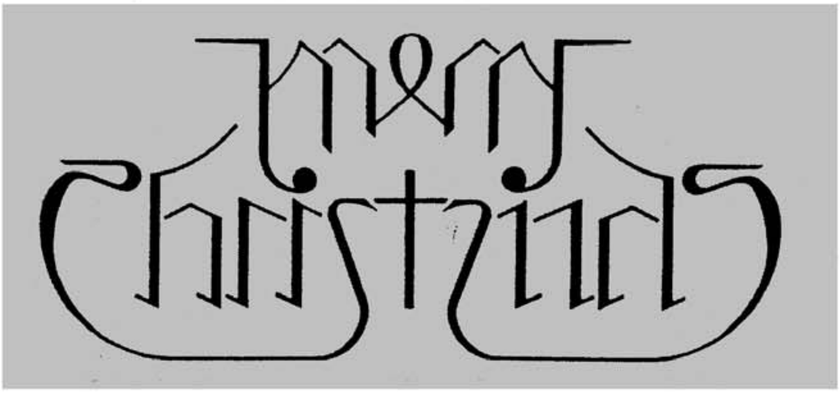
Passiamo ora a due insoliti problemi matematici proposti da Kim, entrambi i quali sono tutt'ora solo parzialmente risolti. Nel 1975, quando era alla scuola superiore, Kim escogitò la seguente generalizzazione del vecchio problema di come disporre sulla scacchiera otto regine in modo che nessuna sia sotto attacco. Chiediamoci, si disse Kim, qual è il nume-



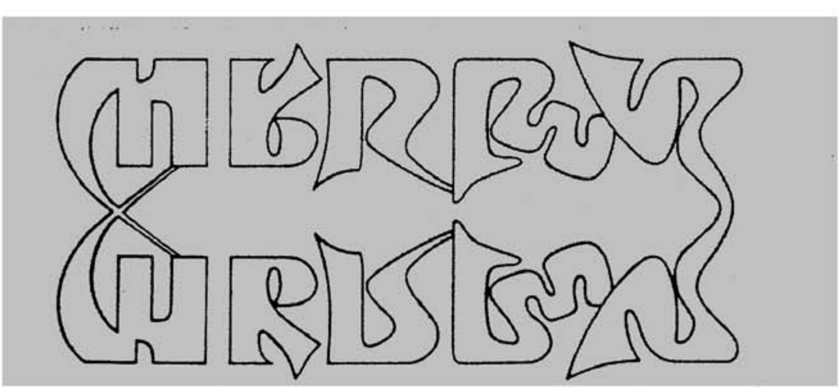
Il nome dell'articolista si legge anche capovolto



La cartolina augurale di Kim si legge ugualmente capovolta



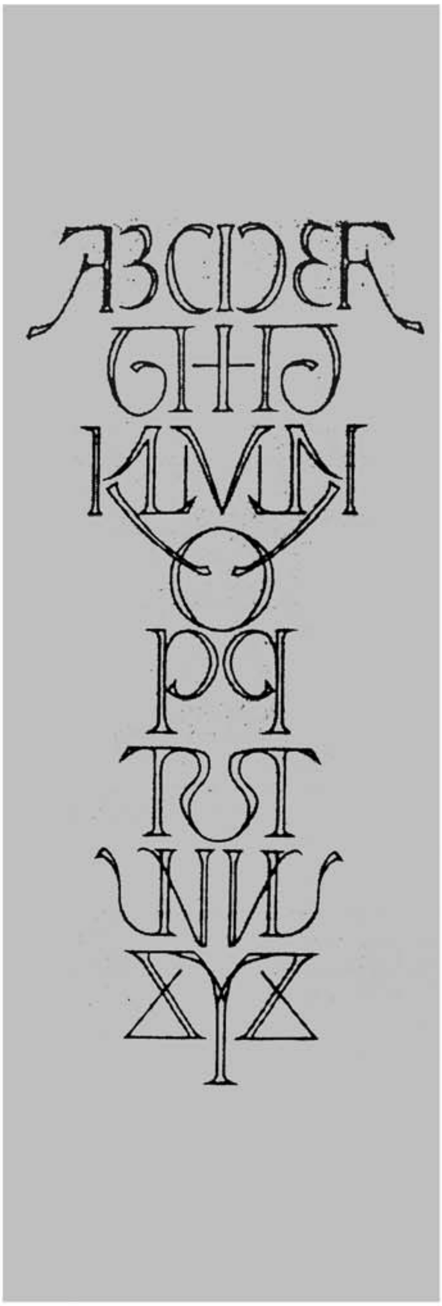
«Merry Christmas» è specularmente simmetrico con asse di simmetria verticale



«Merry Christmas» è specularmente simmetrico con asse di simmetria orizzontale

«Lester» e «Pearl» fanno da figura e da sfondo

Gödel, Escher e Bach in simmetria speculare



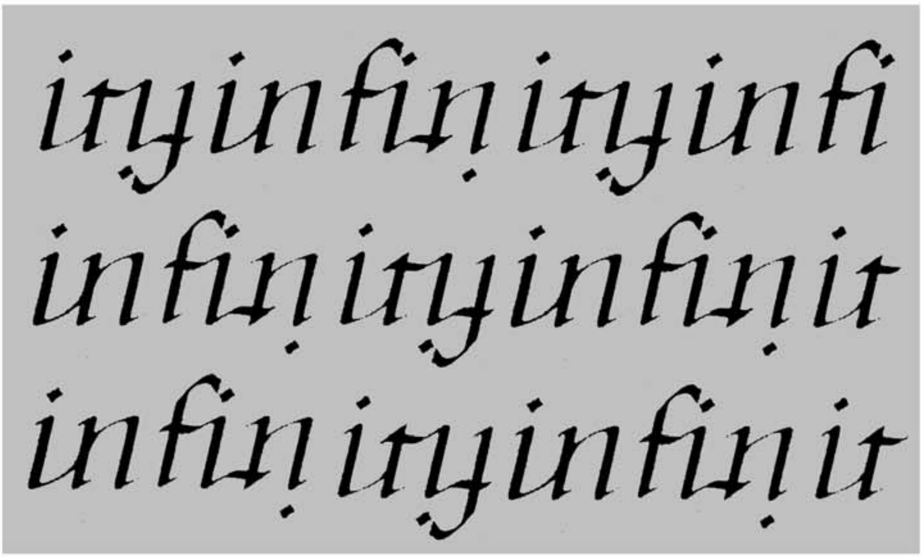
L'alfabeto specularmente simmetrico

«True» è inserito in «False»

«Upside» è lo stesso rovesciato

Una «comunication» divisa può essere invertita

«Man» e «Woman» invertibili



«Infinity» va all'infinito

ro massimo di regine che si possono disporre sulla scacchiera in modo che ciascuna regina ne attacchi esattamente *n* altre. Come negli scacchi, stabiliamo che nessuna regina ne possa attaccare un'altra se ce n'è un'altra in mezzo.

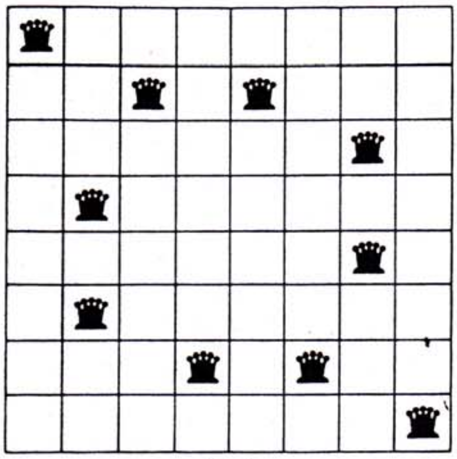
Quando *n* è uguale a zero, abbiamo il problema classico. Kim riuscì a dimostrare che, quando *n* è uguale a 1, 10 è il numero massimo di regine. (La dimostrazione si trova nel «Journal of Recreational Mathematics» vol. 3, n. 1 pag. 61; 1980-81.) Nella figura in alto della pagina a fronte si può vedere una piacevole soluzione del problema. L'illustrazione al centro mostra una soluzione massimale di 14 regine con $n = 2$, combinazione questa che Kim ha descritto in una lettera come «così orribilmente asimmetrica da non aver nessun diritto di esistere». Ci sono solo ipotesi su quale sia il massimo quando *n* è 3 o 4. Il miglior risultato di 16 regine per n = 3 trovato da Kim, ha la soluzione ridicolmente semplice che si vede nella figura in basso, ma non c'è nessuna dimostrazione che 16 sia il massimo. Per n = 4, il miglior risultato di Kim è 20 regine. Siete capaci di disporre le venti regine sulla scacchiera in modo che ciascuna regina ne attacchi esattamente quattro altre, prima che io dia la soluzione di Kim nella mia prossima rubrica?

Il problema si può ovviamente generalizzare a scacchiere di qualsiasi grandezza, ma Kim ha una semplice dimostrazione basata sulla teoria dei grafi che, per quanto grande sia la scacchiera, *n* non può avere un valore superiore a 4. Per $n = 1$ Kim ha dimostrato che il massimo numero di regine non può superare il massimo intero minore o uguale a $4k/3$, dove *k* è il numero dei quadrati lungo il lato di una scacchiera. Per $n = 2$, Kim ha una dimostrazione più difficile del fatto che il numero massimo di regine non può superare $2k-2$ e che questo massimo si può ottenere su tutte le scacchiere di ordine pari.

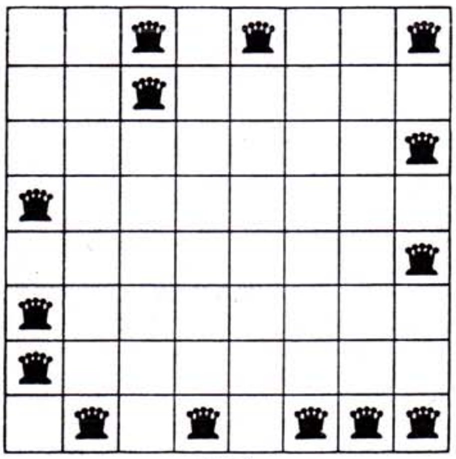
Il problema di Kim riguardante il drago di policubi non era stato ancora reso noto ed io e lui saremo ben lieti se qualche lettore ci darà qualche chiarimento su di esso. Per prima cosa dobbiamo definire un drago come una catena semplicemente connessa di cubi unitari identici congiunti per le facce in modo che ciascun cubo (tranne il cubo alla fine della catena) sia attaccato ad esattamente due altri cubi. Il drago può piegarsi in qualsiasi direzione possibile purché nessun cubo interno tocchi la faccia di nessun altro cubo all'infuori di quelli immediatamente vicini. I draghi possono però ruotare in modo che qualsiasi numero di cubi si tocchino per gli spigoli o ai vertici. Un drago di policubi può essere di lunghezza finita con due cubi terminali legati ciascuno ad un cubo soltanto, oppure può essere finito e chiuso così da non avere estremi. Il drago può anche avere un solo estremo ed essere di lunghezza infinita, oppure può essere infinito senza nessuno dei due estremi.

Poniamo ora una domanda apparentemente semplice: qual è il minor numero di draghi necessario per riempire tutto lo spazio? Possiamo porre la questione in un altro modo. Immaginiamo che lo spazio sia completamente riempito da un numero infinito di cubi unità. Qual è il più piccolo numero di draghi in cui si può dividere tagliando lungo i piani che definiscono i cubi?

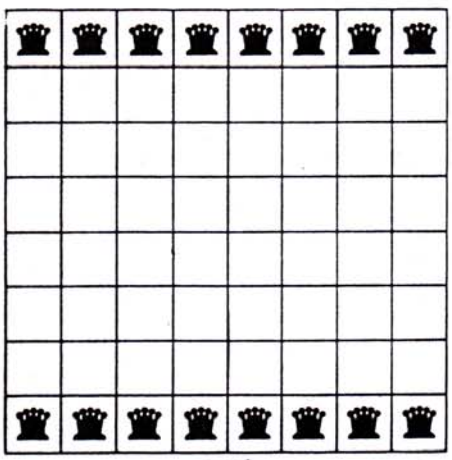
Se consideriamo il corrispondente problema bidimensionale (draghi composti da quadrati unità), è facile rendersi conto che la risposta è due. Basta semplicemente intrecciare due spirali di draghi piani infiniti con un estremo, uno grigio e uno bianco.



n = 1



n = 2



n = 3

Il problema delle regine di Kim

Riempire lo spazio tridimensionale con draghi di policubi non è così semplice. Kim ha trovato un modo per piegare quattro draghi di lunghezza infinita ad un estremo (conviene immaginarli di diverso colore) in una struttura di forme elicoidali intrecciate che riempie tutto lo spazio. Il sistema è troppo complesso per venir spiegato in uno spazio limitato; vi basti la mia parola che è possibile.

Si può fare con tre draghi? Non solo questa domanda non ha risposta, ma lo stesso Kim non è riuscito a dimostrare che non si può fare con due draghi! Ha scritto in una lettera: «Una soluzione con due soli draghi rappresenterebbe una sorta di simbolo yin-yang tridimensionale infinito: lo spazio negativo lasciato da un drago sarebbe l'altro drago. È la bellezza di questo intreccio e la possibilità di costruire un modello grande abbastanza da muoversi che mi fa continuare a cercare una soluzione».

Il problema si può ovviamente generalizzare a draghi fatti di cubi unità di un qualsiasi numero di dimensioni. Kim ha ipotizzato che in uno spazio di n dimensioni il più piccolo numero di draghi che lo riempia completamente è $2(n-1)$, ma la cosa è molto incerta.

Alcuni anni fa ebbi il piacere di spiegare il problema del drago di policubi al matematico di Cambridge John Horton Conway. Quando conclusi dicendo che Kim non aveva ancora dimostrato che due draghi non possono tassellare lo spazio tridimensionale, Conway disse immediatamente: «Ma è ovvio che...». Si bloccò a metà frase, fissò per un minuto lo spazio e poi esclamò: «*Non* è ovvio!».

Non ho idea di quello che sia passato nella mente di Conway in quel momento. Posso solo dire che se l'impossibilità di riempire lo spazio tridimensionale con due draghi non è sembrata ovvia a Conway o a Kim, probabilmente non risulterà ovvia a nessun altro.